

RISIKO MANAGER

7-2008

- ▶ KREDITRISIKO
- ▶ MARKTRISIKO
- ▶ OPRISK
- ▶ ERM

Mittwoch, 2.4.2008

WWW.RISIKO-MANAGER.COM

Inhalt

KREDITRISIKO

- 1, 8 Bewertung von synthetischen und Cash CDO in der Praxis

MARKTRISIKO

- 20 Das Vanna-Volga-Modell zur Konstruktion implizierter Volatilitäten

Rubriken

- 2 Kurz & Bündig
- 21 Ticker
- 25 Impressum
- 26 Köpfe der Risk-Community
- 27 Buchbesprechung
- 28 Produkte & Unternehmen
- 29 Personalien

Anzeige

SubPrime-Krise

Bewertung von synthetischen und Cash CDO in der Praxis

Vor dem Hintergrund der aktuellen SubPrime-Krise diskutiert dieser Artikel sowohl die Bewertung von Unfunded- als auch Cash CDOs. Während die Literatur die Bewertung der ersten Produktgruppe ausgiebig behandelt, findet sich zum Thema Cash CDOs relativ wenig, obwohl insbesondere diese Produkte, bedingt durch ihre komplexen Waterfall-Strukturen, ein erhöhtes KnowHow erfordern. Verstärkt wird dies durch die Tatsache, dass Cash CDOs in deren Collateral Pool sich Anleihen mit SubPrime-Exposure befinden, durch die Kreditkrise vermehrt in das Bewusstsein der Anleger und Aufsichtsbehörden gerückt wurden.

Die SubPrime-Krise entstand zum Einen durch die expansive Geldpolitik in den USA (im Sommer 2003 stand der US-Leitzins bei etwa einem Prozent), welche Geld billig verfügbar machte, dass nach Renditemöglichkeiten suchte, und zum Anderen durch die Möglichkeit, vergebene Kredite mittels strukturierter Anleihen weiterverkaufen zu können. Diese beiden Faktoren trugen dazu bei, dass bei

der Kreditvergabe immer weniger auf die Bonität der Kunden geachtet wurde.

Es trat damit sowohl Moral Hazard auf, als auch Adverse Selection, weil aufgrund der hohen Nachfrage, die Emittenten es sich leisten konnten, immer kleiner werdende Anteile des First-Loss-Pieces bei sich zu behalten [vgl. Schweimayer 2003]. Diese

Fortsetzung auf Seite 8

RISK08

 24. APRIL 2008
KÖNIGSTEIN/TAUNUS

**DAS
GIPFELTREFFEN DER
RISIKOMANAGER**
www.sas.de/risk08

 THE
POWER
TO KNOW.

Fortsetzung von Seite 1

Hypothekenkredite an Schuldner niederer Bonität beginnen in den USA mit einem niederen fixen Zins, in dem ein nur geringer oder gar kein Tilgungsanteil (interest only) vorhanden ist, und der nach einigen Jahren auf ein variables, wesentlich höheres und für die Bonität des Schuldners kritisches, Niveau ansteigt (Adjustable-Rate Mortgages, ARM). Eine noch extremere Art dieser Kredite sind Option Adjustable-Rate Mortgages (OARM), die zu Anfang nicht einmal den kompletten Zins zahlen, und den Kreditbetrag erhöhen, bis eine vorher vertraglich vereinbarte Schwelle erreicht ist. Ab diesem Zeitpunkt sind dann sowohl Zins als auch Tilgungszahlungen zu leisten, was oft zu einer Verdopplung der monatlichen Raten und mit hoher Wahrscheinlichkeit zum Ausfall führt.

In Zeiten steigender US-Hauspreise und niederer Zinsen stellte dies kein großes Problem dar, da man entsprechend höher beleihen oder zum gestiegenen Preis wieder verkaufen konnte. Als jedoch die Hauspreise zuerst stagnierten und danach anfangen zu sinken, und zusätzlich der Leitzins von 2004 bis Mitte 2007 von 1 Prozent auf circa 5 Prozent anstieg, begann eine Abwärtsspirale aus steigenden Insolvenzen, Hausverkäufen und sinkenden Preisen. Da diese Kredite sich verbrieft in Cash CDOs und Asset Backed Commercial Papers (ABCP) wiederfanden und aufgrund von Informationsasymmetrien die Investoren die Zusammensetzung der zugrundeliegenden Assets nur unzureichend einschätzen konnten, wurde der gesamte Markt der Kreditstrukturen in Mitleidenchaft gezogen.

Es entstand ein Lemon-Problem, und die Liquidität an diesem Markt wurde zerstört. Bei den Emittenten von ABCP äußert sich die Aversion der Investoren besonders stark, da sich kurzfristig keine Abnehmer mehr finden, oder nur zu extrem gestiegenen Refinanzierungskosten. Damit fällt die Kapitalversorgung für die dahinter stehenden langfristigen Investments weg, die mit hohen Verlusten liquidiert werden müssen. Für die Zukunft besteht zusätzlich die, wenn auch unwahrscheinliche, Gefahr, dass die SubPrime-Krise auf den wesentlich bedeutenderen Markt für Credit Default Swaps übergreifen könnte, wenn einer der Hauptakteure eine wesentliche Herabstufung seines Rating hinnehmen müsste.

Bevor wir zu den quantitativen Aspekten von CDOs kommen, sollen einige der verwendeten Begriffe erläutert werden. Ein NtD ist ein N-th To Default Swap mit zwei Payment Legs. Der Default Leg zahlt dem Sicherungsnehmer den Loss beim n-ten Ausfall im zugrundeliegenden Portfolio aus Referenzobligationen, und der Premium Leg zahlt dem Sicherungsgeber eine quartalsweise Prämie, den sogenannten Credit Spread. Die Höhe der Ausgleichszahlung ergibt sich aus dem Loss Given Default (LGD) des betroffenen Underlyings. Ein Cash CDO ist eine Collateralized Debt Obligation, die einen Korb von Bonds (CBO) oder Unternehmenskrediten (CLO) als Referenz hat. Es wird zwischen statischen und gemanagten Collateral Pools unterschieden.

Ein synthetischer CDO bezieht sich nicht auf physikalisch vorhandene Bonds oder Loans, sondern auf ein Portfolio von Single Name Credit Default Swaps (CDS), beispielsweise standardisiert durch den iTRAXX Index europäischer Unternehmen. Während Cash CDOs in der Regel Funded sind, d. h. der Sicherungsgeber erwirbt eine Anleihe, bei der er zu Beginn den Nominal zahlt, welcher sich dann durch eventuelle zukünftige Verluste reduziert, sind synthetische CDOs gewöhnlich Unfunded, was bedeutet, dass es keine Anfangszahlung gibt, da sie Ausfälle direkt durch eine Ausgleichszahlung kompensieren und im Gegenzug eine quartalsweise Prämie zahlen. Ein Single Tranche CDO ist Unfunded und beschränkt die möglichen Ausfälle auf das Intervall $[a\%, b\%]$. Der Teil unterhalb der Unterschranke $a\%$ wird als Subordination bezeichnet und stellt das wichtigste Credit Enhancement dar, das einem Verlustpuffer entspricht. Dieses Feature haben Cash CDOs und synthetische Unfunded CDOs gemeinsam. Für synthetische CDO ist dies das einzige Credit Enhancement und sie sind deshalb mit analytisch geschlossenen Formeln mathematisch beschreibbar. Cash CDOs hingegen, verfügen darüber hinaus über den Excess Spread und Trigger-Größen, die zusätzliche Schutzmechanismen in Gang setzen, und welche einen Simulations- oder Szenario-Ansatz erforderlich machen.

Bei der Modellierung von Cash CDOs sind oft noch weitere strukturelle Feinheiten zu beachten, wenn eine exakte Darstellung gewünscht wird. Diese sind in der bis zu 300 Seiten umfassenden Ver-

tragsdokumentation enthalten und dort in juristischer Sprache formuliert, was eine quantitative Umsetzung zusätzlich erschwert. Es haben sich deshalb Dienstleister am Markt etabliert, die dem Kunden die Modellierung des gesamten Waterfall abnehmen und auch den Collateral Pool in ihren Datenbanken abbilden. Der Waterfall definiert, in welcher Reihenfolge die Zins- und Tilgungszahlungen des Collateral Pool den einzelnen Tranchen zufließen.

