Jakob Bernoulli

Auszug aus „Ars conjectandi“ (Gesetz der Großen Zahlen) (1713)

Quelle: Jakob Bernoulli: Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi), Dritter und vierter Theil. Übers. und hrsg. von R. Haussner. - Leipzig: Engelmann (Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften), 1899

~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

Kapitel IV.

Ueber die zwei Arten, die Anzahl der Fälle zu ermitteln. Was von der Art, sie durch Beobachtung zu ermitteln, zu halten ist. Hauptproblem hierbei, und anderes.

In dem vorigen Kapitel wurde gezeigt, auf welche Weise aus den Zahlen der Fälle, in welchen Beweisgründe für eine beliebige Sache vorhanden oder nicht vorhanden sein können, sie anzeigen oder nicht anzeigen oder auch ihr Gegentheil anzeigen können, ihre Beweiskräfte und die diesen proportionalen Wahrscheinlichkeiten sich bestimmen und schätzen lassen.' Wir sind also dahin gelangt, dass zur richtigen Bildung von Vermuthungen über irgend eine Sache nichts anderes zu thun erforderlich, ist, als dass wir zuerst die Zahl dieser Fälle genau ermitteln und dann bestimmen, um wieviel die einen Fälle leichter als die anderen eintreten können. Und hier scheint uns gerade die Schwierigkeit zu liegen, da nur für die wenigsten Erscheinungen und fast nirgends anders als in Glücksspielen dies möglich ist; die Glücksspiele wurden aber von den ursprünglichen Erfindern, damit die Spieltheilnehmer gleiche Gewinnaussichten haben sollten, so eingerichtet, dass die Zahlen der Fälle, in welchen sich Gewinn oder Verlust ergeben muss, im voraus bestimmt und bekannt sind, und dass alle Fälle mit gleicher Leichtigkeit eintreten können. Bei den weitaus meisten andern Erscheinungen aber, welche von dem Walten der Natur oder von der Willkür der Menschen abhängen, ist dies keineswegs der Fall. So sind z.B. bei Würfeln die Zahlen der Fälle bekannt, denn es giebt für jeden einzelnen Würfel ebensoviele Fälle als er Flächen hat; alle diese Fälle sind auch gleich leicht möglich, da
~~~~~~~~~~~~~~~~~~~

wegen der gleichen Gestalt aller Flächen und wegen des gleichmässig vertheilten Gewichtes des Würfels kein Grund dafür vorhanden ist, dass eine Würfelfläche leichter als eine andere fallen sollte, was der Fall sein würde, wenn die Würfelflächen verschiedene Gestalt besässen und ein Theil des Würfels aus schwererem Materiale angefertigt wäre als der andere Theil. So sind auch die Zahlen der Fälle für das Ziehen eines weissen oder eines schwarzen Steinchens aus einer Urne bekannt und können alle Steinchen auch gleich leicht gezogen werden, weil bekannt ist, wieviele Steinchen von jeder Art in der Urne vorhanden sind, und weil sich kein Grund augeben lässt, warum dieses oder jenes Steinchen leichter als irgend ein anderes gezogen werden sollte. Welcher Sterbliche könnte aber je die Anzahl der Krankheiten (d. i. ebensovieler Fälle), welche den menschlichen Körper an allen seinen Theilen und in jedem Alter befallen und den Tod herbeiführen können, ermitteln und angeben, um wieviel leichter diese als jene Krankheit, die Pest als die Wassersucht, die Wassersucht als Fieber den Menschen zu Grunde richtet, um daraus eine Vermuthung über das Verhältniss von Leben und Sterben künftiger Geschlechter abzuleiten? Oder wer könnte die unzähligen Fälle von Veränderungen aufzählen, welchen die Luft täglich unterworfen ist, um daraus schon heute vermuthen zu wollen, welche Beschaffenheit sie nach einem Monate oder gar nach einem Jahre hat? Oder ferner, wer dürfte die Natur des menschlichen Geistes oder den bewunderungswürdigen Bau unseres Körpers so weit erforscht haben, um bei Spielen, welche ganz oder theilweise von der Verstandesschärfe oder von der körperlichen Gewandtheit der Spieler abhängen, die Fälle bestimmen zu wollen, in welchen dieser oder jener Spieler gewinnen oder verlieren kann ? Da diese und ähnliche Dinge von ganz verborgenen Ursachen abhängen, welche überdies noch durch die unendliche Mannigfaltigkeit ihres Zusammenwirkens unsere Erkenntniss beständig täuschen, so würde es völlig sinnlos sein, auf diese Weise etwas erforschen zu wollen.

Aber ein anderer Weg steht uns hier offen, um das Gesuchte zu finden und das, was wir *a priori* nicht bestimmen können, wenigstens *a posteriori*, d.h. aus dem Erfolge, welcher bei ähnlichen Beispielen in zahlreichen Fällen beobachtet wurde, zu ermitteln. Dabei muss angenommen werden, dass jedes einzelne Ereigniss in ebenso vielen Fällen eintreten oder nicht eintreten kann, als vorher bei einem gleichen Stande der Dinge beobachtet wurde, dass es eingetreten oder nicht eingetreten ist. Denn z.B. wenn man beobachtet hat, dass von 300 Menschen von dem Alter und der Constitution des Titius 200 vor Ablauf von 10 Jahren gestorben sind, die übrigen aber länger gelebt haben, so kann man mit hinreichender Sicherheit folgern, dass es doppelt so viele Fälle giebt, in welchen auch Titius innerhalb des nächsten Decenniums der Natur den schuldigen Tribut leisten muss, als Fälle, in welchen er diesen Zeitpunkt überleben kann. Ebenso wenn Jemand schon seit langen Jahren das Wetter beobachtet und sich angemerkt hat, wie oft es heiter oder regnerisch war, oder wenn Jemand zwei Spielern sehr oft zugeschaut und gesehen hat, wie oft dieser oder jener gewinnt, so kann er gerade dadurch das Verhältniss bestimmen, welches die Zahlen der Fälle, in denen dieselben Ereignisse unter den vorangegangenen gleichen Umständen auch nachher eintreten oder nicht eintreten können, wahrscheinlicher Weise zu einander haben.

Diese empirische Art, die Zahl der Fälle durch Beobachtungen zu bestimmen, ist weder neu noch ungewöhnlich; denn schon der berühmte Verfasser des Werkes »L'art de penser« [1], ein scharfsinniger und talentvoller

---

[1] Dieses Werk, dessen vollständiger Titel lautet: „La logique ou l'art de penser, contenant outre les règles communes plusieurs observations nouvelles, propres à former le jugement «, erschien anonym im Jahre 1664 in Paris ; lateinische Uebersetzungen erschienen 1666 in Utrecht, 1704 und 1708 in Halle. Eine neue französische Ausgabe mit Anmerkungen und Zusätzen gab Alfred Fouillée (Paris 1879) heraus. Wie man heute weiss, ist dieses Werk, welches gewöhnlich als „La logique de *Port Royal*" bezeichnet wird, von *Antoine Arnauld*, *Peter Nicole* und vielleicht unter Mithülfe noch anderer Jansenisten vom Kloster Port Royal, mit Benutzung einer Abhandlung von *Pascal* verfasst. Sie vereinigt die Aristotelischen Lehren mit Principien von *Descartes*, und es beginnt mit ihr eine zweite Epoche in der Geschichte der Logik, welche bis zu ihrem Erscheinen trotz zahlreicher Bearbeitungen keinen wesentlichen Fortschritt seit *Aristoteles* aufzuweisen hatte. Noch heute ist das Werk nicht antiquirt. Vgl. *F. Ueberweg*, Grundriss der Geschichte der Philosophie der Neuzeit, 1. Band (8. Auflage von *M. Heinze*, Berlin 1896) und *E. Reinhold*, Geschichte der Philosophie nach den Hauptmomenten ihrer Entwickelung. 1. Band (5. Auflage. Jena 1859). In dem letzteren Werke findet sich eine ausführlichere Inhaltsangabe auf den Seiten 125 und 126. –

Hier sind noch zwei zu *Bernoulli*'s Lebzeiten erschienene Abhandlungen zu nennen, in welchen eine empirische Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten versucht worden war. Beide Arbeiten enthalten Anläufe zur Aufstellung von Sterblichkeitstafeln. *Bernoulli* hat beide Arbeiten nicht kennen gelernt; das Erscheinen der zuerst zu nennenden Arbeit hatte er zwar erfahren, konnte aber dieselbe nicht erhalten, wie aus seinem Briefwechsel mit *Leibniz* hervorgeht; von der anderen Arbeit hat er aber wahrscheinlich gar nichts gehört. Die beiden Abhandlungen sind „Waerdye van lyfrenten nar proportie van losrenten" von dem berühmten Grosspensionär *Johann de Witt* (ermordet 1672 bei einem Aufstande), welche 1671 im Haag erschienen und 1879 nach dem sehr selten gewordenen Originale neugedruckt ist, und „An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, drawn from curious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw; with an Attempt to ascertain the Price of Annuities upon Lives" von dem bekannten englischen Astronom *Edmund Halley* (1656 – 1742), welche 1693 in den Philosophical Transactions erschienen ist.

