



RISIKO MANAGER

15 . 2014

[KREDITRISIKO] [MARKTRISIKO] [LIQUIDITÄTSRISIKO] [OPRISK] [ERM] [REGULIERUNG]



Risikomanagement mit Sprungprozessen (Teil 1)

Was sind Lévy-Prozesse?

In diesem ersten Kapitel unserer neuen Serie zu interessanten Hilfsmitteln für ein modernes Risikomanagement besprechen wir eine wichtige Klasse von stochastischen Prozessen, benannt nach dem französischen Stochastiker Paul Lévy (1886-1971). Diese Klasse enthält, neben der sehr bekannten Brown'schen Bewegung, auch allgemeinere Prozesse mit Sprüngen, welche in der heutigen Praxis des Risikomanagements noch relativ schwach verbreitet sind. Solche Sprungprozesse sind aber insbesondere für die Modellierung von Aktienprozessen sehr interessant und finden darüber hinaus auch Anwendung in anderen Gebieten der Risikothorie. Beispiele sind die Versicherungsmathematik (Cramér-Lundberg-Modell und dessen Erweiterungen) oder die Kreditrisikoanalyse (strukturelle Modelle für Firmenausfälle).

Doch richten wir unseren Fokus zunächst auf die Modellierung von Aktienkursen. Unerwartete Nachrichten wie Zentralbankentscheidungen, politische Entwicklungen, Pressemeldungen von Firmen, Produktvorstellungen, Naturkatastrophen etc. führen oft zu starken Preisänderungen in den betroffenen Einzelaktien und/oder einem übergeordneten Aktienindex. Dies

wird für den DAX anhand wöchentlicher Renditen in ► **Abb. 01** illustriert. Große und abrupte Preisänderungen sind aber insbesondere auch im Intraday-Handel zu beobachten. Modelle auf Basis von Brown'schen Bewegungen als stochastische Treiber (wie dem Black-Scholes-Modell als prominentem Vertreter) sind, auf

Fortsetzung auf Seite 6

Inhalt

- 1, 6 Was sind Lévy-Prozesse?
- 3 Standpunkt, Kurz & Bündig
- 14 Buchbesprechung
- 15 Fremdwährungs- und Warenpositionsrisiken
- 22 Personalien
- 22 Produkte & Unternehmen

WWW.RISIKO-MANAGER.COM

Anzeige

Risikomanagement für Finanzdienstleister

Interne Modelle brauchen Hintergrundwissen. Neben dem Berufsalltag auf die nächste Regulierungsperiode vorbereiten: Wir machen Sie fit für die Zukunft

- Master of Science (akkreditiert)
- Zertifikatsprogramme
- Einzelmodule



CARL
VON
OSSIEZKY
universität OLDENBURG

Risiken quantifizieren.
Kompetenz erweitern.
Wissen vernetzen.

Melden Sie sich jetzt an.
Nähere Informationen bei
Dipl.-Math. Silke Welter
Tel: 0441 - 798 32 44

risikomanagement@uni-oldenburg.de

www.risikomanagement.uni-oldenburg.de

Fortsetzung von Seite 1

grund der stetigen Pfade der Brown'schen Bewegung, nicht in der Lage, solche Sprünge abzubilden und neigen daher dazu, das Risiko kurzfristiger Preisschocks zu unterschätzen.

Nach wie vor basieren viele Modelle für Aktienrenditen – sowohl in diskreter als auch in stetiger Zeit – auf einer Normalverteilungsannahme. Eine Ursache dafür sind sicherlich die bis heute sehr einflussreichen Artikel von Harry Markowitz [vgl. Markowitz 1952] und Fischer Black und Myron Samuel Scholes [vgl. Black/Scholes 1973], die von normalverteilten (logarithmischen) Renditen ausgehen. Eine weitere Ursache ist die analytische Schönheit der Normalverteilung. Empirisch lässt sich die Annahme einer Normalverteilung aber kaum halten. Untersucht man beispielsweise die historische Verteilung realisierter Aktienrenditen, so beobachtet man größere Randwahrscheinlichkeiten, vorhandene Asymmetrie/Schiefe und eine größere Kurtosis als die der Normalverteilung, siehe dazu ► **Abb. 02**. Es werden somit in normalverteilten Modellen für Renditen von Aktien gerade kritische Bereiche der Renditeverteilung (wie große Ausschläge) mit zu wenig Wahrscheinlichkeitsmasse belegt und entsprechende Risiken unterschätzt. Auch diese Beobachtung motiviert

den Übergang zu reichhaltigeren Verteilungen.

Beobachtungen einer Inkonsistenz von Brown'scher beziehungsweise normalverteilter Welt können aber auch unter dem risikoneutralen Maß, beispielsweise an Optionsmärkten, gemacht werden. Invertiert man nämlich Europäische Call/Put-Preise via der Black-Scholes-Formel, um implizite Volatilitäten zu berechnen, so sind diese – entgegen der Annahme im Black-Scholes-Modell – nicht konstant über unterschiedliche Strikes und Maturitäten hinweg. In vielen Fällen wird für eine festgehaltene Maturität und einen variablen Strike eine U-Form an impliziten Volatilitäten beobachtet – diese Beobachtung wird „Smile“ genannt. Modelle basierend auf Lévy-Prozessen mit Sprüngen sind, im Gegensatz zu Brown'schen Modellen, in vielen Fällen besser in der Lage, diese Beobachtung abzubilden.