Die Kombination dieser Dienstleistung mit einem auf die Bedürfnisse des Kunden zugeschnittenen Simulationsansatz zur Bewertung, lässt jedoch noch zu wünschen übrig. Sie können aber auf Basis von Szenarioanalysen wertvolle Dienste leisten, ein wie in diesem Artikel dargestelltes, vereinfachtes Inhouse-Tool zu kalibrieren. Einige Investoren versuchen erst gar nicht, diese komplexen Produkte selbst zu bewerten und verlassen sich auf externe Anbieter. Die zugelieferten Preise werden dann täglich in die entsprechenden Systeme gespielt. Es ist jedoch zu beachten, dass es sich auch hierbei nicht um Marktpreise sondern um Preise handelt, die bestenfalls auf Basis theoretisch fundamentaler Modelle, wie oben schon kurz angeschnitten, oder auch mit ökonomischen Ansätzen berechnet wurden. Ökonomische Ansätze bilden die betrachtete Tranche gemäß ihrer Laufzeit und ihrem Rating auf einen öffentlich beobachtbaren Kreditindex ab. Ausgehend vom Emissions-Spread der Tranche passen sie diesen für die Revaluation entsprechend der Änderung des zugewiesenen Kreditindex' an. Während der SubPrime-Krise zeigte sich jedoch, dass dies zu substantiellen Fehlbewertungen führen kann, wenn der Collateral Pool eine wesentliche Komponente enthält, die der verwendete Index nur unzureichend erklärt. Gegebenenfalls kann hier eine produktspezifische Erweiterung der Bewertung auf Basis einer Modellierung des Waterfall und der Ausfallverteilung, wie wir sie später vorstellen, Abhilfe schaffen. Dieser relativ arbeitsintensive Vorgang sollte der Durchführbarkeit wegen, nur bei entsprechend identifizierten Produkten, und da auch nur monatlich oder quartalsweise, erfolgen. Eine Ausnahme unter den Bewertungsdienstleistern ist MarkIT, das für ein gegebenes Produkt bei seinen Vertragspartnern Preise einfordert und den statistisch bereinigten Mittelwert der Rückläufe zur Verfügung stellt. Da jedoch für viele Strukturen keine Marktpreise

existieren, ist durch MarkIT allein keine ausreichende Abdeckung gewährleistet.

Ausfallverteilungen

Die Bewertung der hier untersuchten Produkte basiert in jedem Fall auf einer Ausfallverteilung der im Collateral Pool enthaltenen Assets. Dieser Artikel betrachtet die Joint Distribution of Default Times sowie die Linear Loss Distribution. Für die Verteilung der Anzahl der Ausfälle in einem Pool, wird auf die angegebene Literatur verwiesen. Der später noch zu behandelnde Simulationsansatz basiert auf Zufallsvektoren abhängiger Ausfallszeiten, und das Faktormodell verwendet die Linear Loss Distribution bei der Herleitung einer analytisch geschlossenen Bewertungsformel für synthetische CDO. Dabei betonen wir den Unterschied zwischen der Linear Loss Distribution der zugrundeliegenden Assets, und ihrer Transformation, der Loss Distribution, die durch die Lage der Tranche oder die strukturellen Eigenschaften des Produktes entsteht. Die Loss Distribution ist letztlich das, was den Investor interessiert. Der nächste Abschnitt geht nur kurz auf deren Herleitung ein und beschränkt sich auf die wichtigsten Ergebnisse, die für das Verständnis notwendig sind [Für eine erläuterte Herleitung der Ergebnisse sei auf Schweimayer 2008 verwiesen. Auch Giesecke 2004 behandelt das Thema in einer leicht verständlichen Form]. In der Praxis findet auch häufig die Constant Annual Default Rate Anwendung (CADR). Sie gibt an, wie viel Prozent des verbleibenden Nominals im nächsten Jahr ausfällt. Damit können entweder einzelne Szenarien analysiert oder, wenn sie mit einer Beta-Verteilung simuliert wird, eine Bewertung durchgeführt werden.

Allgemeine Theorie der Joint Distribution of Default Times

Wir gehen von einem Basket $\{1, \dots, M\}$ mit M Assets und dazugehörigen Ausfallzeitpunkten T_1, \dots, T_M aus, mit gegebenen Randverteilungen $F_1(t_1), \dots, F_M(t_M)$. Z.B. wäre $F_m(t_m) = 1 - \exp(-\lambda_m \cdot t)$ ein einfaches Reduced-Form-Modell mit konstanter Hazard Rate λ_m . Gemäß dem Theorem von Sklar [vgl. Li 2000 und Nelson 1999] induziert jede Copula $C(\cdot)$ durch die in **Gleichung 01** beschriebene Beziehung eine Joint Distribution of Default Times. In der Praxis wird oft Die Gaussche Copula (vgl.

► Gleichung 02)

verwendet. Dabei bezeichnet Φ_Σ die multivariate Standardnormalverteilung mit Korrelationsmatrix Σ , und ϕ steht für deren 1-dimensionalen Spezialfall. Um nun abhängige Ausfallszeiten zu erhalten, erzeugt die Simulation abhängige standardnormalverteilte Zufallszahlen $Y_m \sim N(0,1)$, vgl.

► Gleichung

03, woraus die abhängigen Ausfallszeiten T_m , in der Stochastik auch Stoppzeiten genannt, folgen. Dabei werden Asset-Return-Korrelationen in Korrelationen von Ausfallszeiten transformiert, wenn man die Y_m im Rahmen des strukturellen Modells von Merton interpretiert. Die Parameter $(\lambda_{m,1}, \dots, \lambda_{m,n})$ jeder einzelnen Marginalverteilung F_m

lassen sich sukzessive mit n Gleichungen (vgl. **Gleichung 04**) ermitteln, wenn zuvor die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten $F_{m,k}$ errechnet wurden. Dies geschieht per Bootstrapping, aus am Markt beobachtbaren CDS-Spreads verschiedener Laufzeiten der Reference Entity m [vgl. Schweimayer 2008, Abschnitt 5.2]. **Gleichung 04** verwendet anstatt einer konstanten Hazard Rate λ eine Stufenfunktion der Zeit, d.h. einen inhomogenen Poisson Prozess, da ein homogener Poisson Prozess mit nur einem Parameter, wie er vorher als Beispiel angeführt wurde, den Verlauf der Struktur der Ausfallwahrscheinlichkeiten nur unzureichend abbildet. Die benötigten abhängigen Zufallsvariablen Y_m lassen sich entweder durch den Conditional Probability Approach herleiten, wie ihn Nelson [Nelson 1999] vorstellt, und der für

► Gleichung 01

$$F(t_1, \dots, t_M) = C(F_1(t_1), \dots, F_M(t_M))$$

► Gleichung 02

$$F(t_1, \dots, t_M) = \Phi_\Sigma(\phi^{-1}(F_1(t_1)), \dots, \phi^{-1}(F_M(t_M)))$$

► Gleichung 03

$$Y_m = \phi^{-1}(F_m(T_m)), \quad \forall m \in \{1, \dots, M\}$$

$$\Leftrightarrow T_m = F_m^{-1}(\phi(Y_m)),$$

► Gleichung 04

$$F_m(t_k) = 1 - e^{-\sum_{i=1}^k \lambda_{m,i} \cdot (t_i - t_{i-1})} = F_{m,k} \quad \text{mit } k \in \{1, \dots, n\}$$

► Gleichung 05

$$Y_t = \frac{R_t - E(R_t)}{\sigma(R_t)} \leq \frac{\ln\left(\frac{x_t}{x_0}\right) - E(R_t)}{\sigma(R_t)} = y_t \quad \text{mit } R_t = \ln\left(\frac{A_t}{A_0}\right)$$

► Gleichung 06

$$Y_{t,m} = \rho_m \cdot V_t + \sqrt{1 - \rho_m^2} \cdot Z_m.$$

jede Copula einsetzbar ist, oder – im Falle der Gausschen Copula – mit Hilfe einer Cholesky-Zerlegung.