Johann de Witt nimmt an, dass ein Mensch, welcher zwischen 4 und 54 Jahren alt ist, die gleiche Wahrscheinlichkeit habe, in dem nächstfolgenden Jahre leben zu bleiben oder zu sterben, dass aber das Verhältnis zwischen den Wahrscheinlichkeiten für Sterben und Leben in dem nächsten Jahre für die Lebensalter von 54 – 64, 64 – 74 und 74 – 81 Jahren bez. gleich $\frac{3}{2}$, 2, 3 sei und dass im Durchschnitt niemand das 81 Jahr überschreite. Eine Rechtfertigung dieser Annahmen giebt *de Witt* nicht.

Mann, hat in Kapitel 12 und folg. des letzten Theiles seines Werkes ein ganz ähnliches Verfahren beschrieben, und alle Menschen beobachten im täglichen Leben dasselbe Verfahren. Auch leuchtet jedem Menschen ein, dass es nicht genügt, nur eine oder die andere Beobachtung anzustellen, um auf diese Weise über irgend ein Ereigniss zu urtheilen, sondern dass eine grosse Anzahl von Beobachtungen erforderlich sind. Zuweilen hat auch schon ein recht einfältiger Mensch in Folge irgend eines natürlichen Instinktes von sich aus und ohne jede vorangegangene Unterweisung die Erfahrung gemacht (was wirklich wunderbar ist), dass man, je mehr diesbezügliche Beobachtungen vorliegen, um so weniger Gefahr läuft, von der Wahrheit abzuirren. Obgleich nun dies aus der Natur der Sache heraus von Jedem eingesehen wird, so liegt doch der auf wissenschaftliche Prinzipien gegründete Beweis durchaus nicht auf der Hand, und es liegt mir daher ob, ihn an dieser Stelle zu erbringen. Ich würde aber glauben zu wenig zu leisten, wenn ich bei dem Beweise dieses einen Punktes, welchen Jeder kennt, stehen bleiben wollte. **Man muss vielmehr noch Weiteres in Betracht ziehen, woran vielleicht Niemand bisher auch nur gedacht hat. Es bleibt nämlich noch zu untersuchen, ob durch Vermehrung der Beobachtungen beständig auch die Wahrscheinlichkeit dafür wächst, dass die Zahl der günstigen zu der Zahl der ungünstigen Beobachtungen das wahre Verhältniss erreicht, und zwar in dem Maasse, dass diese Wahrscheinlichkeit schliesslich jeden beliebigen Grad der Gewissheit übertrifft, oder ob das Problem vielmehr, so zu sagen, seine Asymptote hat, d. h. ob ein bestimmter Grad der Gewissheit, das wahre**

Edmund Halley legt seiner Abhandlung, von welcher *Cantor* (a.a.O., Bd. 3, S. 46) sagt, dass sie „auf verhältnissmässig kleinem Raume eine grosse Menge der fruchtbarsten Gedanken mehr angedeutet als entwickelt“ enthält, die Annahme zu Grunde, dass die Bevölkerungsziffer stationär sei, d. h. jährlich ebenso viele Geburten als Todesfälle vorkommen, und dass jedes Jahr gleichviele Todesfälle in einem bestimmten Alter eintreten. *Halley* war auf Grund von Geburts- und Todeslisten der Stadt Breslau, welche für die 5 Jahre 1687 – 1691 veröffentlicht worden waren, zu seinen Annahmen geführt worden. 6193 Geburten standen 5869 Todesfällen gegenüber; der jährliche Ueberschuss der Geburten beträgt also ungefähr 64, konnte aber schwerlich eine Zunahme der Bevölkerungsziffer hervorbringen, da ungefähr ebenso viele Erwachsene jährlich zum Kriegsdienste ausgehoben wurden. Nach *Halley*’s Annahmen stellt also die Todesliste eines Jahres zugleich eine Sterblichkeitstafel dar. Seine so erhaltene Sterblichkeitstafel benutzt er dann zur Beantwortung verschiedener Fragen über Lebenswahrscheinlichkeiten, welche er in die Wissenschaft eingeführt hat und welche Wahrscheinlichkeiten a posteriori sind. Die Annahme einer stationären Bevölkerungsziffer ist aber durch die Volkszählungen als falsch nachgewiesen worden. [Vgl. *Cantor*, a.a.O., Bd. 3, S. 45 – 49 und die “Politische Arithmetik” desselben Verfassers (Leipzig, 1898), in welcher sich auf S. 87 u. folg. Eine kurze Uebersicht der Weiterentwicklung dieser Fragen findet.]

Verhältniss der Fälle gefunden zu haben, vorhanden ist, welcher auch bei beliebiger Vermehrung der Beobachtungen niemals überschritten werden kann, z. B. dass wir niemals über $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ oder $\frac{3}{4}$, der Gewissheit hinaus Sicherheit erlangen können, das wahre Verhältniss der Fälle ermittelt zu haben. Damit noch durch ein Beispiel deutlich werde, was ich meine, nehme ich an, es seien in einer Urne ohne dein Vorwissen 3000 weisse und 2000 schwarze Steinchen und du wollest durch Versuche das Verhältniss derselben bestimmen, indem du ein Steinchen nach dem andern herausnimmst (jedoch so, dass du jedes gezogene Steinchen wieder zurücklegst, ehe du ein neues herausnimmst, damit die Zahl der Steinchen in der Urne nicht kleiner wird) und beobachtest, wie oft ein weisses, wie oft ein schwarzes Steinchen herauskommt. Es fragt sich nun, ob du dies so oft würdest thun können, damit es zehn-, hundert-, thausendmal u.s.w. wahrscheinlicher (d.h. schliesslich moralisch gewiss) wird, dass die Zahl der Züge, mit welchen du ein weisses Steinchen ziehst, zu der Zahl derer, mit welchen du ein schwarzes ziehst, dasselbe Verhältnis $1\frac{1}{2}$, welches die Zahlen der Steinchen (oder der Fälle) selbst zueinander haben, annimmt, als dass diese Zahlen irgend ein anderes, davon verschiedenes Verhältniss bilden. Ist dies nicht der Fall, so gestehe ich, dass es um unsern Versuch, die Zahl der Fälle durch Beobachtungen zu ermitteln, schlecht bestellt ist. Wenn es aber der Fall ist und man schliesslich auf diese Weise moralische Gewissheit erhält (dass dies wirklich so ist, werde ich in dem folgenden Kapitel zeigen), so können wir die Zahlen der Fälle *a posteriori* fast ebenso genau finden, als wenn sie uns *a priori* bekannt wären. Und dies ist für das bürgerliche Leben, wo das moralisch Gewisse als absolut gewiss angesehen wird, nach Axiom 9 des Kapitels II hinreichend, um unsere Vermuthung in jedem beliebigen Zufallsgebiete nicht weniger wissenschaftlich zu leiten als bei den Glücksspielen. Denn wenn wir an Stelle der Urne z. B. die Luft oder den menschlichen Körper uns gesetzt denken, welche eine Unmenge der verschiedenartigsten Veränderungen und Krankheit gerade so in sich bergen, wie die Urne die Steinchen, so werden wir auch in gleicher Weise durch Beobachtungen bestimmen können, um wieviel leichter auf diesen Gebieten dieses als jenes Ereigniss eintritt.