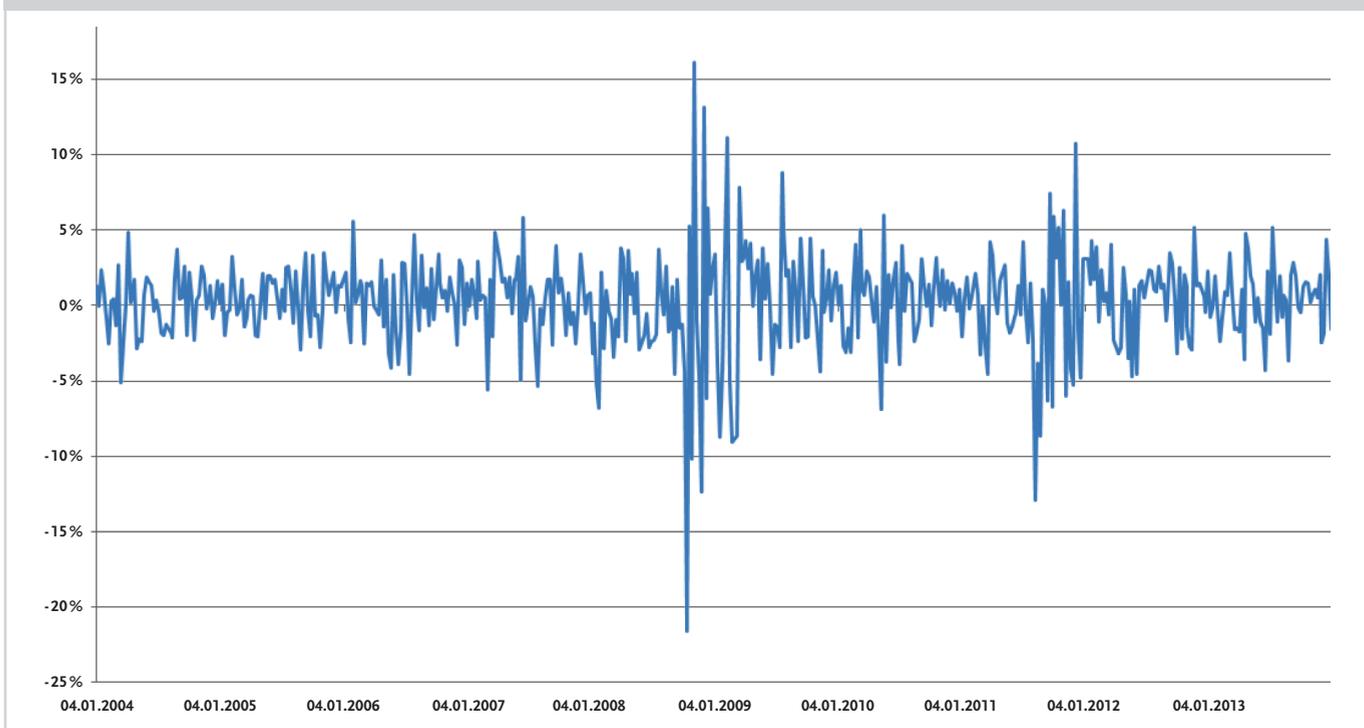
Nach diesem Amuse-Gueule zu Lévy-Prozessen werden sich nun die ersten Artikel unserer Serie mit einer generellen Einführung, verschiedenen Simulationsalgorithmen, der Parameterschätzung und möglichen Anwendungen (vor allem in der Finanzmathematik) beschäftigen. Dieser Artikel ist bewusst als Übersicht konzipiert und bleibt mathematisch nur an der Oberfläche. Wichtige Referenzen für an mathematischen Details interessierte Leser sind

die eher theoretischen Bücher von Bertoin, Sato und Applebaum [vgl. Bertoin 1996, Sato 1999 und Applebaum 2004] und die Publikationen mit einem Fokus auf finanzmathematischen Anwendungen [vgl. Cont/Tankov 2003 sowie Schoutens 2003].

Was ist nun ein Lévy-Prozess?

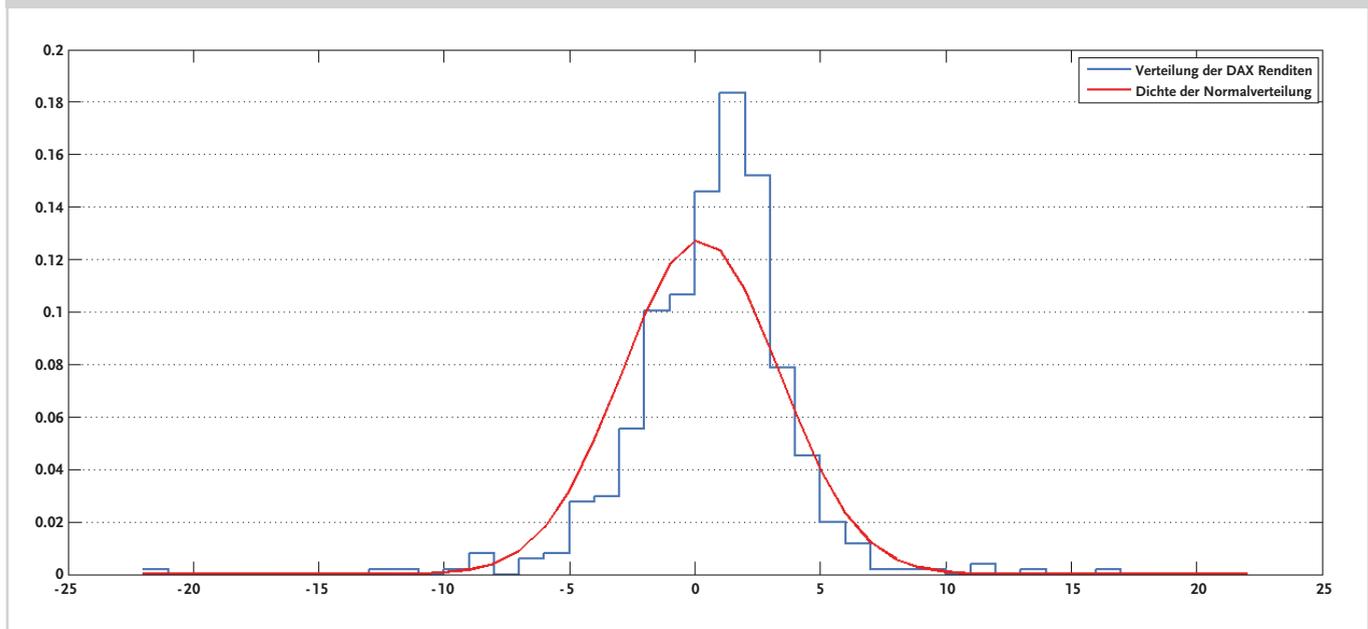
Einen sehr anschaulichen Zugang zu Lévy-Prozessen erhält man über einen Vergleich mit zeit-diskreten „Random Walks“. In dieser Klasse von Prozessen $X = X(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, werden die Zuwächse des Prozesses $X(n) - X(n-1)$ über diskrete Zeitschritte, auch Inkremente des Prozesses genannt, einerseits als unabhängig von der Vergangenheit angenommen und andererseits identisch verteilt modelliert. Die Verteilung der zufälligen zukünftigen Zuwächse über mehrere Perioden hängt damit nur von der Anzahl an durchschrittenen Perioden ab. Die Vergangenheit des Prozesses und der Ausgangszeitpunkt, ab welchem man ein Inkrement betrachtet, spielen keine Rolle. Ein einfaches Beispiel dafür ist, einen Prozess zur Zeit Null bei Null starten zu lassen und dann in jeder Periode eine faire Münze zu werfen. Entsprechend dem Ausgang des Münzwurfs wird dann ± 1 zum aktuellen Level des Prozesses addiert. Als Prozess erhält man dann ► **Gleichung 01**, wobei $\Delta X(n) =$

Wöchentliche DAX Renditen, Jan. 2004 bis Dez. 2013

 ► **Abb. 01**


Vergleich der empirischen Verteilung von wöchentlichen DAX-Renditen mit der Normalverteilung

► Abb. 02



► Gleichung 01

$$X(0) = 0, \quad X(n) = \sum_{j=1}^n \Delta X(j), \quad \Delta X(n) = X(n) - X(n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

$X(n) - X(n-1)$ entsprechend des Münzwurfs in Schritt n die Werte $+/-1$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annimmt.