Analytisch geschlossene Darstellung der Linear Loss Distribution

Zur Herleitung dieser Verteilung sind drei Komponenten wichtig. Zuerst das strukturelle Modell von Merton [Merton 1974], bei dem ein Default dann eintritt, wenn der stochastische Marktwert der Assets A_t unter den Wert der deterministischen Verbindlichkeiten x_t fällt, d.h. $A_t \leq x_t$. Dieser Ansatz modelliert den stochastischen Prozess (A_t) , mit einer geometrisch Brownschen Bewegung, und damit ist die normierte Größe standardnormalverteilt, und man betrachtet $Y_t \leq y_t$ (vgl. **Gleichung 05**).

Die zweite Komponente ist ein Faktormodell, das dazu dient, die Korrelationsstruktur zwischen den einzelnen Bestandteilen des Collateral Pool zu modellieren. Für den Spezialfall eines 1-Faktormodells ergeben sich die normierten Asset-Renditen eines Collateral Pool $\{1, \dots, M\}$ zum Zeitpunkt t zu **Gleichung 06**.

Der gemeinsame Faktor V_t ist standardnormalverteilt und für das systematische Risiko zuständig, während das ebenfalls standardnormalverteilte Z_m dem spezifischen Risiko entspricht.

Als dritte Komponente benötigen wir ein Reduced Form Model, vgl. **Gleichung 04**, welches wir mit dem strukturellen Modell kombinieren, um eine Verteilung der Ausfallzeiten zu erhalten, d.h. $\phi(Y_{t,m}) = P(Y_{t,m} < Y_{t,m}) = P(T_m < t) = F_m(t)$. Woraus auch folgt, dass man risikoneutrale Ausfallsschwellen über $Y_{t,m} = \phi^{-1}(F_m(t))$ kalibrieren kann. Sowohl für die gesuchte analytisch geschlossene Formel der Linear Loss Distribution, als auch für eine explizite Formel der Joint Distribution of Default Times, die jedoch nicht weiter betrachtet wird, benötigt das weitere Vorgehen die an den gemeinsamen Faktor V_t bedingte Verteilung (vgl. **Gleichung 07**), welche aus dem Faktormodell folgt. Zur Herleitung einer möglichst einfachen geschlossenen Formel der Linear Loss Distribution trifft die Literatur in der Regel die Annahme, dass ein Large Homogeneous Portfolio (LHP) vorliegt [vgl. Kalemánova 2005]. Die Praxis nennt dies auch Homogeneous Large Portfolio Gaussian Copula (HLPGC). Obwohl dieses Modell, aufgrund seiner relativ restriktiven Annahmen sich nur bedingt zur Ermittlung der Linear Loss Distribution eignet, so spielt es doch eine wichtige Rolle, da es, ähnlich wie das Black & Scholes Modell bei Aktien-Optionen, Marktstandard ist, wenn es darum geht, die Implied Correlation und Base Correlations zu ermitteln. Wie beim Black & Scholes Modell, sind dies die Korrelationen, welche eingesetzt in das HLPGC-Modell, die gehandelten Marktpreise liefern. Häufig wird zur Bewertung von CDO-Tranchen auch das semi-analytische Modell von Hull/White [Hull/White 2004] verwendet, welches sowohl die Verteilung der Anzahl der Ausfälle, als auch die Linear Loss Distribution liefert. Dieses Modell erfordert zwar ein iteratives Vorgehen, verzichtet aber auf einige Annahmen des HLPGC-Modells.

Im Rahmen des Faktormodells fordert das HLPGC-Modell für die Korrelationen ρ_m mit dem Aktienmarktindex V_t für die Ausfallsschwellen $Y_{t,m}$ und Recovery Rates R_m , dass diese für alle Mitglieder des Collateral Baskets gleich sind. Beachtet man den Zusammenhang $\phi^{-1}(F_m(t)) = Y_{t,m}$, dann impliziert

Gleichung 07 identische Ausfallwahrscheinlichkeiten, bzw. Ausfallstrukturen, aller Mitglieder des Baskets, d.h. $F_V(t) = F_{m|V}(t)$ für alle $m \in \{1, \dots, M\}$. Ferner geht das LHP-Modell von gleichgewichteten Assets im Basket aus, um den zentralen Grenzwertsatz zur Herleitung von

Gleichung 26 anwendbar zu machen. Unter diesen Annahmen resultiert für die Conditional Linear Loss Distribution (vgl. **Gleichung 08**) eine einfache Binomialverteilung. Dabei ist $l_k = k \cdot (N/M) \cdot (1-R)$ der kumulative Nettoausfall nach k Ausfällen, N der anfängliche Nominal des gesamten CDO und R die Recovery Rate. Integriert man über die Dichte $f_V(x)$ des Marktfaktors, so folgt die unbedingte lineare Verlustverteilung in **Gleichung 09**.

Für die Implementierung kann die Annahme gleicher Ausfallwahrscheinlichkeiten fallen gelassen werden, dann ist

Gleichung 07

$$F_{m|V}(t) = P(T_m < t | V_t) = \Phi\left(\frac{\phi^{-1}(F_m(t)) - \rho_m \cdot V_t}{\sqrt{1 - \rho_m^2}}\right)$$

Gleichung 08

$$P(cL_t = l_k | V) = \binom{M}{k} \cdot F_V(t)^k \cdot (1 - F_V(t))^{M-k},$$

Gleichung 09

$$P(cL_t = l_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f_V(x) \cdot P(cL_t = l_k | x) dx.$$

Gleichung 10

$$Pv_k = Pv_{\text{Prem},k} + Pv_{\text{AI},k} - Pv_{\text{Def},k}.$$

Gleichung 11

$$Pv_{\text{Def}}(t_{m,k}) = \begin{cases} e^{-r \cdot t_{m,k}} \cdot N_{m,k} \cdot L_{m,k} & \text{falls } t_{m,k} \leq t_{\text{mat}} \\ 0 & \text{falls } t_{m,k} > t_{\text{mat}} \end{cases}$$

Gleichung 12

$$Pv_{\text{Prem}}(t_{m,k}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^p e^{-r \cdot t_i} \cdot cs_i \cdot N & \text{falls } t_{m,k} \leq t_{\text{mat}} \\ \sum_{i=1}^l e^{-r \cdot t_i} \cdot cs_i \cdot N & \text{falls } t_{m,k} > t_{\text{mat}} \end{cases}$$

Gleichung 13

$$cL_k(t) = \sum_{m=1}^M L_{m,k} \cdot 1_{(t_{m,k} \leq t)}$$

jedoch für die bedingte Verteilung eine Multinomialverteilung notwendig.

Anwendungsbeispiele

In diesem Abschnitt möchten wir zeigen, wie eine Monte-Carlo-Simulation dazu ver-

Kongress Länderrisiken 2008

Perspektiven für die deutsche Außenwirtschaft

17. April 2008, Rheingoldhalle Mainz

Ein Kongress von Coface Deutschland
in Zusammenarbeit mit Dow Jones und F.A.Z.-Institut



*Prof. Dr. Michael Hüther,
Direktor des Instituts
der deutschen Wirtschaft
in Köln*



*Prof. Dr. Axel von Werder,
Ordinarius für Organisation
und Unternehmensführung
an der Technischen
Universität Berlin*

- **Keynotes zu „Weltkonjunktur und Außenwirtschaft“**
Prof. Dr. Michael Hüther, Institut der deutschen Wirtschaft in Köln
sowie zu „Corporate Governance und Compliance im Auslandsgeschäft“
Prof. Dr. Axel von Werder, Technische Universität Berlin
- **Panels zu „Hypothekenkrise und Staatsfonds“**
u.a. mit Dr. Rainer Hank, Frankfurter Allgemeine Zeitung;
Laurenz Meyer, MdB; Dr. Matthias Mitscherlich, MAN Ferrostaal;
Dr. Friedhelm Plogmann, LRP Landesbank Rheinland-Pfalz
und „Finanzierung des Auslandsgeschäfts“
u.a. mit Rüdiger von Fölkersamb, Deutsche Leasing; Bastian Fien, FINANCE;
Ferdinand Röhl, Rohde & Schwarz; Marck Wengrzik, Commerzbank
- **Workshops zu Brasilien, China, Indien, Russland, Polen, Exportfinanzierungen,
Inkasso in Osteuropa, Korruptionsverhinderung durch Compliance,
Schiedsverfahren, Absicherung und Bonitätsbewertung**

In Zusammenarbeit mit



Medienpartner u.a.