Damit aber dies nicht unrichtig verstanden werde, ist noch zu bemerken, **dass wir das Verhältniss zwischen den Zahlen der Fälle, welches wir durch Beobachtungen zu bestimmen unternehmen, nicht absolut genau (denn so würde ganz das Gegentheil herauskommen und desto unwahrscheinlicher werden, dass das richtige Verhältniss gefunden sei, je mehr Beobachtungen gemacht wären), sondern nur mit einer bestimmten Annäherung erhalten, d. h. zwischen zwei Grenzen einschliessen wollen, welche aber beliebig nahe bei einander angenommen werden können**, Wenn wir in dem oben angeführten Beispiele der Urne mit den Steinchen zwei Verhältnisse, z. B. $\frac{301}{200}$ und $\frac{299}{200}$ oder $\frac{3001}{2000}$ und $\frac{2999}{2000}$, oder u.s.w., annehmen, von denen das eine wenig kleiner, das andere wenig grösser als $1\frac{1}{2}$ ist, so zeigt es sich, dass es mit jeder beliebigen Wahrscheinlichkeit wahrscheinlicher wird, dass das durch häufig wiederholte Beobachtungen gefundene Verhältniss innerhalb dieser Grenzen des Verhältnisses $1\frac{1}{2}$ liegt, als ausserhalb derselben.

Dieses ist das Problem, welches ich an dieser Stelle zu veröffentlichen mir vorgenommen habe, nachdem ich schon seit 20 Jahren dasselbe mit mir herumgetragen habe; seine Neuheit sowohl als auch sein ausserordentlich grosser Nutzen in Verbindung mit seiner ebenso grossen Schwierigkeit lässt alle übrigen Kapitel dieser Lehre an Wichtigkeit und Bedeutung gewinnen. Bevor ich aber auf seine Lösung eingehe, will ich kurz die Einwände widerlegen, welche einige Gelehrte[2] dagegen erhoben

---

[2] Dass gegen *Bernoulli*'s gewaltige Ideen Einwände erhoben wurden, kann nicht Wunder nehmen, eher freilich, dass sie von *Leibniz* herrührten, und ihn wird *Bernoulli* hauptsächlich im Auge gehabt haben, wenn er an dieser Stelle die Einwände anführt und sie widerlegt. Denn alle diese Einwände hatte *Leibniz* brieflich erhoben, nachdem ihm *Bernoulli* seine Ideen mitgetheilt hatte. Das Beispiel der *Ludolph*'schen Zahl lässt *Leibniz* nicht gelten, da bei dieser Zahl jede neue Decimalstelle eine grössere Annäherung bringe, während man aber von jeder neuen Erfahrung nicht wisse, ob sie die frühere Annahme um so richtiger erscheinen lasse. Im letzten Briefe geht *Bernoulli* auf eine weitere Vertheidigung seiner Wahrscheinlichkeit a posteriori gar nicht ein, sondern bittet nur um Zusendung der Abhandlung von *de Witt*. –
Archimedes (ca. 287 – 212 v. Chr.) schloss π zwischen die Grenzen 3 1/7 und 3 10/71 ein, *Adriaen Anthonisz* mit dem Beinamen *Metius* (1527 – 1607) gab die Grenzwerthe 3 15/106 und 3 17/120, aus denen er durch Addition der Zähler und der Nenner den auf 6 Decimalstellen genauen Werth von π erhielt:

$$\pi = 3\frac{15+17}{106+120} = 3\frac{16}{113} = 3{,}141592...$$

Ludolph van Ceulen (1540 – 1610) berechnete π auf 35 Decimalstellen genau. *Bernoulli* hätte haben.

1. Zuerst machen sie den Einwurf, dass das Verhältnis zwischen den Steinchen von anderer Beschaffenheit sei als dasjenige zwischen den Krankheiten und den Luftveränderungen; die Zahl jener sei bestimmt, die Zahl dieser aber unbestimmt und unsicher.

Darauf antworte ich: Beide sind hinsichtlich unserer Erkenntnis gleich ungewiss und unbestimmt. Dass aber irgend ein Ding an sich und seiner Natur nach ungewiss und unbestimmt beschaffen sei, kann von uns ebenso wenig verstanden werden, als wir verstehen können, dass Gott etwas zugleich erschaffen und nicht erschaffen hat; denn alles was Gott geschaffen hat, hat er gerade dadurch, dass er es geschaffen hat, auch bestimmt.

2. Zweitens werfen sie ein, die Zahl der Steinchen sei endlich, die der Krankheiten aber unendlich.

Ich erwidere hierauf: Die letztere Zahl ist eher erstaunlich gross als unendlich; aber zugegeben, dass sie unendlich gross sei, so ist bekannt, dass auch zwischen zwei unendlich grossen Zahlen ein bestimmtes Verhältniss bestehen kann, welches sich durch endliche Zahlen entweder genau oder wenigstens so genau, als nur irgend wünschenswerth ist, ausdrücken lässt. So hat immer die Peripherie eines Kreises ein bestimmtes Verhältniss zu seinem Durchmesser, welches zwar nur durch unendlich viele Decimalstellen der *Ludolph*'schen Zahl genau angegeben wird, aber doch von *Archimedes*, *Metius* und *Ludolph* selbst in Grenzen eingeschlossen ist, welche für den Gebrauch völlig ausreichen. Daher hindert nichts daran, das Verhältniss zwischen zwei unendlich grossen Zahlen, welche durch endliche Zahlen sehr annähernd genau dargestellt werden können, durch eine endliche Anzahl von Beobachtungen zu bestimmen.

3. Drittens machen sie den Einwand, dass die Zahl der Krankheiten nicht beständig dieselbe sei, sondern dass täglich neue entstehen.

Darauf entgegne ich: Dass sich im Laufe der Zeiten die Krankheiten vermehren können, leugne ich nicht, und sicherlich würde derjenige, welcher aus heutigen Beobachtungen auf antediluvianische Zeiten zurückschliessen wollte, gewaltig von der Wahrheit abirren. Daraus folgt aber nichts weiter als dass bisweilen neue Beobachtungen angestellt werden müssen; auch bei den Steinchen würden neue Beobachtungen nothwendig werden, wenn man

---

hier noch verschiedene andere Autoren mit dem gleichen Rechte wie *Metius* anführen können.

annehmen müsste, dass ihre Anzahl in der Urne sich geändert hätte.

Kapitel V.
Lösung des vorigen Problems.

Um den weitläufigen Beweis mit möglichster Kürze und Klarheit zu führen, versuche ich alles rein mathematisch zu formuliren und schicke zu dem Zwecke die folgenden Hülfssätze voraus; sind diese bewiesen, so besteht alles Uebrige in ihrer blossen Anwendung.