Ein Lévy-Prozess kann nun als Verallgemeinerung dieser Idee in stetiger Zeit interpretiert werden. Die technische Schwierigkeit dabei ist, dass es in stetiger Zeit keine „kleinste Periode“ gibt, für die man die Basis-Verteilung der Inkremente definieren kann. Wir müssen somit, technisch gesprochen, den Schritt zu unendlich kleinen Perioden bewältigen und sinnvoll definieren.

Definition: Ein càdlàg stochastischer Prozess $L = \{L(t), t \geq 0\}$ wird Lévy-Prozess genannt, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(P1): Der Prozess hat, für nicht überlappende Zeitintervalle, stochastisch unabhängige Inkremente.

(P2): Der Prozess hat stationäre Inkremente, das heißt die Verteilung eines Inkrements hängt nur von der Länge des Zeitintervalls ab und nicht vom Startzeitpunkt des Inkrements.

(P3): Der Prozess ist stetig in Wahrscheinlichkeit, das heißt, für alle $t \geq 0, \epsilon > 0$ gilt

$$\lim_{s \rightarrow t} P(|L(t) - L(s)| > \epsilon) = 0.$$

Der Begriff càdlàg ist die französische Abkürzung für „continué à droite (avec limite à gauche“, was übersetzt Pfade die „rechtsseitig stetig sind mit existierenden linksseitigen Grenzwerten“ bedeutet:

$$\lim_{s \rightarrow t, s > t} L(s) = L(t), \quad L(t-) = \lim_{s \rightarrow t, s < t} L(s).$$

Oft wird zusätzlich gefordert, dass der Prozess bei Null startet, also $L(0) = 0$. Wie schon angedeutet erfüllt die Brown'sche Bewegung alle Axiome (P1) bis (P3) und ist somit in der Tat ein Lévy-Prozess. Zusätzlich werden bei der Brown'schen Bewegung die Axiome (P2) und (P3) verschärft. Man fordert bei (P2) speziell normalteilte Inkremente (mit Erwartungswert Null und einer Varianz, die der Länge des betrachteten Zeitintervalls entspricht) und bei (P3) werden sogar komplett stetige Pfade gefordert.

Interpretation der Definition

Starten wir mit (P1) und (P2), das heißt unabhängigen und stationären Zuwächsen. Diese Forderung bedeutet intuitiv, dass die Quelle des Zufalls keine zeitliche Abhängigkeit hat und zudem unabhängig

vom betrachteten Zeitpunkt ist, also insbesondere keine Saisonalitäten oder Eigenschaften wie eine stochastische Volatilität besitzt. Unabhängige Inkremente bedeuten auch, dass es für die Weiterentwicklung des Pfads irrelevant ist, wie der Prozess sein aktuelles Level erreicht hat. Stationäre Inkremente bedeuten in der Aktienkursmodellierung, dass wöchentliche Veränderungen immer derselben Verteilung folgen und, zusammen mit der Unabhängigkeit aus (P1), sich diese aus der Summe der unabhängigen Veränderungen der einzelnen Handelstage der betrachteten Woche ergeben.

Die Bedingung (P3) ist auf den ersten Blick verblüffend. Man ist geneigt zu glauben, dass diese Bedingung Sprünge generell ausschließt. Dies ist aber nicht der Fall. Ausgeschlossen sind nur Sprünge (mit positiver Wahrscheinlichkeit) zu einem fixen Zeitpunkt. Eine Konsequenz davon ist, dass die Sprungzeiten selbst Zufallsvariablen sein müssen. Für einen Sprung, beziehungsweise dessen Höhe, wird weiter als Bezeichnung eingeführt $\Delta L(t) = L(t) - L(t-), t \geq 0$, wobei $L(t-)$ den linksseitigen Grenzwert des Prozesses beschreibt.

Die Cumulant-Funktion

Verteilungen von Zufallsvariablen können bekanntlich auf unterschiedlichste Weise beschrieben werden. Man denke nur an Dichten, Verteilungsfunktionen, charakteristische Funktionen etc. In unserem Fall, also der Beschreibung der Verteilung von stochastischen Prozessen, ist das in vielen Fällen ähnlich. Eine in diesem Kontext besonders elegante Möglichkeit ist die der Cumulant-Funktion (eine andere Bezeichnung ist Lévy-Exponent oder charakteristischer Exponent), die für einen stochastischen Prozess definiert ist gemäß **► Gleichung 02**.

Eine bemerkenswerte Beobachtung im Kontext von Lévy-Prozessen ist, dass (aufgrund der unabhängigen und stationären Zuwächse) die Verteilung eines Lévy-Prozesses schon vollständig durch die Verteilung des Prozesses nach einer Zeiteinheit festgelegt ist. Damit reicht zur Abgrenzung unterschiedlicher Lévy-Prozesse deren Einteilung gemäß der Verteilung von $L(1)$. Wir bemerken weiter, dass der Erwartungswert des Lévy-Prozesses linear in t ansteigt, das heißt $E[L(t)] = tE[L(1)]$, auch hier spielt die Verteilung von $L(1)$ eine zentrale Rolle. Für einen Lévy-Prozess hat die Cumulant-Funktion eine besonders angenehme Gestalt, sie wächst linear im Zeitargument t mit Rate entsprechend der Cumulant-Funktion des Prozesses nach einer Zeiteinheit, also gemäß **► Gleichung 03**.

Die Cumulant-Funktion bietet uns verschiedenste Anwendungsmöglichkeiten. Zum einen können relativ einfach die Momente des Prozesses $m_n(L(t))$ zu einem zukünftigen Zeitpunkt t von ihr abgelesen werden (vgl. **► Gleichung 04**), unter der Voraussetzung, dass die Momente existieren.