ASIA BRIDGE

die bank

CHINA CONTACT

Compliance

Der CreditManager



FINANCE

MOE

DOW JONES
NFA

OST-WEST
CONTACT

RISIKO
MANAGER

local global
business media

Programmpartner u.a.



Weitere Informationen: www.laenderrisiken.de

wendet werden kann, NtD und Unfunded CDOs zu bewerten, auch wenn ein inhomogener Basket vorliegt. Selbstverständlich eignet sich die Simulation auch, um Cash CDOs mit ihren komplexen Waterfall-Strukturen zu analysieren. Das hier vorgestellte Waterfall-Modell lässt sich auf viele Arten von Cash CDOs anwenden, und es berücksichtigt die wichtigsten Eigenschaften des Waterfall, welche die Loss Distribution ausmachen. Danach verwenden wir das Faktormodell, um eine analytisch geschlossene Formel für NtDs und Unfunded CDO zu ermitteln, mit der die rechnerisch aufwendige Simulation umgangen werden kann.

Simulation

Aus der Realisation $(t_1, \dots, t_M)_k$ risikoneutraler Ausfallzeiten folgt der Present Value Pv_k , wobei wir von einem deterministischen risikolosen Zins ausgehen. Liegen n solche Szenarien vor, dann resultiert der gesuchte Present Value aus dem arithmetischen Mittel der Realisationen Pv_1, \dots, Pv_n . Dieses Prinzip wird nachfolgend in Beispielen erläutert.

NtD

Es sei t_{mat} die Zeitdauer bis zum Auslaufen eines NtD zum Bewertungszeitpunkt, der beim m -ten Ausfall die Sicherungszahlung des Protection Sellers triggert, und $t_{m,k}$ die entsprechende Ausfallzeit im k -ten Szenario der Simulation. Ferner sei $N_{m,k}$ der Nominal des Assets, welches den m -ten Ausfall im k -ten Szenario verursacht. Die Notation soll verdeutlichen, dass keine homogenen Nominalwerte gefordert werden. Mit $L_{m,k}$ sei der Loss Given Default von Asset (m,k) bezeichnet, der sich von Szenario zu Szenario ändern kann, und beispielsweise durch eine Beta-Verteilung modelliert werden könnte. Aus Sicht des Sicherungsgebers gilt für den Present Value des k -ten Szenarios ► **Gleichung 10**.

Der Barwert des Default Leg des m -ten Assets zum Zeitpunkt des Ausfalls ist in ► **Gleichung 11** beschrieben.

Im Falle eines Default zahlt der Protection Seller den LGD $(N_{m,k} \cdot L_{m,k})$, der mit dem risikolosen Zins abgezinst wird. Hinsichtlich des Premium Leg, wenn wir mit $t_p \leq t_{m,k}$ die Zeit bis zur letzten Prämienzahlung, die vor dem m -ten Ausfall liegt, sowie mit cs den Prämien-Spread bezeichnen, gilt ► **Gleichung 12**.

$$cL_k^{[a,b]}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } cL_k(t) \leq a/100 \cdot N \\ N_{Tr} & \text{falls } cL_k(t) \geq b/100 \cdot N \\ cL_k(t) - (a/100) \cdot N & \text{falls } cL_k(t) \in (a/100 \cdot N, b/100 \cdot N) \end{cases}$$

Dabei ist l die Gesamtzahl der Prämienzahlungen, und zusätzlich ist für den Fall $t_p < t_{m,k} < t_{p+1}$ mit $cs_{p+1} \cdot N \cdot (t_{m,k} - t_p) / (t_{p+1} - t_p)$ der Accrued Interest (AI) zu berücksichtigen.

Synthetischer Unfunded CDO

Im Gegensatz zum NtD, werden wir hier nur den Default Leg betrachten. Würde ein homogener CDO mit beispielsweise 100 Namen und identischen Nominalwerten vorliegen, und sollte die Tranche zwischen 6% und 15% bewertet werden, dann entspräche der Barwert der Summe der Barwerte eines NtD der beim 6. Ausfall die Ausgleichszahlung leistet, bis einschließlich des Barwertes eines NtD der beim 15. Ausfall seine Zahlung triggert. Um einen flexibleren Ansatz zu erhalten, sei $[a\%, b\%]$ eine CDO-Tranche mit M vielen Assets im Pool und unterschiedlichen Nominalen N_1, \dots, N_M die noch ausstehen, d.h. $N(t) = \sum N_m(t)$ und $N_{Tr}(0) = (b/100 - a/100) \cdot N(0)$ der Anfangsnominal der Tranche. Der einfacheren Notation wegen, werden wir beim Anfangsnominal den Zeitindex 0 im Folgenden weglassen. Ein Nebenprodukt der Simulation ist die Übergangsdichte des kumulativen Ausfalls $P(cL(t) \leq l)$. Im k -ten Szenario errechnet sich der kumulative lineare Verlust $cL_k(t)$ zum Zeitpunkt $t \leq t_{mat}$ aus den Ausfällen $L_{m,k}$ der einzelnen Namen über ► **Gleichung 13**.

In der Praxis wird der LGD für alle Szenarios konstant gehalten, z.B. $L_m = 0.4$. Wie an der Notation zu sehen ist, lassen wir hier die Möglichkeit variierender LGD zu. Der kumulative Verlust, den die Tranche zum Zeitpunkt t im Szenario k verkraften muss, ist in ► **Gleichung 14** beschrieben.

Falls die Summe aller LGD zum Zeitpunkt t unter der unteren Intervallgrenze liegt, so erfährt die betrachtete Tranche keinen Verlust. Wenn

andererseits der kumulative Verlust die Obergrenze des Intervalls überschreitet, dann wird der gesamte Tranchen-Nominal an den Sicherungsnehmer bezahlt, aber nicht mehr. Liegen die kumulativen Verluste innerhalb des Tranchen-Intervalls, muss nur der Teil, welcher über der Unterschranke liegt kompensiert werden. Für den aktuell verbleibenden Nominal der Tranche gilt $N_{Tr}(t) = N_{Tr} - cL_k^{[a,b]}(t)$. Über alle Szenarien kann die Dichte der Verlustverteilung der $cL_k^{[a,b]}(t)$ für einen beliebigen fixen Zeitpunkt, durch einen Kerndichteschätzer ermittelt werden. Wurden dann für einige Zeitpunkte diese Kerndichten ermittelt, resultiert eine Approximation der Übergangsdichte durch Interpolation. Bezeichnet schließlich $cL^{[a,b]}(t)$ den durchschnittlichen kumulativen Verlust über alle Szenarios zum Zeitpunkt t , dann ergibt sich der Barwert des Default Leg als ► **Gleichung 15**.

Cash CDO

Dieser Abschnitt versucht aufzuzeigen, wie der Investor Cash CDOs mit ausreichender Genauigkeit modellieren kann, ohne den Aufwand derart zu erhöhen, dass dies einen Praxiseinsatz unter begrenzten Ressourcen gefährdet. Trotz dieser Vereinfachung, wird die Methode voraussichtlich nur dann zum Einsatz kommen, wenn Zweifel am Spread-Ansatz bestehen, wie dies während der SubPrime-Krise gerade zu beobachten ist, weil sich dieser ohne genauere Kenntnis des Collateral Pool nur an systematischen und beobachtbaren Faktoren orientieren kann.