Hülfssatz 1. Es sei die Reihe der natürlichen Zahlen

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r-1,\ r,\ r+1,\ \ldots,\ r+s$$

gegeben, wo r irgend eine mittlere Zahl und $r-1$ und $r+1$ die dieser links und rechts benachbarten Zahlen bezeichnen. Diese Reihe werde fortgesetzt, bis ihr letztes Glied ein beliebiges ganzzahliges Vielfaches von $r+s$, z. B. $nr+ns$ ist, wodurch die neue Reihe entsteht:

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ nr-n,\ \ldots\ nr,\ \ldots,\ nr+n,\ \ldots,\ nr+ns.$$

Mit wachsendem n steigt auf diese Weise sowohl die Anzahl der zwischen nr und $nr+n$, bez. $nr-n$ gelegenen Glieder, als auch die Anzahl der Glieder, welche sich von den Grenzgliedern $nr+n$, bez. $nr-n$ bis zu den äussersten Gliedern $nr+ns$ und 0 erstrecken. Niemals aber, wie gross auch die Zahl n gewählt werden mag, übertrifft die Anzahl der Glieder, welche grösser als $nr+n$ sind, mehr als $(s-1)$-mal die Anzahl der zwischen nr und $nr+n$ gelegenen Glieder und die Anzahl der Glieder, welche kleiner als $nr-n$ sind, mehr als $(r-1)$mal die Anzahl der zwischen $nr-n$ und nr gelegenen Glieder.

Beweis. Die Anzahl der Glieder, welche grösser als $nr+n$ sind, ist gleich $n(s-1)$ und der Glieder, welche kleiner als $nr-n$ sind, ist gleich $n(r-1)$. Die Anzahl der zwischen nr (ausschliesslich) und einer der beiden Grenzen (einschliesslich) gelegenen Zahlen ist gleich n. Es verhält sich aber stets

$$n(s-1) : n = s-1 : 1$$

und

$$n(r-1) : n = r-1 : 1.$$

(Vgl. *Cantor* a.a.O., Bd. 2, S. 549 u. folg.)

Daraus folgt, u.s.w.

Hülfsatz 2. Wenn das Binom $r+s$ in irgendeine ganzzahlige Potenz erhoben wird, so hat die Entwickelung immer ein Glied mehr als der Potenzexponent Einheiten.

Denn es besteht die Entwickelung eines Quadrates aus drei, eines Cubus aus vier, eines Biquadrates aus fünf Gliedern, und so fort.

Hülfssatz 3. In der Entwickelung einer Potenz des Binoms $r+s$, deren Exponent irgend ein ganzzahliges Vielfaches von $r+s=t$, z.B. $n(r+s)=nt$ ist, hat erstens ein Glied M dann den grössten Werth von allen Gliedern, wenn die Anzahl aller ihm vorangehenden zu der aller ihm folgenden Glieder sich wie s zu r verhält, oder – was auf dasselbe hinauskommt – wenn in ihm die Exponenten von r und s sich wie r zu s verhalten und jedes dem Gliede M auf der rechten oder linken Seite näherstehende Glied einen grösseren Werth als ein entfernteres Glied auf der gleichen Seite. Zweitens hat das Glied M zu einem näheren Gliede ein kleineres Verhältnis, als – bei gleichem Abstande der Glieder – dieses letztere zu dem entfernteren[3].

Beweis. 1. Den Mathematikern ist wohlbekannt, dass die $(nt)^{te}$ Potenz des Binoms $r+s$ sich durch die folgende Reihe darstellen lässt:

$$(r+s)^{nt} = r^{nt} + \binom{nt}{1} r^{nt-1}s + \binom{nt}{2} r^{nt-2}s^2 + \ldots + \binom{nt}{2} r^2 s^{nt-2} + \binom{nt}{1} rs^{nt-1} + s^{nt},$$

in welcher die Exponenten von r fortwährend abnehmen, während die von s wachsen, und die Coefficienten des ersten und letzten, zweiten und vorletzten Gliedes, u.s.w. mit einander übereinstimmen. Da nun die Anzahl aller Glieder ausser M (nach Hülssatz 2) gleich $nt = nr + ns$ ist und nach der Voraussetzung sich die Anzahl der M vorangehenden Glieder zu der ihm nachfolgenden wie s zu r verhält, so muss die Anzahl der vorangehenden Glieder gleich ns und der nachfolgenden gleich nr sein. Mithin ist nach dem Bildungsgesetze der Reihe:

$$M = \binom{nt}{ns} r^{nr} s^{ns} = \binom{nt}{nr} r^{nr} s^{ns}.$$

[3] Die sämmtlichen Kapitel dieses vierten Abschnittes sind wortgetreu wiedergegeben, um *Bernoulli*'s Gedanken auch nicht im geringsten zu verändern. Nur in formaler Beziehung habe ich [der Übersetzer und Herausgeber] in den Beweisen der Hülfssätze (3), (4) und (5) kleine Aenderungen vorgenommen, welche die Uebersichtlichkeit derselben wesentlich erleichtern dürften, und welche vornehmlich in der Ersetzung von L und A (ohne Index) durch die mit Indices versehenen Buchstaben L_a und R_a und der Ersetzung von Worten durch Formeln bestehen. *Bernoulli* ist, da ihm eine geeignete Bezeichnung mangelt, oft gezwungen, weitläufig und schwer verständlich mit Worten Schlüsse beschreiben zu müssen, welche sich durch

Bezeichnet man mit L_1, L_2, L_3, ... der Reihe nach die links von M stehenden Glieder und mit R_1, R_2, R_3, ... die entsprechenden Glieder rechts, so folgt weiter:

$$L_1 = \binom{nt}{ns-1} r^{nr+1} s^{ns-1}, R_1 = \binom{nt}{nr-1} r^{nr-1} s^{ns+1};$$

$$L_2 = \binom{nt}{ns-2} r^{nr+2} s^{ns-2}, R_2 = \binom{nt}{nr-2} r^{nr-2} s^{ns+2};$$

....

Hieraus ergibt sich durch Division:

$$\frac{M}{L_1} = \frac{(nr+1)s}{nsr}, \quad \frac{M}{R_1} = \frac{(ns+1)r}{nrs};$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{(nr+2)s}{(ns-1)r}, \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{(ns+2)r}{(nr-1)s};$$

...

Nun ist aber

$$(nr+1)s > nsr \quad , \quad (ns+1)r > nrs \quad ,$$

$$(nr+2)s > (ns-1)r, \quad (ns+2)r > (nr-1)s,$$

...

folglich ist

$$M > L_1, \quad M > R_1;$$

$$L_1 > L_2, \quad R_1 > R_2;$$

... W. z. b. w.

2. Es ist ohne weiteres ersichtlich, dass

$$\frac{nr+1}{ns} < \frac{nr+2}{ns-1}, \quad \frac{ns+1}{nr} < \frac{ns+2}{nr-1}$$

ist, folglich ist auch

$$\frac{(nr+1)s}{nsr} < \frac{(nr+2)s}{(ns-1)r}, \quad \frac{(ns+1)r}{nrs} < \frac{(ns+2)r}{(nr-1)s}$$

oder, was dasselbe ist,

$$\frac{M}{L_1} < \frac{L_1}{L_2}, \quad \frac{M}{R_1} < \frac{R_1}{R_2}.$$

In gleicher Weise lässt sich zeigen, dass

Formeln knapp und übersichtlich darstellen lassen.

$$\frac{L_1}{L_2} < \frac{L_2}{L_3} < \ldots, \quad \frac{R_1}{R_2} < \frac{R_2}{R_3} < \ldots$$

ist. Folglich hat das grösste Glied M zu einem näherstehenden Gliede ein kleineres Verhältnis als dieses zu einem entfernteren auf der gleichen Seite, wenn die beiden Intervalle gleich sind. W. z. b. w.

Hülfssatz 4. In der Potenz eines Binoms mit dem Exponenten nt kann die Zahl n so gross genommen werden, dass die Verhältnisse des grössten Gliedes M zu zwei anderen Gliedern L_n und R_n, welche die n^{ten} links und rechts von M stehenden Glieder der Potenzentwickelung sind, grössere Werthe haben, als irgend ein gegebenes Verhältnis.