Zum anderen sind für viele Lévy-Prozesse die Wahrscheinlichkeitsverteilungen (beziehungsweise Dichten) des Prozesses an einem zukünftigen Zeitpunkt nicht in geschlossener Form bekannt, können aber über numerische Verfahren aus den Cumulant-Funktionen zurückgewonnen werden [vgl. hierzu Bernhart et al. 2014]. Ähnliches gilt auch für Preise von wichtigen Optionen, wenn als Aktienkursmodell ein exponentieller Lévy-Prozess eingesetzt wird. Darauf gehen wir in einem späteren Kapitel noch genauer ein. Schließlich gibt es spezielle Verfahren für äquivalente Maßwechsel, die mit dieser Funktion arbeiten. Auch verschiedene statistische Eigenschaf-

$$K_{L(t)}(u) = \log(E[\exp\{iuL(t)\}]), \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

$$K_{L(t)}(u) = t \log(E[\exp\{iuL(1)\}]) = tK_{L(1)}(u).$$

$$m_n(L(t)) = \frac{1}{i^n} \frac{\partial^n K_{L(t)}(0)}{\partial u^n}, \quad t \geq 0, \quad n \geq 1,$$

ten können davon abgelesen werden. In vielerlei Hinsicht ist es daher berechtigt zu sagen, dass die Cumulant-Funktion eine natürliche und sehr angenehme Größe ist, um mit parametrischen Familien von Lévy-Prozessen umzugehen. Wir werden bei den folgenden Beispielen daher auch jeweils diese Funktion als (eine) charakterisierende Größe angeben.

Beispiele für Lévy-Prozesse

Gerade beziehungsweise linearer Drift

Der einfachste Lévy-Prozess ist eine simple Gerade, das heißt $L(t) = at$, $L(1) = a$, $a \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.

Eine Gerade ist, zugegeben, ein etwas spezieller stochastischer Prozess, da seine Zuwächse ja deterministisch sind. Aber damit erfüllen die Inkremente die Definition (P1) von stochastisch unabhängig automatisch, und sie sind weiter stationär – das Inkrement einer Gerade ist ja gerade proportional zur Länge des Zeitschritts. Weiter ist eine Gerade stetig, also wird auch (P3) erfüllt. Andere deterministische Funktionen erfüllen aber offensichtlich (P2) nicht, daher sind Geraden die einzigen deterministischen Lévy-Prozesse. Aus dieser Sichtweise ist es angebracht, Lévy-Prozesse als stochastische Erweiterungen von Geraden zu sehen.

Brown'sche Bewegung

Bei einer Brown'schen Bewegung $W = W(t)$, $t \geq 0$, wird die Forderung (P3) zu pfadweiser Stetigkeit verschärft. Für die stationäre Verteilung in (P2) wird weiter eine Normalverteilung angenommen, man

hat also

$L(t) = W(t)$, $W(1) \sim \text{Normalverteilt}(0,1)$.

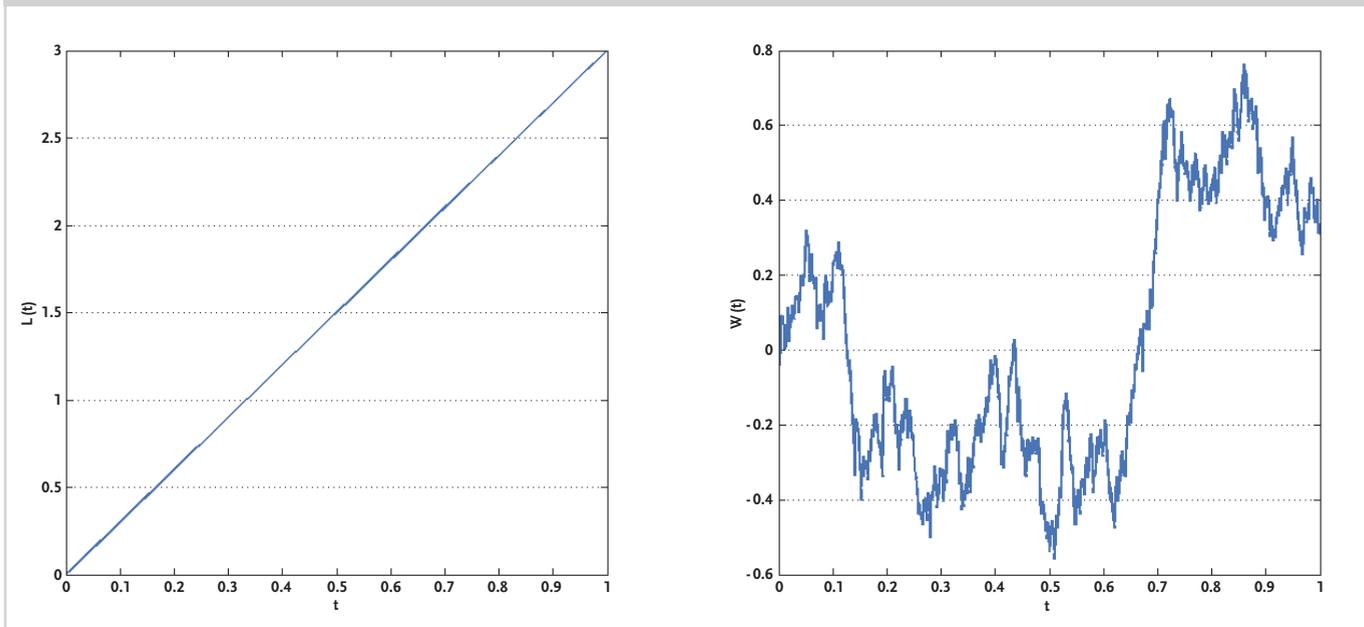
Oft multipliziert man die Brown'sche Bewegung mit einem Vorfaktor σ , genannt Volatilität, man betrachtet also $\sigma W(t)$, $t \geq 0$, was die normalverteilten Inkremente bzgl. ihrer Varianz entsprechend ändert. Es lässt sich zeigen, dass die Brown'sche Bewegung tatsächlich der einzige zufällige Lévy-Prozess ohne Sprünge ist. Damit haben wir mit der Geraden und der Brown'schen Bewegung schon alle Lévy-Prozesse ohne Sprünge beisammen. Auch können wir nun schon das bekannte Black-Scholes-Aktienkursmodell formulieren, welches gegeben ist als das Exponential einer Brown'schen Bewegung mit Drift, genaue $S(t) = S(0)\exp(at + \sigma W(t))$. $S(0)$ bezeichnet dabei den Startwert der modellierten Aktie, a die Driftrate, und σ wird wie oben als Volatilität bezeichnet. Prozesse dieser Gestalt nennt man auch Geometrische Brown'sche Bewegungen.