Ein Cash CDO durchläuft in der Regel drei Phasen. Während der Ramp Up Periode, die zwischen sechs und zwölf Monaten

$$Pv_{\text{Default}} = \int_0^{t_{mat}} e^{-r \cdot t} \cdot cL^{[a,b]}(t) dt$$

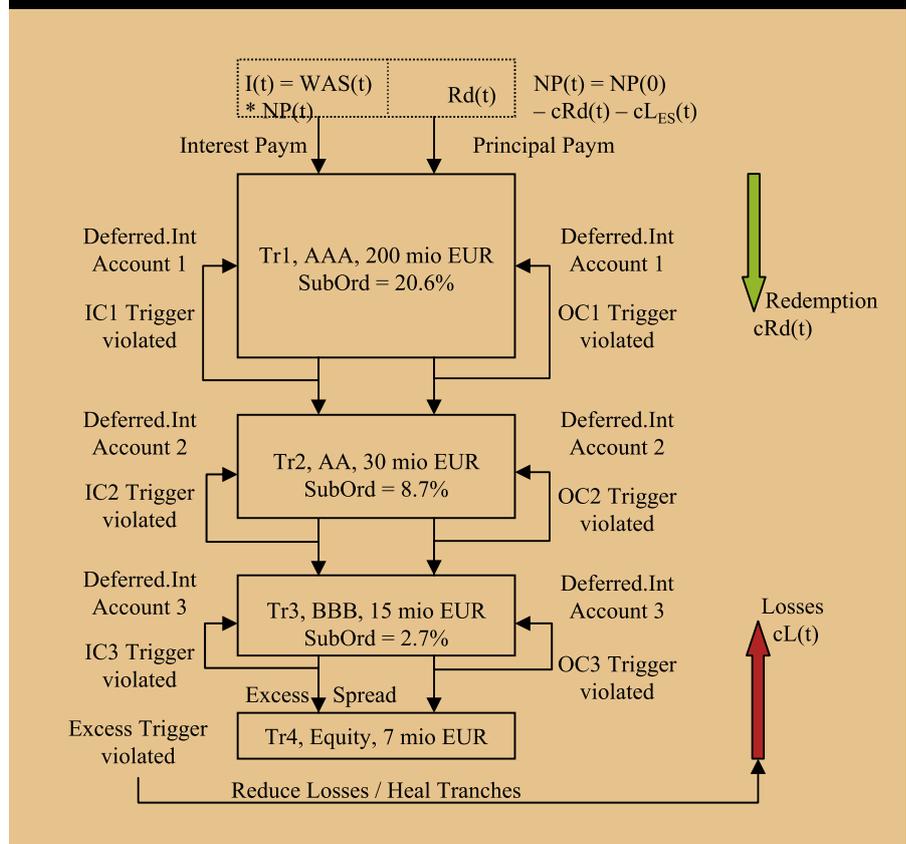
dauert, baut der Collateral Manager den Pool der unterliegenden Assets auf. Danach folgt die Reinvestment Period, die zwischen vier und sechs Jahren dauert, während der Tilgungszahlungen, Recovery und schützender Excess Spread reinvestiert werden. In der Reinvestment Period handelt der Collateral Manager aktiv die Assets, um die Pool-Struktur innerhalb der vorgegebenen Parameter zu halten. Das Assessment des Collateral Managers durch den Investor ist deshalb bei Managed CDOs ein wichtiger Bestandteil der Investment-Entscheidung. Abschließend geht der CDO in die Amortization Period über, während der die Tranchen in der Regel sequentiell getilgt werden, und sowohl Recovery als auch Excess Spread Verluste nicht mehr durch Reinvestment heilen, sondern die Tilgung erhöhen.

In einem Cash CDO transformiert der Waterfall die Linear Loss Distribution in die Loss Distribution. Ein Waterfall definiert, in welcher Reihenfolge Zins- und Tilgungszahlungen des Collateral Pool den einzelnen Tranchen zufließen. In den meisten Fällen filtern Zinsswaps die variablen Zinszahlungen aus dem Pool, um fixe Raten zu erhalten. Der verbleibende Zins, welcher nach den gerateten Tranchen dem Equity- oder First-Loss-Piece zusteht, wird als Excess Spread bezeichnet, vgl. ► **Abb. 01**. Dieser Rest kann als eine Art Dividende an die Halter der Equity-Tranche interpretiert werden. Der Waterfall legt auch fest, was mit den Zahlungen geschieht, wenn Ausfälle eintreten. Aufgrund der dem Waterfall immanenten Komplexität erfordern Cash CDO im Allgemeinen einen Simulationsansatz.

Das durch den Waterfall induzierte Credit Enhancement untergliedert sich in Subordination, Excess Spread und Trigger-Werte, vgl. ► **Abb. 01**. Over-Collateralization-Trigger, OC-Trigger, steuern die sequentielle Rückzahlung durch Principal Cash Flows, beginnend mit der höchsten Tranche. Interest-Collateralization-Trigger, IC-Trigger, steuern, ob Zinszahlungen aus dem Pool dazu dienen, die Senior Tranche zu tilgen, bis die Trigger-Werte wieder im zulässigen Bereich sind. Vor dieser Schleife muss jedoch der reguläre Zins der Senior Tranche bedient werden. Sobald der IC-Trigger wieder im Sollbereich ist,

Waterfall Struktur

► **Abb. 01**



steht der verbleibende Zins-Cashflow den nachfolgenden Tranchen zur Verfügung. Ein weiteres strukturelles Merkmal sind Deferred Interest Accounts, auf denen verbleibende Cash Flow nicht ausreicht, um den vertraglichen Zinsanspruch der Tranche zu erfüllen. Bevor die Struktur in der nächsten Periode die regulären Zinsansprüche bedient, muss sie zuerst den Deferred Interest ausgleichen. Zusammen mit Supplement OC Tests hilft der Excess Spread dabei, eine vorzeitige Amortisation zu verhindern. Diese Trigger werden vor den OC/IC Triggern aktiv und steuern das Reinvestment des Excess Spreads, welches auf die Trigger ähnlich wirkt wie eine Tilgung, d. h. es erhöht die Trigger-Werte. OC-Trigger setzen den aktuellen Gesamtnominal des Pool durch den Nominal der betrachteten Tranche plus den Nominal aller darüber liegenden Tranchen ins Verhältnis. Dadurch erhöht ein Reinvestment,

mit Ausnahme der niedrigsten Tranche, den Zähler, aber nicht den Nenner. Wohingegen eine Tilgung sowohl Zähler, als auch Nenner reduziert. Da der Zähler größer ist als der Nenner und sich somit eine Verringerung des Nenners stärker auswirkt, führt auch die Tilgung zu einer Erhöhung des Trigger-Wertes. Dabei ist zu beachten, dass Tilgung dazu tendiert, den für die unteren Tranchen verfügbaren Zins zu reduzieren, weil der verloren gegangene WAS über dem eingesparten Zins an die oberste Tranche liegt. Demgemäß erhöht Tilgung die IC-Trigger hoher und mittlerer Tranchen, und ähnlich wirkt Reinvestment. Der beschriebene sequentielle Vorgang deckt sich mit dem Ansatz der meisten gehandelten CDOs.

Es existieren am Markt aber auch Strukturen, die ganz oder teilweise nach dem Pro-Rata-Prinzip vorgehen, d.h. Verluste auf alle Tranchen gleichmäßig verteilen. Für solche Strukturen eignet sich

► **Gleichung 16**

$$cL_{es}(t) = cL_{es}(t-1) + \text{Max}(L(t) - R(t) - \alpha \cdot es(t-1), 0) \quad \text{mit} \quad cL_{es}(1) = cL(1)$$

das hier vorgestellte Modell nicht. Eine wesentliche Vereinfachung des Modells resultiert bei endfälliger Rückzahlung. Dann kollabiert die Amortization Period und es verbleibt die Reinvestment Phase [vgl. Schweimayer 2008]. Dieser Ansatz ist für Investment-Grade-Tranchen im Streszenario konservativer, da die vorzeitige Tilgung ein wesentlicher Bestandteil des Credit Enhancement ist, und dies zudem negative Auswirkungen auf den Barwert hat, wenn Bewertungs-Spreads dazu neigen, mit geringer werdender Restlaufzeit anzusteigen.

Bevor das Weitere auf die tranchenspezifischen Größen der Modellierung des Waterfall eingeht, werden die Variablen erläutert, welche sich auf die Gesamtstruktur beziehen und somit Auswirkungen auf alle Tranchen haben. Bezeichnet $cL(t) = \sum_{i=1}^t (L(i) - R(i))$ den kumulativen Nettoverlust am Ende der Periode t , dann gilt für den um den Excess Spread verringerten bzw. geheilten kumulativen Nettoverlust die rekursive Beziehung in **► Gleichung 16**.

Bei dieser Darstellung wird der für eine Heilung vertraglich verfügbare Anteil $\alpha \in [0, 1]$ des Excess Spread auch nach der Reinvestment Period weiterhin reinvestiert, anstatt die Tilgung zu erhöhen. Diese Annahme vereinfacht die Darstellung, da tilgender Excess Spread zwar die Tranchen reduziert, nicht aber den Collateral Pool. Um eine Doppelzählung bei der Berechnung des aktuellen Pool-Nominal $NP(t)$ zu vermeiden, reduziert die Recovery den Bruttoverlust auch nach der Reinvestment Phase, erhöht aber die kumulative Rückzahlung/Tilgung aus dem Pool bis einschließlich Periode t (vgl. **► Gleichung 17**).