Beweis. Da nach dem vorhergehenden Satze M den Werth hat:

$$M = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nr+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots ns} r^{nr} s^{ns}$$
$$= \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(ns+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots nr} r^{nr} s^{ns},$$

so haben nach dem Bildungsgesetze der Reihe die Glieder L_n und R_n die Werthe:

$$L_n = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nr+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(ns-n)} r^{nr+n} s^{ns-n},$$
$$R_n = \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(ns+n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(nr-n)} r^{nr-n} s^{ns+n}.$$

Hieraus folgt, nachdem die gemeinsamen Factoren durch Division entfernt sind:

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(nr+n)(nr+n-1)(nr+n-2)\ldots nr}{(ns-n+1)(ns-n+2)(ns-n+3)\ldots ns} \frac{s^n}{r^n},$$
$$\frac{M}{R_n} = \frac{(ns+n)(ns+n-1)(ns+n-2)\ldots ns}{(nr-n+1)(nr-n+2)(nr-n+3)\ldots nr} \frac{r^n}{s^n}$$

oder, nachdem r^n und s^n auf die einzelnen Factoren der Coefficienten gleichmässig vertheilt sind, was möglich ist, da die Zähler und Nenner der Coefficienten gerade je n Factoren besitzen:

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(nrs+ns)(nrs+ns-s)(nrs+ns-2s)\ldots(nrs+s)}{(nrs-nr+r)(nrs-nr+2r)(nrs-nr+3r)\ldots nrs},$$
$$\frac{M}{R_n} = \frac{(nrs+nr)(nrs+nr-r)(nrs+nr-2r)\ldots(nrs+r)}{(nrs-ns+s)(nrs-ns+2s)(nrs-ns+3s)\ldots nrs}.$$

Die Verhältnisse erhalten aber einen unendlich grossen Werth, wenn n unendlich gross wird; denn es verschwinden dann die Zahlen 1, 2, 3, ... gegen n, und die Factoren $nr \pm n \mp 1,2,3,...$ haben denselben Werth wie $nr \pm n$ und $ns \mp n \pm 1,2,3,...$ wie $ns \mp n$, sodass man, wenn man noch Zähler und Nenner durch n dividirt, erhält[4]:

$$\frac{M}{L_n} = \frac{(rs+s)(rs+s)(rs+s)...rs}{(rs-r)(rs-r)(rs-r)...rs},$$

$$\frac{M}{R_n} = \frac{(rs+r)(rs+r)(rs+r)...rs}{(rs-s)(rs-s)(rs-s)...rs}.$$

Die beiden Grössen sind offenbar aus ebenso vielen Brüchen $\frac{rs+s}{rs-r}$, bez. $\frac{rs+r}{rs-s}$ zusammengesetzt, als Factoren im Zähler (oder Nenner) vorhanden sind, deren Anzahl gleich n, d.h. unendlich gross ist. Daher sind jene beiden Verhältnisse die unendlich hohen Potenzen der Brüche $\frac{rs+s}{rs-r}$ und $\frac{rs+r}{rs-s}$ und folglich selbst unendlich gross. Wer diesen Schluss bezweifeln sollte, nehme zwei unendliche fallende geometrische Reihen mit den Quotienten $\frac{rs-r}{rs+s}$ und $\frac{rs-s}{rs+r}$; in diesen ist das Verhältnis des ersten zum dritten, vierten, fünften, ..., letzten Gliede gleich dem zwei-, drei-, vier-, ..., unendlich oftmal in sich selbst multiplicirten Bruche $\frac{rs+s}{rs-r}$, bez. $\frac{rs+r}{rs-s}$. Offenbar aber ist das Verhältnis des ersten zum letzten Gliede, welches in einer unendlich fallenden Reihe gleich Null sein muss, unendlich gross. Daher folgt, dass auch die unendlich hohen Potenzen von $\frac{rs+s}{rs-r}$ und $\frac{rs+r}{rs-s}$ einen unendlich grossen Werth haben. Mithin ist nachgewiesen, dass in der Entwickelung der unendlich hohen Potenz eines Binoms das grösste Glied M zu zwei Gliedern L_n und R_n Verhältnisse hat, welche grösser sind als jedes angebbare Verhältnis. W. z. b. w.

H ü l f s s a t z 5. In der Potenz eines Binoms mit dem Exponenten nt kann die

---

[4] Bernoulli verwendet statt $\pm$ und $\mp$ die Zeichen und , welche sich in dieser Bedeutung sonst bei keinem Mathematiker zu finden scheinen. *Leibniz* hat zwar das letztere Zeichen in seiner C h a r a c t e r i s t i c a g e o m e t r i c a von 1679 benutzt; dort bedeutet es aber congruent.
Dass $\frac{M}{L_n}$ und $\frac{M}{R_n}$ für $n = \infty$ unendlich grosse Werthe haben, lässt sich mit Hülfe der Ungleichungen: $(nr+1)s > nsr$, ..., $(ns+1)r > nrs$, ... leicht und streng zeigen; *Bernoulli*'s hierfür gegebener Beweis ist mindestens in formaler Beziehung unbefriedigend. Der in der Anmerkung gegebene Beweis der Hülfssätze (4) und (5) ist dagegen völlig streng.

Zahl n so gross gewählt werden, dass die Summe aller Glieder von dem grössten M an nach beiden Seiten bis zu den Gliedern L_n und R_n (einschliesslich) zur Summe aller übrigen Glieder, welche nach beiden Seiten ausserhalb dieser Grenzen L_n und R_n liegen, ein Verhältnis von grösserem Werthe als irgend ein gegebenes bildet.

Beweis. Da nach der zweiten Behauptung des Hülfssatzes 3

$$\frac{M}{L_1} < \frac{L_n}{L_{n+1}}, \frac{L_1}{L_2} < \frac{L_{n+1}}{L_{n+2}}, \frac{L_2}{L_3} < \frac{L_{n+2}}{L_{n+3}}, \ldots$$

ist, so ist auch

$$\frac{M}{L_n} < \frac{L_1}{L_{n+1}} < \frac{L_2}{L_{n+2}} < \frac{L_3}{L_{n+3}} < \ldots .$$

Nach Hülfssatz 4 wird aber für einen unendlich grossen Werth von n der Werth von $\frac{M}{L_n}$ unendlich gross und folglich haben umsomehr die Verhältnisse $\frac{L_1}{L_{n+1}}, \frac{L_2}{L_{n+2}}, \frac{L_3}{L_{n+3}}, \ldots$ unendlich grosse Werthe. Daraus folgt aber weiter:

$$\frac{L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n}{L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+3} + \ldots + L_{2n}} = \infty ,$$

d.h. die Summe aller Glieder zwischen dem grössten Gliede M und dem Gliede L_n (einschliesslich) ist unendlich oft grösser als die Summe ebenso vieler Glieder, welche nach links auf L_n folgen. Da aber nach Hülfssatz 1 die Anzahl aller Glieder links von L_n die Anzahl der zwischen L_n und M gelegenen Glieder nur $(s-1)$-mal (d.H. eine endliche Anzahl mal) übertrifft, und da nach Hülfssatz 3 die Glieder um so kleiner werden, je weiter sie von L_n nach links abstehen, so übertreffen alle Glieder innerhalb L_n (einschliesslich) und M (auch wenn dieses nicht mitgerechnet wird) zusammen doch noch unendlich oftmal alle links von L_n stehenden Glieder.

Auf gleiche Weise wird auch gezeigt, dass alle zwischen R_n (einschliesslich) und M (auch wenn dieses nicht mitgerechnet wird) gelegenen Glieder zusammen unendlich oftmal alle Glieder übertreffen, welche rechts von R_n stehen und deren Anzahl die der ersteren nur $(r-1)$-mal (nach Hülfssatz 1) übertrifft. Daher übertrifft schliesslich die Summe aller zwischen den Grenzgliedern L_n und R_n gelegenen Glieder, wobei die Grenzglieder mitgerechnet werden, das grösste Glied M aber weggelassen ist, unendlich oftmal die Summe aller ausserhalb dieser Grenzen stehenden Glieder; und um so mehr gilt dieser Satz, wenn zu der ersten Summe das Glied M noch hinzugenommen wird. W. z. b. w.