Über die Brown'sche Bewegung existiert eine große Bandbreite an Literatur. Die mathematisch angenehme Normalverteilungsannahme und die stetigen Pfade machen es möglich, sehr viele Kenngrößen der Brown'schen Bewegung explizit zu berechnen. Unter anderem ist die Brown'sche Bewegung zum Zeitpunkt t normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz t . Die Cumulant-Funktion der Brown'schen Bewegung ist gegeben durch **► Gleichung 05**.

Betrachtet man das Schaubild einer Realisierung (darunter versteht man einen zufälligen Pfad) der Brown'schen Bewegung (vgl. **► Abb. 03**, rechts), so fällt sofort die „Rauheit“ des Pfades auf. Diese Rauheit ist in der Tat bemerkens-

Eine Gerade mit Steigung $\alpha = 3$ (links) und ein Pfad einer Brown'schen Bewegung (rechts)

► Abb. 03



wert. So ist die Brown'sche Bewegung zwar pfadweise stetig, differenzierbar ist ihr Pfad aber an keiner einzigen Stelle. Dies hat für die Modellierung von Aktienkursen eine interessante Auswirkung: Könnte man nämlich den Pfad differenzieren, so wären über die Tangentensteigung Prognosen in die (zumindest kurzfristige) Zukunft möglich. Diese Tangente ist bei einer Brown'schen Bewegung aber nicht berechenbar beziehungsweise definiert, somit kann für das kommende Zeitintervall keine verlässliche Prognose bezüglich Gewinn/Verlust erstellt werden. Wichtig für verschiedene Anwendungen in der Finanzmathematik ist zudem, dass auch die Verteilung des laufenden Maximums/Minimums der Brown'schen Bewegung geschlossen bekannt ist, was beispielsweise für die Bewertung von Optionen mit Barrieren und für strukturelle Kreditrisikomodelle nützlich ist.

Poisson-Prozess

Ein Poisson-Prozess $N = N(t), t \geq 0$, wird zum Zählen von zufällig eintreffenden Ereignissen benutzt. Er startet zum Zeitpunkt Null bei Null und springt an zufälligen Zeiten um jeweils eine Einheit nach oben. Damit gibt der Prozess zu jedem Zeitpunkt an, wie viele Ereignisse schon (bis zu diesem Zeitpunkt) beobachtet wurden. Die Wartezeiten zwischen den Sprüngen sind dabei unabhängig und Exponen-

► Gleichung 05

$$K_{W(t)}(u) = -\frac{1}{2}u^2t, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

► Gleichung 06

$$K_{N(t)}(u) = \alpha(e^{iu} - 1), \quad u \geq 0, \quad t \geq 0.$$

tialverteilt. Der Name Poisson-Prozess leitet sich von der Verteilung der zufälligen Anzahl an Ereignissen in einer Zeiteinheit ab. Diese ist gerade $N(t) \sim \text{Poisson}(\alpha t)$, $\alpha > 0$.

Der Parameter α der Poisson-Verteilung wird (Sprung-)Intensität genannt. Im Mittel beobachten wir $\alpha = E[N(1)]$ viele Sprünge pro Zeitdauer Eins. Somit ist ein Poisson-Prozess ein nicht-negativer Lévy-Prozess mit unabhängigen und Poissonverteilten Zuwächsen. ► Abb. 04 (links) visualisiert eine Realisierung des Prozesses. Wir beobachten, dass die Sprungzeiten tatsächlich zufällig sind. Anwendungen hat dieser Prozess unter anderem in der Schadenversicherungsmathematik bei der Modellierung der zufälligen Anzahl an Schadensereignissen. In der Aktienmodellierung wird er benutzt, um die zufällige Anzahl an Sprüngen in einem Aktienpfad zu beschreiben. Die Cumulant-Funktion eines Poisson-Prozesses ist gegeben durch ► Gleichung 06.