D. h. die Recovery wird nach dem Ende der Reinvestment Period nicht mehr reinvestiert. Für den Nominal des gesamten Pool folgt daraus **► Gleichung 18**, die auch die implizierte Zinszahlung, bei der wir Management Fees und andere Kosten vernachlässigen, mit angibt. Wie im vorherigen Abschnitt wird beim Anfangsnominal auf Angabe des Zeitindex verzichtet.

Aufbauend auf diesen Strukturgrößen wenden wir uns nun den tranchenspezifischen Parametern zu. Wir beginnen mit der kumulativen Rückzahlung, dem kumulativen Nettoverlust und dem daraus folgenden verbleibenden Nominal der Tranche Tr (vgl. **► Gleichung 19**).

Hierbei ist N_{Tr} der ursprüngliche Nominal der Tranche. Die letzte Minimumfunktion ist im vorliegenden Modellrahmen nicht notwendig. Tilgt aber der Excess Spread nach der Reinvestment Phase oder leiten Triggerwerte Zinszahlungen in die Tilgung von Tranchen, dann entsteht ein Nominalüberhang des Collateral Pool und die Bedingung $cRd_{Tr}(t) + cL_{Tr}(t) \leq N_{Tr}$ ist nicht mehr gewährleistet. Unter dieser Modellierung fließt bei einem rein sequentiellen Waterfall am Ende der Periode t der Zins (vgl. **► Gleichung 20**) an die Tranche Tr . Der Ausdruck $br(t)$ bezeichnet die Base Rate, d.h. z. B. 3M-EURIBOR und cs_{Tr} den Emissionsspread der Tranche. Soll der Waterfall nicht komplett modelliert werden, beispielsweise ohne Trigger-Werte, so lassen sich die Zahlungen $I_j(t)$ durch $I_j(t) = (br(t) + cs_j) \cdot N_j(t)$ annähern. Der Pool-Zins $I(t)$, verringert um die den höheren Tranchen zustehenden Zinszahlungen, speist den Zins der Tranche. Dieser Zins kann aber nicht negativ werden, was die innere Maximumfunktion sicherstellt. Die Minimumfunktion trägt der Tatsache Rechnung, dass der Tranche zwar vertraglich die Base Rate zuzüglich Spread zusteht, jedoch bedingt durch Ausfälle der verfügbare Cash Flow gegebenenfalls dazu nicht ausreichen.

► Gleichung 17

$$cRd(t) = \sum_{i=1}^t \left(Rd(i) + R(i) \cdot I_{(i > ReInv)} \right)$$

► Gleichung 18

$$NP(t) = NP - cRd(t) - cL_{es}(t),$$

$$I(t) = WAS(t) \cdot NP(t)$$

Obige Ausführungen enthalten einige kritische Größen. Bei einer vollständigen Modellierung des Waterfall liegt der benötigte Excess Spread modellendogen vor. Für alle anderen Fälle, muss er modellexogen geschätzt werden. So gibt z. B. der Lead Manager einer Struktur bzw. die begleitende Investmentbank den Excess Spread oft in Prozent des Nominal des gesamten Pool an, so dass er über die Laufzeit durch $es(t) = es\% \cdot NP(t)$ approximiert werden kann. Eine andere Möglichkeit ist $es(t) = \text{Min}(I(t) - (I_1(t) + \dots + I_{\#Tr-1}(t)), 0)$. Diese Beziehung und **► Gleichung 20** machen deutlich, dass man die Struktur der darüber liegenden Nominalwerte $N_j(t)$, $j \in \{1, \dots, Tr-1\}$, nicht vernachlässigen kann.

Um den $WAS(t)$, der den Zins-Cash-Flow festlegt, exakt zu bestimmen, müsste der Anwender während der Simulation zu jedem zukünftigen Zahlungszeitpunkt wissen, wie sich der Collateral Pool zusammensetzt. Dieses Problem lässt sich durch die Annahme umgehen, dass der Pool seine Bonitätsstruktur während der Laufzeit

► Gleichung 19

$$cRd_{Tr}(t) = \text{Min} \left(\text{Max} \left(cRd(t) - \sum_{j=1}^{Tr-1} N_j, 0 \right), N_{Tr} \right),$$

$$cL_{Tr}(t) = \text{Min} \left(\text{Max} \left(cL_{es}(t) - \sum_{j=Tr+1}^{\#Tr} N_j, 0 \right), N_{Tr} \right) \text{ und}$$

$$N_{Tr}(t) = N_{Tr} - \text{Min} \left(cRd_{Tr}(t) + cL_{Tr}(t), N_{Tr} \right).$$

► Gleichung 20

$$I_{Tr}(t) = \text{Min} \left((br(t) + cs_{Tr}) \cdot N_{Tr}(t), \text{Max} \left(I(t) - \sum_{j=1}^{Tr-1} I_j(t), 0 \right) \right)$$



Marktmissbrauch, Betrug, Korruption

Compliance-Risiken frühzeitig erkennen

Save the Date

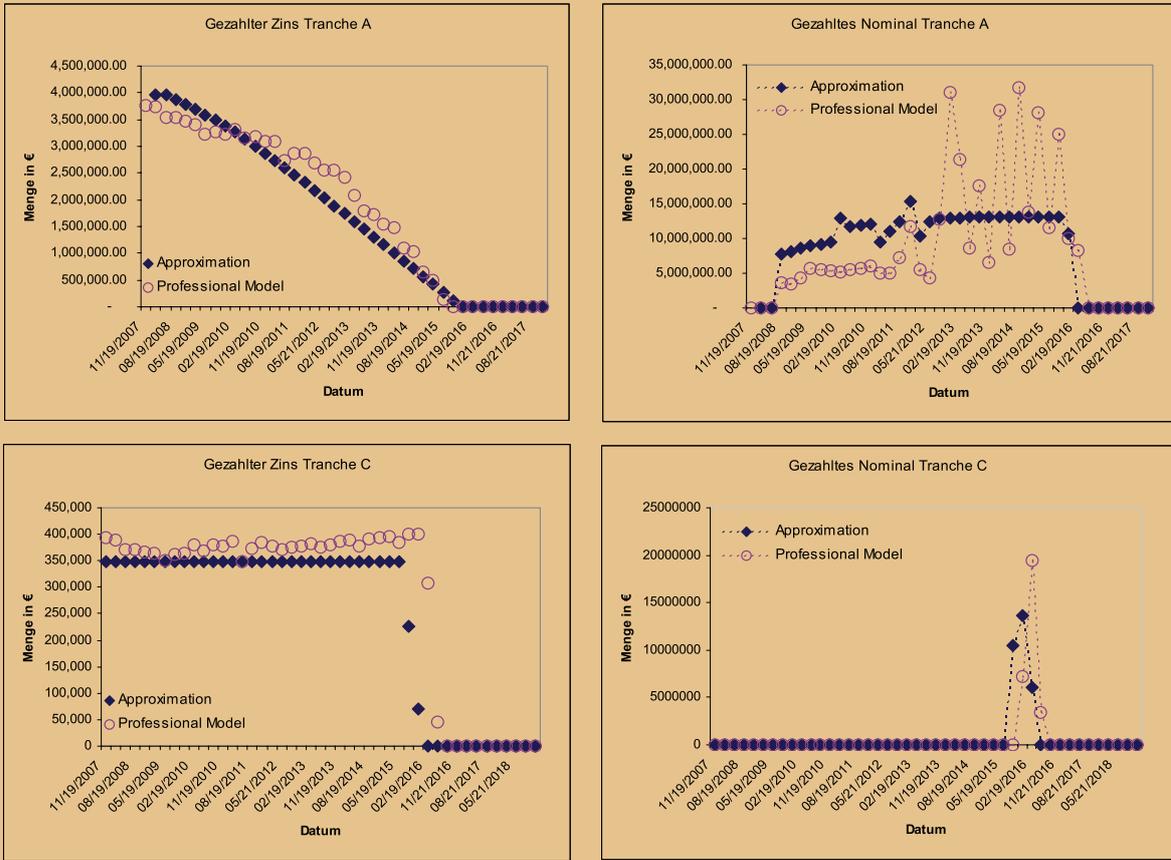
26. Mai 2008 in Frankfurt
27. Mai 2008 in Düsseldorf
28. Mai 2008 in Hamburg
29. Mai 2008 in München

Mehr Infos unter

www.risiko-manager.com

Zins- und Tilgungszahlungen einer um OC/IC-Trigger erweiterten Modellversion

Abb. 02



nicht ändert, d. h. $WAS(t) \equiv WAS$. Dies ist bei Managed Pools eine haltbare Annahme. Bei Static Pools, wo davon auszugehen ist, dass die zuerst ausfallenden High-Yield-Komponenten nicht ersetzt werden, wird der Weighted Average Spread bei Ausfällen während der Laufzeit abnehmen.