Anmerkung. Gegen der vierten und fünften Hülfssatz könnte von denen, welche sich nicht mit Unendlichkeitsbetrachtungen befreundet haben, der folgende Einwurf gemacht werden: Wenn auch in dem Falle eines unendlich grossen Werthes der Zahl n die Factoren der Ausdrücke, welche die Verhältnisse $\frac{M}{L_n}$ und $\frac{M}{R_n}$ darstellen, nämlich $nr \pm n \mp 1,2,3,...$ und $ns \mp n \pm 1,2,3,...$ den gleichen Werth wie $nr \pm n$ und $ns \mp n$ haben, da die Zahlen 1, 2, 3, ... in den einzelnen Factoren gegenüber dem übrigen Theile verschwinden, so liefern doch alle diese Zahlen in einander multiplicirt (wegen der unendlich vielen Factoren) auch eine unendlich grosse Zahl und also wird von den unendlich hohen Potenzen der Brüche $\frac{rs+s}{rs-r}$ und $\frac{rs+r}{rs-s}$ unendlich viel subtrahirt, wodurch sich endliche Zahlen ergeben können. Diesen Bedenken kann ich nicht besser entgegentreten, als dass ich jetzt die Berechnung für einen endlichen Werth von n wirklich durchführe; ich werde zeigen, dass auch in einer endlich hohen Potenz des Binoms die Summe der innerhalb der Grenzglieder L_n und R_n (einschliesslich) stehenden Glieder zur Summe aller übrigen Glieder ein Verhältnis hat, welches jedes beliebig gross gegebene Verhältnis c an Werth übertrifft. Ist dies aber gezeigt, so muss der Einwand nothwendiger Weise in sich zusammenfallen.

Zu dem Zwecke nehme ich (für die links von M stehenden Glieder) irgend ein beliebiges Verhältnis, welches kleiner als $\frac{rs+s}{rs-r}$ ist, also z.B. $\frac{rs+s}{rs} = \frac{r+1}{r}$ und multiplicire dieses so oft (m-mal) in sich, dass das Product gleich oder grösser als $c(s-1)$ ist, also

$$\frac{(r+1)^m}{r^m} \geq c(s-1).$$

Um m zu bestimmen, hat man:

$$m \log(r+1) - m \log r \geq \log[c(s-1)],$$

also ist

$$m \geq \frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1)-\log r}$$

zu wählen. Nun wurde in dem vierten Hülfssatze das Verhältnis $\frac{M}{L_n}$ aus dem Producte der Brüche:

$$\frac{nrs+ns}{nrs-nr+r}, \frac{nrs+ns-s}{nrs-nr+2r}, \frac{nrs-ns+2s}{nrs-nr+3r}, \ldots, \frac{nrs+s}{nrs}$$

bestimmt; jeder einzelne dieser Factoren ist aber kleiner als $\frac{rs+s}{rs-r}$ und kommt diesem Bruche um so näher, je grösser n genommen wird. Folglich muss einmal, wenn n nur passend gewählt wird, einer dieser Brüche gleich $\frac{r+1}{r}$ werden. Bezeichnet man den Platz dieses Bruches in der Reihe der Factoren mit m, so ist:

$$\frac{r+1}{r} = \frac{nrs+ns-(m-1)s}{nrs-nr+ms},$$

folglich:

$$n = m + \frac{ms-s}{r+1},$$

$$nt = mt + \frac{mst-st}{r+1}.$$

Ich behaupte nun, dass dieser für nt gefundene Werth den Exponenten der Potenz angiebt, auf welche man das Binom $(r + s)$ erheben muss, wenn das grösste Glied M in der Entwickelung das Grenzglied L_n mehr $c(s - 1)$-mal übertreffen soll. Durch diese Annahme wird nämlich der m^{te} Bruch in dem obigen Producte gleich $\frac{r+1}{r}$ und nach Voraussetzung ist $\frac{(r+1)^m}{r^m} \geq c(s-1)$; alle Brüche aber, welche dem m^{ten} in dem Producte vorausgehen, sind grösser als $\frac{r+1}{r}$ und alle ihm nachfolgenden sind mindestens grösser als 1. Folglich übertrifft das Product aller Glieder sicher $\frac{(r+1)^m}{r^m}$ und umsomehr $c(s - 1)$, da dieses Product gleich $\frac{M}{L_n}$ ist, so folgt:

$$M > c(s-1)L_n.$$

Ferner ist, wie oben gezeigt war:

$$\frac{M}{L_n} < \frac{L_1}{L_{n+1}} < \frac{L_2}{L_{n+2}} < \frac{L_3}{L_{n+3}} < \ldots < \frac{L_n}{L_{2n}} \quad ,$$

folglich ist auch:

$$L_1 > c(s-1)L_{n+1},$$

$$L_2 > c(s-1)L_{n+2},$$

$$L_3 > c(s-1)L_{n+3},$$

$$\ldots$$

$$L_n > c(s-1)L_{2n},$$

und summirt:

$$L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n > c(s-1)[L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+3} + \ldots L_{2n}].$$

Da aber die Glieder von M an fortwährend abnehmen und da die Anzahl der links von L_n stehenden Glieder nicht mehr als (s – 1)-mal die Anzahl der Glieder L_1, L_2, ..., L_n übertrifft, so folgt weiter, dass

$$L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_n > c[L_{n+1} + L_{n+2} + L_{n+3} + \ldots]$$

ist, wo jetzt in der Klammer der rechten Seite alle links von L_n stehenden Glieder vorkommen.

In gleicher Weise verfahre ich in Bezug auf die rechts von M stehenden Glieder. Ich nehme jetzt das Verhätniss:

$$\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$$

und finde, indem ich m so bestimme, dass

$$\frac{(s+1)^m}{s^m} \geq c(r-1)$$

ist:

$$m \geq \frac{\log[c(r-1)]}{\log(s+1) - \log s} \, .$$

Darauf setze ich in der Reihe der Brüche:

$$\frac{nrs+nr}{nrs-ns+s}, \frac{nrs+nr-r}{nrs-ns+2s}, \frac{nrs+nr-2r}{nrs-ns+3s}, \ldots, \frac{nrs+r}{nrs},$$

welche das Verhältnis $\frac{M}{R_n}$ bestimmen, den m^{ten} Bruch, also

$$\frac{nrs+nr-(m-1)r}{nrs-ns+ms} = \frac{s+1}{s},$$

woraus sich ergiebt:

$$n = m + \frac{mr - r}{s + 1}$$

und

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}.$$

Hierauf wird genau auf dieselbe Art wie vorher gezeigt, dass in dem zu dieser Potenz nt erhobenen Binome $r + s$ das grösste Glied M das rechte Grenzglied R_n mehr als $c(r-1)$-mal übertrifft, und weiter dass die Summe aller zwischen M (ausschliesslich) und R_n (einschliesslich) befindlichen Glieder die Summe aller übrigen Glieder, deren Anzahl nur gleich $(r-1)$-mal der Anzahl der ersteren Glieder ist, mehr als c-mal übertrifft.

Daher folgere ich schliesslich, dass die Summe aller Glieder zwischen L_n und R_n (einschliesslich) um mehr als c-mal grösser ist als die Anzahl aller übrigen Glieder, wenn das Binom $r + s$ zu der Potenz erhoben wird, deren Exponent gleich der grösseren der beiden Zahlen

$$mt + \frac{mst - st}{r + 1} \quad \text{und} \quad mt + \frac{mrt - rt}{s + 1}$$

ist. Es ist also eine endlich hohe Potenz gefunden, welche die gewünschte Eigenschaft besitzt. W. z. b. w.