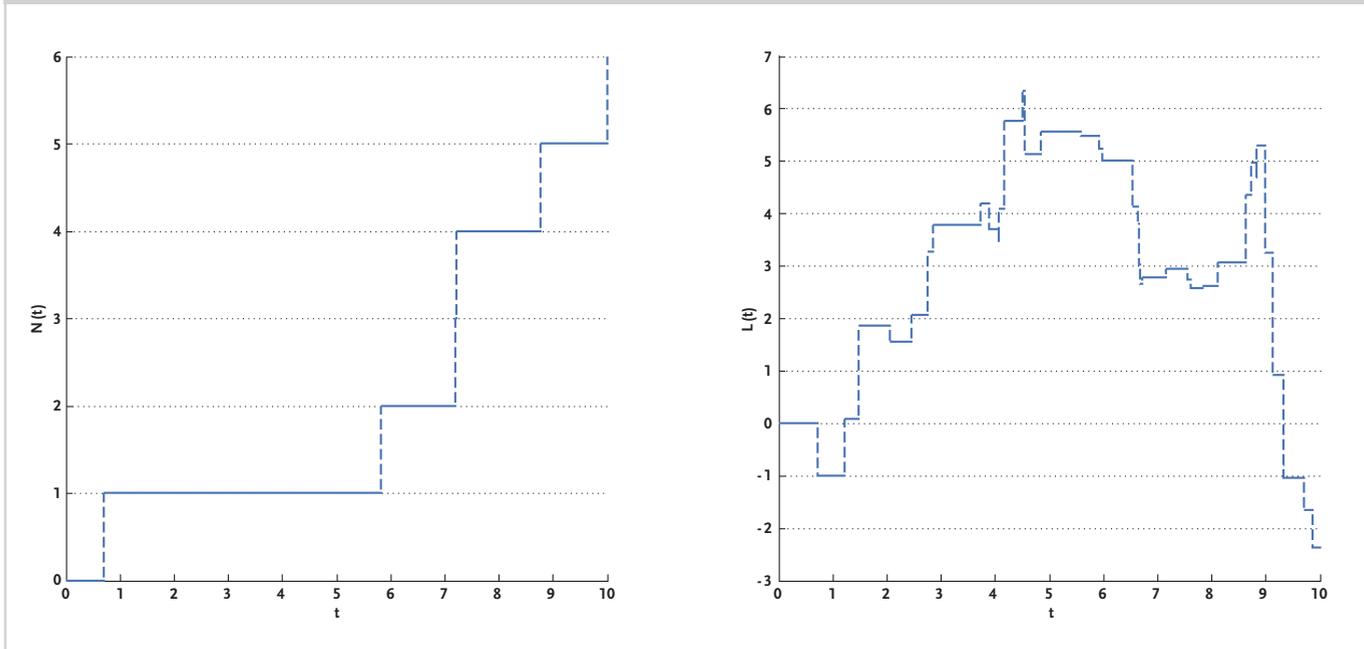
Compound-Poisson-Prozess

Diese Klasse an Prozessen ist eine sehr intuitive Erweiterung eines Poisson-Prozesses, welcher auch in die Konstruktion eingeht. Starten wir also mit einem Poisson-Prozess $N = N(t), t \geq 0$, welcher uns via seiner Sprungzeiten $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N(t)}$ das Eintreffen von zufälligen Ereignissen beschreibt. Nun soll aber unabhängig davon an jedem dieser Zeitpunkte ein weiteres Zufallsexperiment durchgeführt werden. Die Interpretation könnte eine zufällige Schadenshöhe im Versicherungsfall oder die Sprunghöhe beim Sprung eines Aktienkurses sein. Diese Sprunghöhen werden als unabhängig und identisch verteilt angenommen und mit $Y(j), j = 1, 2, \dots$ bezeichnet. In einem Compound-Poisson-Prozess werden diese Sprunghöhen addiert. Formal definiert ist der Compound-Poisson-Prozess gemäß ► Gleichung 07.

► Abb. 04 (rechts) zeigt eine mögliche Realisierung eines Pfades des Prozesses.

Ein Poisson-Prozess mit Intensität $\alpha = 8$ (links) und ein Compound-Poisson-Prozess mit Intensität $\alpha = 50$ und Sprunghöhen die Standardnormalverteilt sind (rechts)

► Abb. 04



Wir beobachten, dass wieder die Sprungzeiten zufällig sind, dieses Mal aber zusätzlich auch die Sprunghöhen. Die Cumulantfunktion eines Compound-Poisson-Prozesses ist gegeben durch ► **Gleichung 08**, wobei f_Y die Dichte der Sprunghöhenverteilung beschreibt.

In den meisten Anwendungen wird eine moderate Sprungintensität gewählt – entsprechend der Interpretation des Poisson-Prozesses als Zählprozess seltener Ereignisse. Mathematisch gesprochen erwartet man pro Zeiteinheit nur eine endliche Anzahl an Sprüngen. Diese Eigenschaft wird auch endliche Aktivität genannt. Damit haben wir auch schon eine Überleitung zum nächsten Beispiel, welches sich durch sehr viele – aber dafür sehr kleine – Sprünge auszeichnet.

Gamma-Prozess

Ein Gamma-Prozess $L = L(t), t \geq 0$ ist ein nicht-negativer (und nicht-fallender) Lévy-Prozess, bei welchem die Inkremente einer Gamma-Verteilung folgen. Es gilt also $L(1) \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$.

Von einer Gamma-Verteilung kennen wir selbstverständlich auch die Dichte, diese ist in ► **Gleichung 09** wiedergegeben.

Die Parameter können auch hier recht gut interpretiert werden. 2β kann als Freiheitsgrad gelesen werden, der die Schiefe

► Gleichung 07

$$L(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} Y(j), \quad L(0) = 0, \quad t \geq 0.$$

► Gleichung 08

$$K_{L(t)}(u) = t\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1) f_Y(dx), \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

► Gleichung 09

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x \in (0, \infty).$$

► Gleichung 10

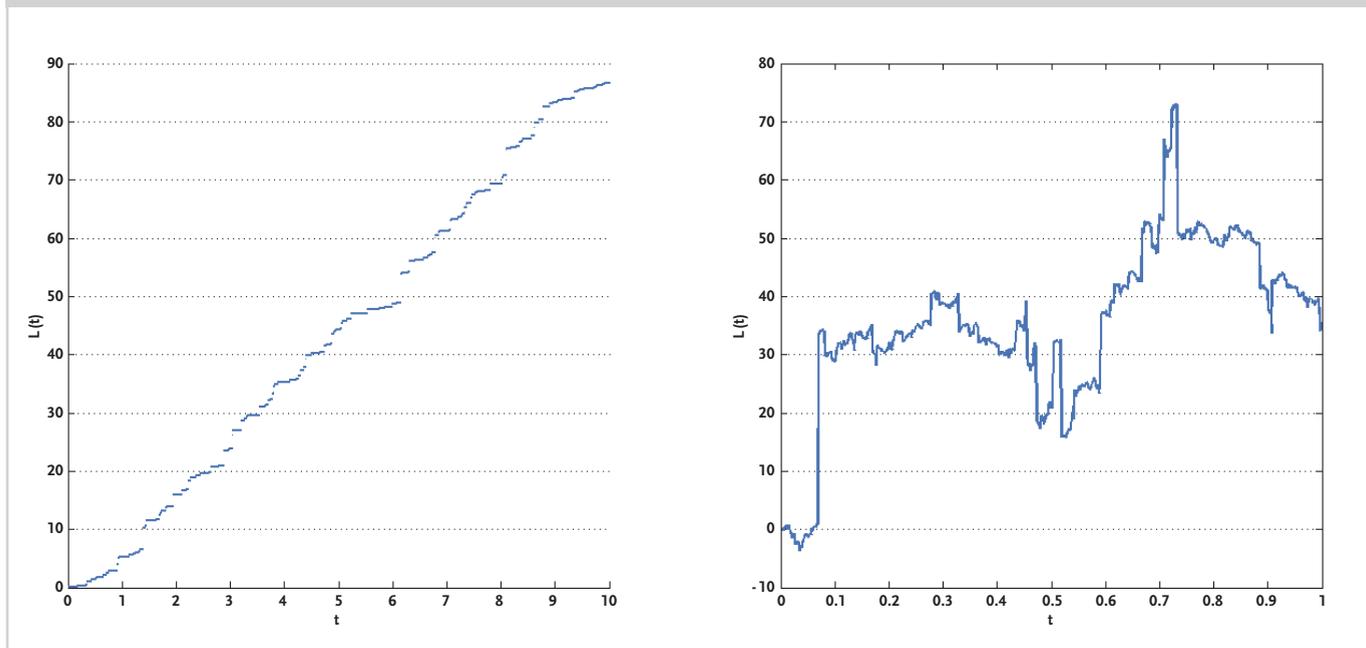
$$K_{L(t)}(u) = t\alpha \log\left(1 + \frac{u}{\beta}\right), \quad u \geq 0, \quad t \geq 0.$$

beeinflusst, α dagegen ist ein Skalierungsparameter. Da die Gamma-Verteilung, und damit die hier vorliegenden Inkremente, nur positive Werte annimmt, sind die Pfade des Gamma-Prozesses nicht-fallend, siehe ► **Abb. 05**. Eine Besonderheit ist, dass der Gamma-Prozess ein Prozess von unendlicher Aktivität ist,

das heißt in jedem Zeitintervall unendlich viele Sprünge erwartet werden. Dieses Anwachsen mittels vieler kleiner Sprünge ist eine strukturell andere Situation als beim Poisson-Prozess. Da der Gamma-Prozess nicht-fallend ist, kommt er in seiner „Urform“ nicht als Aktienkursmodell in Frage. Möglich ist aber ein Modell,