Macht das Modell nicht die vereinfachende Annahme einer endfälligen Tilgung – auch Bullet Redemption genannt – so benötigt der Anwender eine Funktion in Abhängigkeit der Zeit, welche eine Aussage über den zeitlichen Verlauf der geplanten $sRd(t)$ und vorzeitigen $uRd(t)$ Til-

gungszahlungen trifft. Die zweite Funktion, und damit auch ihre kumulative Variante, hängt vom Zins-

Gleichung 21

$$sRd(\tau) + uRd(\tau) = Rd(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \tau \in [0, \#t_{ReInv}] \\ \frac{NP - 2 \cdot cL_{es}(\tau)}{(\#t_{WAL} - \#t_{ReInv})^2} \cdot (\tau - \#t_{ReInv}) + \frac{cL_{es}(\tau)}{(\#t_{WAL} - \#t_{ReInv})} & \text{falls } \tau \in (\#t_{ReInv}, \#t_{WAL}] \end{cases}$$

Gleichung 22

$$Pv_{Def} = \int_0^{t_{mat}} e^{-r_f t} \cdot L^* \cdot N^* \cdot dF^{(k)}(t) = e^{-r_f t_{mat}} \cdot F^{(k)}(t_{mat}) + \int_0^{t_{mat}} F^{(k)}(t) \cdot L^* \cdot N^* \cdot r_f \cdot e^{-r_f t} dt$$

Gleichung 23

$$Pv_{Prem} = \sum_{i=1}^n P(N(t_i) < k) \cdot cs \cdot N^*$$

niveau sowie makroökonomischen Variablen, wie Inflation und Arbeitslosenraten ab. Ihre Modellierung kann deshalb zu komplexen Ansätzen führen, die Zinsstrukturmodelle

enthalten. Das Prepayment Risk existiert nicht nur bei Pass-Through-Fonds, sondern trifft nach der Reinvestment Period auch die hier im Vordergrund stehenden Pay-Through-Strukturen. Unabhängig davon erfordert die Ermittlung der Zins- und Tilgungszahlungen auch bei planbaren Tilgungen, eine über den Zeitablauf exakte Analyse des Collateral. Da einige Investoren nicht über die dazu notwendigen systemtechnischen und personellen Ressourcen verfügen, diskutieren wir eine einfache Approximation, bei der Tilgungen mit dem Alter der Struktur konkav ansteigen, und welche die beiden oben genannten Arten von Tilgungszahlungen aggregiert (vgl. ► **Gleichung 21**)

Die zugrundeliegende Idee betrachtet, wie ein Ausfall nach der Periode $\tau^* \in [\#t_{ReInv}, \#t_{WAL}]$ die Steigung im Restabschnitt, einer bis dahin linear anwachsenden Tilgung verringern muss, damit der verbleibende Nominal nicht schon innerhalb der erwarteten Restperioden $[\tau^*, \#t_{WAL}]$ zurückgezahlt wird. Dabei ist $(\#t_{WAL} - \#t_{ReInv})$ die Anzahl der Perioden zwischen dem Ende der Reinvestment Phase t_{ReInv} und dem erwarteten Laufzeitende t_{WAL} der Struktur, und τ bezeichnet die Anzahl der bereits vergangenen Perioden seit dem Bewertungszeitpunkt. Die angegebene Darstellung geht davon aus, dass der Bewertungszeitpunkt innerhalb der Reinvestment-Periode liegt. Es wird nicht versucht die Weighted Average Life (WAL) auf Basis oben erwähnter komplexer Modelle selbst zu berechnen, sondern sie wird als exogener Input, beispielsweise aus Bloomberg, bezogen. Für $\tau \in [0, \#t_{ReInv}]$ folgt aus ► **Gleichung 21** $Rd(\tau) = 0$, und für $\tau = \#t_{WAL}$ erhält man $Rd(\#t_{WAL}) = (NP - cL_{es}(\#t_{WAL})) / (\#t_{WAL} - \#t_{ReInv})$. Auch ► **Gleichung 21** geht von einem Excess Spread aus, der auch nach der Reinvestment Period reinvestiert wird. Da $Rd(\tau)$ streng monoton wächst, folgt aus dieser Kalibrierung eine verlängerte Laufzeit. Der Anwender kann aber den funktionalen Verlauf, wie in ► **Abb. 02** gezeigt, durch Verändern des Parameters

► Gleichung 24

$$Pv_{Prem} = \sum_{i=1}^{mat} cs \cdot \max(0, N_T - EL_{[a,b]}(t_i)) \cdot e^{-r_f \cdot t_i}$$

$$Pv_{Def} = \int_0^{t_{mat}} e^{-r_f \cdot t_i} dEL_{[a,b]}(\tau) \stackrel{\text{partielle Int}}{=} e^{-r_f \cdot t_{mat}} \cdot EL_{[a,b]}(t_{mat}) + \int_0^{t_{mat}} r_f \cdot e^{-r_f \cdot \tau} \cdot EL_{[a,b]}(\tau) d\tau,$$

► Gleichung 25

$$EL_{[a,b]}(t) = \sum_{k=1}^M P(cL_t = l_k) \cdot \max(\min(l_k, b^\#) - a^\#, 0)$$

► Gleichung 26

$$P(L_t \leq l_k) = \Phi \left(\frac{\sqrt{1-\rho^2} \cdot \Phi^{-1}(k/M) - \Phi^{-1}(p_t)}{\rho} \right)$$

$\#t_{WAL}$ an ein professionell gerechnetes Szenario anpassen.

Die erarbeiteten Konzepte können dazu dienen, direkt die Auswirkungen vordefinierter Loss-Szenarien und deren Einfluss auf die Zins- und Tilgungszahlungen einer Tranche zu untersuchen. Investoren nutzen solche Stress-Tests, um zu quantifizieren, welche CADR ihre Tranche aushält, bis ein Verlust an Nominal eintritt. Darüber hinaus kann, ähnlich wie im vorherigen Abschnitt, der kumulative Linear Loss $cL_k(t)$ gemäß ► **Gleichung 13** mit $k \in \{1, \dots, n\}$ n-mal simuliert werden. Daraus folgen für jedes Szenario k die gesuchten Zins- und Tilgungszahlungen an die Tranche, welche abgezinst mit der Swap Rate den Barwert dieses Szenarios ergeben. Der Mittelwert aller Szenarien liefert schließlich den gesuchten Barwert.

► **Abb. 02** vergleicht zum Abschluss dieses Abschnitts für eine real existierende Struktur, die resultierenden Zins- und Tilgungszahlungen einer um OC/IC-Trigger erweiterten Version des oben beschriebenen Modells, mit den Ergebnissen einer professionellen Modellierung, wie sie die eingangs erwähnten Dienstleister anbieten. Dabei wurde für das Verhalten des kumulativen Verlustes das Szenario einer CADR von 8% unterstellt. Es ist zu erwähnen, dass die Summe aller Nominal-Cash-Flows in beiden Modellen identisch ist, sich jedoch das Timing unterscheidet, was

einen Barwerteffekt hat. Die Unterschiede im Timing sind insbesondere bei den Tilgungszahlungen der Tranche A erkennbar und zeigen welchen Unterschied es macht, wenn die einzelnen Komponenten des Pools mit ihrem Tilgungs- und Laufzeitprofil bekannt sind und in das Modell einfließen.