Nun folgt endlich der Satz, wegen dessen alle bisherigen Betrachtungen angestellt worden sind und dessen Beweis nur die Anwendung der aufgestellten Hülfssätze erfordert. Um aber lästige Umschreibungen zu vermeiden, nenne ich die Fälle, in welchen irgend ein Ereignis eintreten kann fruchtbare oder günstige und die Fälle, in welchen dasselbe Ereignis nicht eintreten kann, unfruchtbare oder ungünstige. Ebenso nenne ich die Versuche und Beobachtungen fruchtbare oder günstige, in welchen einer der günstigen Fälle eintritt, und unfruchtbare oder ungünstige jene, in welchen der Eintritt eines der ungünstigen Fälle beobachtet wird.

Satz. Es möge sich die Zahl der günstigen Fälle zu der Zahl der ungünstigen Fälle genau oder näherungsweise wie $\frac{r}{s}$, also zu der Zahl aller Fälle wie $\frac{r}{r+s} = \frac{r}{t}$ - wenn $r + s = t$ gesetzt

wird – verhalten, welches letztere Verhältnis zwischen den Grenzen $\frac{r}{r+s}$ und $\frac{r-1}{t}$ enthalten ist. Nun können, wie zu beweisen ist, soviele Beobachtungen gemacht werden, dass es beliebig oft (z.B. *c*-mal) wahrscheinlicher wird, dass das Verhältnis der günstigen zu allen angestellten Beobachtungen innerhalb dieser Grenzen liegt als ausserhalb derselben, also weder grösser als $\frac{r+1}{t}$, noch kleiner als $\frac{r-1}{t}$ ist.

Beweis. Man setze die Anzahl aller anzustellenden Beobachtungen gleich nt und frage, wie gross die Hoffnung dafür ist, dass alle Beobachtungen, dann alle Beobachtunge bis auf eine, bis auf zwei, drei, vier, ... günstige sind. Da aber nach der Voraussetzung bei jeder Beobachtung t Fälle möglich sind, von welchen r günstige und s ungünstige sind, und da jeder Fall einer Beobachtung mit jedem Fale einer zweiten Beobachtung combinirt werden kann, die combinirten Fälle aber wieder mit jedem Falle einer dritten, vierten, ... Beobachtung verbunden werden können, so ist klar ersichtlich, dass hier die Regel, welche auf die Anmerkung zu der Aufgabe XII des ersten Theiles folgt, und deren zweiter Zusatz zur Anwendung kommen müssen. Danach findet man, dass die Hoffnung auf keine ungünstige Beobachtung gleich $\frac{r^{nt}}{t^{nt}}$, auf eine ungünstige Beobachtung gleich $\binom{nt}{1}\frac{r^{nt-1}s}{t^{nt}}$, auf zwei, drei, ... ungünstige Beobachtungen bez. gleich $\binom{nt}{2}\frac{r^{nt-2}s^2}{t^{nt}}$, $\binom{nt}{3}\frac{r^{nt-3}s^3}{t^{nt}}$, ... ist. Es werden also (indem man den gemeinsamen Nenner t^{nt} fortlässt) die Wahrscheinlichkeitsgrade[5] oder die Zahlen der Fälle, in welchen es sich

[5] Unter Wahrscheinlichkeitsgrad eines Ereignisses versteht also *Bernoulli* die Zahl der demselben günstigen Fälle. Dagegen gebraucht er nirgends für den Quotienten aus der Anzahl der günstigen Fälle dividirt durch die Anzahl aller möglichen Fälle den jetzt allgemein üblichen Ausdruck Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses, sondern stets Hoffnung, indem er das zu erwartende Ereignis gleich 1 setzt. Hoffnung hat also bei *Bernoulli* ganz die jetzige Bedeutung.
Bernoulli's Beweis seines Satzes ist vollkommen streng und hat vor allen später gegebenen kürzeren Beweisen, welche die *Stirling*'sche Formel: $n! = n^n e^{-n}\sqrt{2pn}$ (*n* eine sehr grosse Zahl) benutzen, den Vorzug, dass in ihm nur elementare Hülfsmittel und Betrachtungen verwendet werden.
In den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist als *Bernoulli*'sches Theorem gewöhnlich nicht das ursprüngliche Theorem angeführt, sondern das folgende, welches eine Umkehrung des ursprünglichen vorstellt:

„Sind p und q die einfachen und constanten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter Ereignisse A und B (also $p + q = 1$ und also $p = \frac{r}{t}, q = \frac{s}{t}$ in der *Bernoulli*'schen Bezeichnung), so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis A in einer sehr grossen Anzahl m von Versuchen in einer zwschen $mp + l$ liegenden unbekannten Anzahl m von Malen eintrifft, gleich

$$W = \sum_{V=mp-l}^{V=mp+l} \frac{m!}{V!(m-V)!} p^V q^{m-V} ,$$

oder es ist W die Wahrscheinlichkeit, dass die Abweichung $\frac{m}{m} - p$ zwischen $-\frac{l}{m}$ und $+\frac{l}{m}$ enthalten ist.“

Wenn sich diese Umkehrung des *Bernoulli*'schen Theorems auch nicht im Originale der Ars conjectandi in dieser Formulirung findet, so ist der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit W in *Bernoulli*'s Beweise seines Satzes implicite enthalten, wenn auch nicht als Formel geschrieben. Aus dem Kapitel IV geht aber deutlich hervor, dass *Bernoulli* gerade die Bedeutung dieser Umkehrung voll erkannt hat, welche erst die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf alle verschiedenen Gebiete des täglichen Lebens ermöglicht hat und es rechtfertigt, wenn man sich durch zahlreich wiederholte Beobachtungen Klarheit über ein Ereignis und die es bestimmenden Ursachen verschaffen will. Die ganze Statistik hat erst durch dieses Gesetz ihre wissenschaftliche Grundlage erhalten. Sicher hatte *Bernoulli* diese weiteren Untersuchungen in den fehlenden Kapiteln des IV. Theiles durchzuführen beabsichtigt.

An diesen Summenausdruck knüpft die aalytische Weiterentwickelung des *Bernoulli*'schen Theorems an, um welche sich *de Moivre* und *Laplace* die hervorragendsten Verdienste erworben haben. Letzterem verdankt der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit W seine heutige Integralform:

$$W = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^g e^{-x^2} dx + \frac{e^{-g^2}}{\sqrt{2pmpq}} ,$$

wo

$$g = \frac{l}{\sqrt{2mpq}}$$

ist. Wie *Eggenberger* neuerdings in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1893, S.110-181 (Beiträge zur Darstellung des *Bernoulli*'schen Theorems, der Gammafunction und des *Laplace*'schen Integrals) gezeigt hat, lässt sich die Restfunction noch mit dem Integrale vereinigen in der Form:

$$W = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^d e^{-x^2} dx ,$$

wo jetzt aber

$$d = \left(l + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{1}{2mpq}}$$

ist. Dort findet sich auch eine historische Untersuchung über die analytische Entwickelung des *Bernoulli*'schen Theorems, in welcher vor allem die Verdienste von *de Moivre* und die indirecte Mitwirkung von *Stirling* gewürdigt werden. Leider ist die Darstellung nicht klar und übersichtlich.