Ein Gamma-Prozess mit Parametern $\alpha = 2$, $\beta = 4.725$ (links) und ein NIG-Prozess mit Parametern $\delta = 1$, $\alpha = 80$, $\beta = 0$ (rechts)

► Abb. 05



► Gleichung 11

$$f(x) = a(\alpha, \beta, \mu, \delta) q\left(\frac{x - \mu}{\delta}\right)^{-1} K_1\left\{\delta \alpha q\left(\frac{x - \mu}{\delta}\right)\right\} \exp\{\beta(x - \mu)\},$$

wobei $q(x) = \sqrt{1 + x^2}$, $K_1(\cdot)$ die modifizierte Besselfunktion dritter Art bezeichnet und

$$a(\alpha, \beta, \mu, \delta) = \pi^{-1} \alpha \exp\left\{\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \beta \mu\right\}.$$

► Gleichung 12

$$K_{L(t)}(u) = t \delta \left\{ \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + u)^2} \right\} + \mu u t, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

das als Differenz zweier Gamma-Prozesse konstruiert wird, es werden quasi Gewinne und Verluste von jeweils einem Gamma-Prozess beschrieben. Gerne wird der Gamma-Prozess auch als stochastische Zeittransformation benutzt, hierbei wird die übliche Kalenderzeit durch einen nicht-fallenden stochastischen Prozess (interpretiert als Geschäftszeit, die je nach Marktaktivität zufällig schnell voranschreitet) ersetzt. Die Cumulant-Funktion eines Gamma-Prozesses berechnet sich zu ► **Gleichung 10.**

Normal-Inverse-Gauss-Prozess (NIG)

Ein NIG-Prozess $L = L(t), t \geq 0$ ist ein Lévy-Prozess, dessen Inkremente eine NIG-Verteilung besitzen, also $L(1) \sim NIG(\alpha, \beta, \mu, \delta)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \infty)$, $|\beta| < \alpha$.

Von dieser Verteilung ist die Dichte bekannt, auch wenn diese eine etwas kompliziertere Gestalt hat. Sie ist gegeben durch

► **Gleichung 11.**

Diese speziellen Funktionen sind aber in allen Statistik-Software-Paketen vorimplementiert, müssen uns also nicht weiter Angst einjagen. Die Parameter können wieder interpretiert werden: α steuert die Wahrscheinlichkeitsmasse in den Rändern der Verteilung, δ skaliert die Verteilung, als Lagemaß dient μ und β kontrolliert die Schiefe. Auch der NIG-Prozess verändert sich durch unendlich viele Sprünge pro Zeitintervall, gehört also auch zur Klasse der unendlich aktiven Lévy-Prozesse, siehe

► **Abb. 05.** Die Cumulant-Funktion hat, im Gegensatz zur Dichte, eine angenehm einfache Form, sie ist gegeben durch ► **Gleichung 12.**

Eine zentrale Referenz zu dieser Klasse liefert Barndorff-Nielsen [vgl. Barndorff-Nielsen 1998].

Sprung-Diffusion

Neben den obigen Beispielen ist es sehr nützlich zu wissen, dass auch Summen von unabhängigen Lévy-Prozessen wieder Lévy-Prozesse sind. Das heißt für uns, dass wir uns aus den oben genannten Grundbausteinen leicht weitere Lévy-Prozesse konstruieren können. So besteht ein beliebtes Modell für die Modellierung von log-Aktienkursen aus einer Summe eines linearen Trends, einer Brown'schen Bewegung sowie einem Compound-Poisson-Prozess [siehe Merton 1976, Kou 2002]. Man erhält also eine Erweiterung des Black-Scholes-Modells, die auch Sprünge

zulässt. Solche Modelle werden auch als Sprung-Diffusionen bezeichnet. Ausformuliert ist eine Sprung-Diffusion somit ein Prozess gemäß der Darstellung in ► **Gleichung 13**, wobei $a \in \mathbb{R}$ den linearen Drift beschreibt, $\sigma > 0$ die Diffusion der Brown'schen Bewegung W , N ein Poisson-Prozess ist mit Intensität $\alpha > 0$, $E[N(t)] = at$, und schließlich $Y(j), j = 1, 2, \dots$ die Sequenz der unabhängigen und identisch verteilten Sprünge repräsentiert, welche Dichte f_Y besitzen und $E[Y(j)] = \kappa < \infty$.

Der Ausdruck $t\alpha\kappa$ beschreibt dann die erwartete Steigung durch Sprünge, also $E[\sum_{j=1}^{N(t)} Y(j)]$, um welchen wir den Prozess bereinigen. Alle hierin auftretenden stochastischen Objekte sind als unabhängig angenommen. Als Modell für Aktienkurse wird dann $S(t) = S(0)\exp(L(t)), t \geq 0$ betrachtet. Die Sprunghöhen können hierin beispielsweise als normalverteilt oder zweiseitig-exponentialverteilt (das heißt exponentialverteilte Sprünge in beide Richtungen sind zugelassen) angenommen werden. Die Cumulant-Funktion dieser Summe setzt sich aus den Cumulant-Funktionen der Summanden zusammen, welche wir oben schon angegeben haben. Hieraus resultiert ► **Gleichung 14**.

Da die drei Grundbausteine (Drift, Diffusion, Sprünge) unabhängig sind, faktorisiert sich dieser Ausdruck, und wir erhalten ► **Gleichung 15**.

Dieser Ausdruck charakterisiert wieder die Verteilung des Lévy-Prozesses. Es stellt einen wichtigen Spezialfall der berühmten Lévy-Khintchine-Formel dar, welche wir in einem der folgenden Artikel ausführlicher diskutieren.