Faktormodell

Während die Monte-Carlo-Simulation Korrelationen genau und flexibel quantifiziert, oder inhomogene CDOs bewerten kann, so gibt es auf der anderen Seite analytische und semi-analytische (interaktive) Ansätze, welche den rechnerischen Aufwand, auf Kosten zusätzlicher Annahmen, reduzieren [vgl. Hull/White 2004].

NtD

Wir konzentrieren uns auf einen homogenen NtD, d.h. einen zugrundeliegenden Pool von Forderungen, die alle den gleichen Nominalwert N^* haben. Ferner weisen alle den gleichen LGD L^* auf. Außerdem sei die, den in Abschnitt 2 erläuterten Loss Distributions nahestehende, Verteilung der Anzahl der Ausfälle $F^{(k)}(t) = P(N(t) \geq k)$ bekannt. Für den Barwert des Default Leg gilt damit ► **Gleichung 22**.

Kann der k-te Default nur zu den Zeitpunkten der Prämienzahlung eintreten,

dann entspricht der Barwert des Prämien-Legs dem Wert in ► **Gleichung 23**.

Die Wahrscheinlichkeit $P(N(t) < k)$ gibt wider, dass man die Prämienzahlung nur erhält, wenn bis dahin weniger als k Ausfälle aufgetreten sind. Werden zwischenzeitliche Ausfälle zugelassen, so erhöht sich der Barwert des Prämien-Legs um den Accrued.

Synthetische Unfunded CDO

Eine nähere Betrachtung der bisher behandelten mathematischen Zusammenhänge zeigt, dass sich alle Konzepte auf den erwarteten Verlust zurückführen lassen. Der Anwender kann also alle betrachteten Bewertungsformeln unter expliziter Verwendung des Expected Loss umschreiben. Für einen Single Tranche CDO mit Anfangsnominal N_T zwischen dem Attachment Point a und Detachment Point b gilt ► **Gleichung 24** mit Credit Spread cs , erwartetem Verlust $EL_{[a,b]}(t)$ der Tranche zum Zeitpunkt t , und der Dauer bis zum Maturity t_{mat} . Während die Formel für den Barwert des Default-Leg zwischenzeitliche Ausfälle zulässt, wurde die Darstellung des Prämien-Leg dahingehend vereinfacht, dass Ausfälle nur zu den Prämienzeitpunkten stattfinden können. Erfahrungsgemäß hat diese Annahme keine großen Auswirkungen. Viel wichtiger ist, dass die verwendeten Credit Spreads der Einzeltitel, aus denen sich deren risikoneutrale Ausfallverteilung ergibt, zuverlässig sind. Die in Abschnitt über die analytisch geschlossene Darstellung der Linear Loss Distribution diskutierte Verteilung des Linear Loss erlaubt es, den Expected Loss als Erwartungswert (vgl. ► **Gleichung 25**) darzustellen. Dabei ist $I_k = k \cdot (N/M) \cdot (1 - R)$ der kumulative lineare Verlust nach dem k -ten Ausfall, und $b^\# = b \cdot N$, $a^\# = a \cdot N$. Ferner liefert das LHP-Modell für große Portfolios ► **Gleichung 26**, womit die einfachst mögliche Darstellung der linearen Verlustverteilung eines homogenen Pools vorliegt. Der benötigte Wert ist damit über $P(cL_t = I_k) \approx P(cL_t \leq I_k) - P(cL_t \leq I_{k-1})$ approximierbar. Jedoch kann die Normalverteilung nicht der empirisch beobachtbaren Lower Tail Dependence Rechnung tragen. Einige Autoren ersetzen deshalb in obiger Gleichung die Normalverteilung heuristisch durch eine t-Verteilung mit geeigneter Anzahl an Freiheitsgraden. Für synthetische Unfunded CDO existieren mit den standardisierten Baskets iTRAXX für Europa und

CDX für Nordamerika, liquide gehandelte Produkte, die eine einfache Kalibrierung erlauben. In einigen Fällen liegt jedoch ein nicht standardisierter Pool und/oder nicht standardisierte Attachment- und Detachment-Punkte vor. Huddart/Picone [vgl. Huddart/Picone 2007] zeigen u. A., wie die Praxis unter Verwendung der beiden liquiden Indexwerte, Bespoke Baskets behandelt.

Lessons Learned

Man kann abschließend fragen, wie die Auswirkungen der SubPrime-Krise auf den Markt für Kreditverbriefungen hätten vermieden werden können, bzw. wohin sich der Markt für Strukturen aufgrund der Vorkommnisse bewegen wird. Die in der Einleitung erläuterten Probleme des Moral Hazard und der Adverse Selection trugen zwar zur Kreditkrise bei, sind aber nicht das den Verbriefungen zugrundeliegende Problem. Der eigentliche Punkt, an dem die Marktteilnehmer ansetzen müssen, ist die Informations-Asymmetrie, die mangelnde Transparenz der Produkte und das dadurch implizierte Lemon-Problem.

Anzustreben ist deshalb sowohl ein einfacher Durchblick in den Collateral Pool, als auch einfachere Strukturen, die eine quantitative Bewertung erleichtern. So stützen sich beispielsweise Unfunded CDOs nur auf ihre Subordination und vereinfachen die Bewertung wesentlich. Und dies funktioniert umso besser, je liquider die im Pool befindlichen Titel sind, was die Kalibrierung der Bewertungsmodelle erleichtert. Ferner reicht für die erwähnte verbesserte Einschätzung des Collateral Pool nicht, wenn die Daten „nur“ vorliegen. Es müssen auch die systemtechnischen Voraussetzungen vorhanden sein, um diese Daten in automatisierter Form durch Data Mining und eine darauf aufsetzende flexible Business Intelligence zu nutzen. Diese sollte beispielsweise eine schnelle Overlap-Analyse erlauben, und Anfragen wie „welches Exposure habe ich wo, und was passiert, wenn der Spread um 100bp steigt“, schnell beantworten können. Der Trend wird demnach wohl in Richtung weniger komplexer und transparenterer Strukturen gehen. Diese Tendenz entbindet den Anleger aber nicht von der Verantwortung nur Produkte zu handeln, bei denen er zusätzlich zu den oben erwähnten Punkten auch die damit

verbundenen Marktzusammenhänge richtig einschätzen kann.

Denn zu den Auswirkungen der SubPrime-Krise trug bei, dass Investoren, die durchaus über die notwendigen modelltheoretischen und systemtechnischen Voraussetzungen verfügen, den durch die extreme SubPrime-Kreditvergabe über die Jahre 2005 bis 2007 verursachten Strukturbruch im Underlying SubPrime Loan, massiv unterschätzten. Die historisch beobachteten Ausfallraten wurden in der Realität um ein vielfaches übertroffen. Und ein noch so gutes Modell kann bei fehlerhaftem Input kein richtiges Ergebnis liefern. □

Quellenverzeichnis und weiterführende Literaturhinweise:

- Giesecke (2004):** *Credit Risk Modeling And Valuation: An Introduction*, <http://www.orie.cornell.edu>, 2008, Online-Veröffentlichung.
- Huddart/Picone (2007):** *Synthetic CDOs: Made to measure – A guide to valuing bespoke and non-standard tranches*, Dresdner Kleinwort Structured Credit Research, <http://www.dresdnerkleinwort.com/research>, 2007, Online-Veröffentlichung.
- Hull/White (2004):** *Valuation of a CDO and n-th to default CDS without monte carlo simulation*, Working Paper, University of Toronto.
- Kalemanova (2005):** *The normal inverse Gaussian distribution for synthetic CDO pricing*, Working Paper, Technical University of Munich, with Schmid B., Werner R.
- Li (2000):** *On default correlation – a copula function approach*, Working Paper, Risk Metrics, New York, <http://www.riskmetrics.com>, 2008, Online-Veröffentlichung.
- Merton (1974):** *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*, *Journal of Finance* 28, 449-470.
- Nelson (1999):** *An Introduction to Copulas*, Springer, New York.
- Schweimayer (2003):** *Risikomanagement mit Makroderivaten – auf Basis zeitdiskreter stochastischer Prozesse*, Shaker Verlag, Aachen.
- Schweimayer (2008):** *Valuation of Synthetic and Cash CDO in Practice – and related Issues*, <http://www.gloriamundi.org>, 2008, Online-Veröffentlichung.

Autor:

Gerhard Schweimayer ist Mitarbeiter der MunichRe Ergo Assetmanagement GmbH