Während also die obige Umkehrung des *Bernoulli*'schen Theorems in den Lehrbüchern der Wahrscheinlichkeitsrechnung gewöhnlich als *Bernoulli*'sches Theorem selbst bezeichnet wird, findet man als Umkehrung desselben ein anderes Theorem, den Satz von *Bayes* bezeichnet: „Bezeichnen x und $1 - x$ die unbekannten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzten Ereignisse A und B, und ist in einer sehr grossen Anzahl $m = a + b$ von Versuchen das Ereignis A a-mal, das Ereignis B b-mal eingetroffen, so liegt der Werth von x mit der Wahrscheinlichkeit

$$W = \frac{2}{\sqrt{p}} \int_0^c e^{-x^2} dx$$

zwischen den Grenzen

ereignen kann, dass alle Beobachtungen günstige, dass alle bis auf eine, zwei, drei ... ungünstige Beobachtungen günstige sind, gleich

$$r^{nt}, \binom{nt}{1} r^{nt-1}s, \binom{nt}{2} r^{nt-2}s^2, \binom{nt}{3} r^{nt-3}s^3, \ \dots .$$

Diese Ausdrücke sind aber gerade die Glieder der nt^{ten} Potenz des Binoms $r + s$, welche in unseren Hülfssätzen betrachtet worden ist, und deshalb liegt alles Weitere klar zu Tage. Aus der Beschaffenheit dieser Reihenentwickelung ist sofort ersichtlich, dass die Anzahl der Fälle, in welchen von allen nt Beobachtungen $nr + n$, bez. $nr - n$ günstige und die übrigen ungünstige sind, durch die Glieder L_n und R_n gegeben werden, da diese ja um n Glieder von dem grössten Gliede M nach beiden Seiten hin abstehen. Folglich ist die Anzahl aller Fälle, in denen nicht mehr als $nr + n$ und nicht weniger als $nr - n$ günstige unter allen nt Beobachtungen sind, gleich der Summe aller Glieder der Entwickelung von $(r + s^{nt})$, welche zwischen L_n und R_n (einschliesslich der Grenzen) liegen. Die Anzahl aller übrigen Fälle, in welchen mehr als $nr + n$ oder weniger als $nr - n$ Beobachtungen günstige sind, ist gleich der Summe aller übrigen Glieder der Potenzentwickelung, welche ausserhalb des Intervalles L_n und R_n stehen. Da nun der Potenzexponent des Binoms so gross genommen werden kann, dass die Summe der Glieder, welche von den beiden Grenzen L_n und R_n (diese mitgerechnet) eingeschlossen sind, mehr als c-mal grösser ist als die Summe aller übrigen Glieder ausserhalb dieser Grenzen (nach Hülfssatz 4 und 5), so folgt: Es können so viele Beobachtungen angestellt werden, dass die Anzahl der Fälle, in welchen das Verältniss der günstigen zu allen überhaupt angestellten Beobachtungen die Grenzwerthe $\frac{nr+n}{nt}$ und

---

$$\frac{a}{m} \pm c\sqrt{\frac{2ab}{m^3}} \text{ .“}$$

Für das Integral W sind Tafeln berechnet, aus denen man den Werth von W für jeden Werth von c entnehmen kann, und welche in jedes grössere Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufgenommen sind. –

Das *Bernoulli*’sche Theorem wird häufig auch als das Gesetz der grossen Zahlen bezeichnet, welcher Name von *Poisson* (Recherches sur la probabilité, Paris 1837) herrührt.

In historischer Beziehung sei noch eine Aeusserung *Cardano*’s angeführt, welche an das *Bernoulli*’sche Theorem denken lässt. *Cardano* in seinem Buche De ludo aleae sagt, dass man im Verhältnisse $1 : (2^n - 1)$ darauf wetten könne, n-mal nach einander gerade Zahlen zu werfen, und dass bei unendlicher Anzahl der Würfe das Ergebnis mit der Erfahrung übereinstimmen werde, denn die Länge der Zeit sei es, welche alle Möglichkeiten zeigt (Vgl. die citirte Aeusserung und eine zweite ähnlichen Sinnes bei *Cantor*, a.a.O., Bd. 2, S. 495).

$\frac{nr-n}{nt}$ oder $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ nicht überschreitet, mehr als c-mal grösser ist als die Summe der übrigen Fälle, d.h. dass es mehr als c-mal wahrscheinlicher wird, dass das Verhältnis der Anzahl der günstigen zu der Anzahl aller Beobachtungen die Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ nicht überschreitet, als dass es sie überschreitet W. z. b. w.

Bei der speciellen Anwendung dieses Satzes auf Zahlen erkennt man leicht, dass, je grössere Zahlen für r, s und t genommen werden (wobei jedoch $\frac{r}{s}$ denselben Werth behalten muss), um so enger die Grenzen $\frac{r+1}{t}$ und $\frac{r-1}{t}$ des Verhältnisses $\frac{r}{t}$ aneinanderrücken. Wenn also das Verhältnis $\frac{r}{s}$ z.B. gleich $\frac{3}{2}$ ist, so setze ich nicht $r = 3$ und $s = 2$, sondern $r = 30$ und $s = 20$, also $t = r + s = 50$ oder $r = 300$ und $s = 200$, also $t = 500$. Im ersteren Falle sind die Grenzen

$$\frac{r+1}{t} = \frac{31}{50} \text{ und } \frac{r-1}{t} = \frac{29}{50}.$$

Nehme ich noch $c = 1000$, so bestimmen sich m und nt nach der Anmerkung für die Glieder auf der linken Seite von M:

$$m \geq \frac{\log[c(s-1)]}{\log(r+1) - \log r} = \frac{4{,}2787536}{0{,}0142405} < 301,$$

$$nt = mt + \frac{mst - st}{r+1} < 24728$$

und für die Glieder auf der rechten Seite von M:

$$m \geq \frac{\log[c(r-1)]}{\log(s+1) - \log s} = \frac{4{,}4623980}{0{,}0211893} < 211,$$

$$nt = mt + \frac{mrt - rt}{s+1} = 25550.$$

Daher ist es, nach dem oben bewiesenen Satze, mehr als 1000-mal wahrscheinlicher, dass bei 25 550 angestellten Beobachtungen das Verhältnis der günstigen zu allen Beobachtungen innerhalb der Grenzen $\frac{31}{50}$ und $\frac{29}{50}$ (diese einschliesslich) liegt als ausserhalb derselben. Setzt man c = 10 000 oder c = 100000, so findet man auf gleiche Weise, dass 31 258 Beobachtungen nothwendig sind, damit es 10 000-mal wahrscheinlicher ist, dass das angegebene Verhältnis innerhalb der genannten Grenzen liegt als ausserhalb derselben, und dass, damit es 100 000-mal wahrscheinlicher wird, 36 966 Beobachtungen nöthig sind, und so fort in das Unendliche, indem man immer ein Vielfaches von 5 708 Beobachtungen zu 25 550 hinzuaddirt.

Wenn also alle Ereignisse durch alle Ewigkeit hindurch fortgesetzt beobachtet würden (wodurch schliesslich die Wahrscheinlichkeit in volle Gewissheit übergehen müsste), so würde man finden, dass Alles in der Welt aus bestimmten Gründen und in bestimmter Gesetzmässigkeit eintritt, dass wir also gezwungen werden, auch bei noch so zufällig erscheinenden Dingen eine gewisse Nothwendigkeit, und sozusagen ein Fatum anzunehmen. Ich weiss nicht, ob hierauf schon *Plato* in seiner Lehre vom allgemeinen Kreislaufe der Dinge[6] hinzielen wollte, in welcher er behauptet, dass Alles nach Verlauf von unzähligen Jahrhunderten in den ursprünglichen Zustand zurückkehrt.

[6] Wahrscheinlich hat *Bernoulli* das sogenannte grosse Weltjahr im Auge, nach dessen Ablauf alle Dinge wiederkehren sollen. Das von ihm gebrauchte Wort apocatastasis scheint sich bei *Plato* nicht zu finden, sondern nur in der pseudoplatonischen Schrift Axiochos vorzukommen. Die Lehre von dem Kreislaufe aller Dinge war im Alterthume sehr verbreitet und findet sich schon bei *Herakleitos* von Ephesus und *Empedokles*; besonders entwickelt wurde sie von den Stoikern, wofür sich zahlreiche Belege bei *Zeller*, Philosophie der Griechen (Bd. 3, Theil 1, S.141) finden.