Fazit und Ausblick

Nach einer einleitenden Motivation gaben wir die Definition eines Lévy-Prozesses an. Diese wurde diskutiert, speziell im Hinblick auf die Modellierung von Aktienkursen, und die Cumulant-Funktion wurde als wichtige Kenngröße eines Lévy-Prozesses eingeführt. Danach präsentierten wir einige parametrische Beispiele und visualisierten diese mittels simulierter Pfade. In den nächsten Artikeln werden wir unter anderem die wichtige Lévy-Khintchine-Formel kennenlernen, und wir gehen tiefer auf statistische Eigenschaften von Lévy-Prozessen ein.

Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise:

Applebaum, D. (2004): *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1998): *Processes of Normal Inverse Gaussian type*. *Finance and Stochastics*, 2(1), pp. 41–68.

Bernhart, G./Mai, J.-F./Schenk, S./Scherer, M. (2014): *The density of distributions from the Bondesson class*. Forthcoming in *Journal of Computational Finance*.

Bertoin, J. (1996): *Lévy processes*. Cambridge University Press.

Black, F./Scholes, M. (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*. *The Journal of Political Economy*, 81(3), pp. 637–654.

Cont, R./Tankov, P. (2003): *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman and Hall/CRC Press.

Kou, S.G. (2002): *A jump-diffusion model for option pricing*. *Management Science* 48, pp. 1086–1101.

Markowitz, H. (1952): *Portfolio Selection*. *The Journal of Finance*, 7(1), pp. 77–91.

Merton, R. (1976): *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*. *J. Financial Economics*, 3, pp. 125–144.

Sato, K. (1999): *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.

Schoutens, W. (2003): *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Wiley.

Autoren:

Dr. Asma Khedher und **Prof. Dr. Matthias Scherer** sind Wissenschaftler am Lehrstuhl für Finanzmathematik der Technischen Universität München. Sie sind Autoren zahlreicher Fachpublikationen in den Gebieten Finanz- und Versicherungsmathematik, Risikomanagement und Stochastik.

Wir bedanken uns herzlich bei der KPMG AG für das Sponsoring des KPMG Center of Excellence in Risk Management an der Technischen Universität München, über welches die Stelle von Asma Khedher teilfinanziert wird.

► Gleichung 13

$$L(t) = at + \sigma W(t) + \sum_{j=1}^{N(t)} Y(j) - t\alpha\kappa, \quad t \geq 0,$$

► Gleichung 14

$$K_{L(t)}(u) = iuat + \log E \left[\exp(iu\sigma W(t)) \exp \left(iu \sum_{j=1}^{N(t)} Y(j) - iut\alpha\kappa \right) \right], \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

► Gleichung 15

$$\begin{aligned} K_{L(t)}(u) &= iuat + \log E[\exp(iu\sigma W(t))] + \log E \left[\exp \left(iu \sum_{j=1}^{N(t)} Y(j) - iut\alpha\kappa \right) \right] \\ &= iuat - \frac{1}{2} \sigma^2 u^2 t + t\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1 - iux) f_Y(dx), \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

► Info-Box 01

Wissenschaft UMgesetzt

Die schiere Flut an Fachpublikationen zur facettenreichen Praxis des modernen Risikomanagements stellt eine große Chance – aber gleichermaßen Herausforderung – für aktive Risikomanager dar. Nicht zu übersehen ist dabei die zunehmende Komplexität der eingesetzten mathematischen Hilfsmittel. Um diesem Innovationsdruck gerecht zu werden, ist eine ständige Weiterbildung notwendig – doch diese ist zeit- und kostenintensiv. Zudem erfordert das Lesen mathematischer Fachpublikationen oft (zu) großes Vorwissen, um eine breite Öffentlichkeit zu erreichen. Da auch nicht jede, zunächst hochgepreisene, Innovation den „Test der Zeit“ überlebt, ist eine gewisse Skepsis und Zurückhaltung gegenüber neuen Methoden in vielen Fällen auch gerechtfertigt. Aus dem Blickwinkel einer Universität betrachtet dauert es dagegen oft frustrierend lang, bis „aus akademischer Sicht längst überholte Systeme“ durch „zeitgemäße Methoden“ ersetzt werden. Aktuelle Beispiele liefert die Diskussion um adäquate Kreditrisikomodelle, Risikomaße und Aktienkursmodelle genug. Häufig wird Wissen über neue Methoden tatsächlich nur durch deren Entwickler (nach Berufsstart) in die Praxis übertragen und bleibt so einem Unternehmen zunächst exklusiv vorbehalten. Diese Hürden möchten wir in den nächsten Ausgaben des Risikomanagers verkleinern. Unser Ziel ist es, eine Artikelserie für die kommenden Ausgaben des Risikomanagers zu gestalten, in welcher wir verständlich – aber

dennoch mathematisch präzise – Methoden und Modelle vorstellen, welche wir für die Praxis des Risikomanagements für interessant halten. Darin werden Modelle aus Stochastik und Statistik ebenso eine Rolle spielen wie numerische Methoden. Ausnutzen werden wir dabei, dass wir durch unsere tägliche wissenschaftliche Arbeit sowie unsere vielfältige Zusammenarbeit mit der Praxis einen guten Einblick in beide – leider häufig noch getrennte – Welten haben. Zu manchen Themenkomplexen planen wir eine ganze Serie an aufbauenden Artikeln, sodass gegebenenfalls der Einstieg für manchen Leser schon „kalter Kaffee“ ist, für andere Leser aber unumgänglich, um das Ende des Themenkomplexes zu verstehen. Keinesfalls ersetzen wollen (und können) wir die originalen Forschungsarbeiten und Lehrbücher zu den entsprechenden Themen.

Wir möchten Ihnen vielmehr einen Wegweiser durch die Vielzahl an Literatur geben und Sie zum Studium gezielter weiterführender Artikel animieren. Auch ist uns wichtig zu betonen, dass wir keinesfalls nur Eigenentwicklungen vorstellen, dies würde einen zu engen Rahmen setzen. Vorstellen möchten wir Ihnen vielmehr Methoden, die wir erfolgreich, beispielsweise in Forschungsarbeiten oder Masterarbeiten mit Praxispartnern, eingesetzt haben und von welchen wir so überzeugt sind, dass wir diese einem breiteren Publikum präsentieren möchten – also Ihnen. Freuen würden wir uns auch über Feedback und Vorschläge für Themen, die Sie interessieren.

Anzeige

FACHTAGUNG 2014

R RISIKO MANAGER

24. bis 25. September 2014

Exklusivpartner



THE
POWER
TO KNOW.

Premiumpartner



BOSCH
Technik fürs Leben



Rating Service Unit

Basispartner

MOODY'S
ANALYTICS

Infos und Anmeldung unter www.risiko-manager-fachtagung.com