

Serie: Bestimmung von Ausfallwahrscheinlichkeiten - Teil 2

Marktdatenbasierte Verfahren

Ein Beitrag von Uwe Wehrspohn

Wie bereits im ersten Teil unserer Serie über Verfahren zur Bestimmung von Ausfallwahrscheinlichkeiten angeklungen, liegt der Focus der traditionellen Kreditrisikoanalyse bei der Beantwortung der Frage, ob eine Firma einen hinreichenden Cash Flow generieren kann, um ihre Zahlungsverpflichtungen vertragsgemäß zu erfüllen, auf der Durchsicht der grundlegenden bilanziellen oder bilanznahen Firmendaten. Die Auswertung des Branchenumfeldes, der Investitionspläne, der Bilanzen und der Managementqualität dienen als wesentlicher Input für die Einschätzung der Überlebenswahrscheinlichkeit eines Unternehmens über einen bestimmten Zeitraum oder über die Laufzeit einer Finanzierung.

Es ist eine bekannte Kritik dieses Ansatzes, dass eine Bilanzanalyse ein verzerrtes Bild der tatsächlichen finanziellen Situation und der Zukunftsaussichten einer Firma zeichnen kann. Bilanzierungsgrundsätze sind schwerpunktmäßig vergangenheitsorientiert und konservativ. Insbesondere beinhalten Bilanzdaten

keinen präzisen Begriff der Unsicherheit zukünftiger Erträge. Darüber hinaus besteht immer die Gefahr, dass durch „kreative Bilanzierung“ sogar vorsätzlich versucht wurde, die reale Situation des Unternehmens im Rahmen legaler Spielräume zu verschleiern. Schließlich ist eine Marktbewertung der Aktiva einer Firma extrem problematisch, wenn keine direkten marktbezogenen Informationen zur Verfügung stehen.

Als Alternative zur Analyse von Bilanzdaten in Kombination mit Experteneinschätzungen werden wir in diesem Artikel die rein marktdatenbasierten Verfahren zur Bestimmung von Ausfallwahrscheinlichkeiten, die auf Robert Merton bzw. auf Robert Jarrow und Stuart Turnbull zurückgehen und teilweise später ausgebaut wurden, in ihren wesentlichen Zügen vorstellen.

Das Merton-Modell

In seinem grundlegenden Artikel über Kreditrisikomanagement¹ schlägt Robert Merton auf Grundlage der Optionspreistheorie² von Black und Scholes³ eine Methode vor, wie die Verschuldung einer Firma nach Marktpreisen bewertet werden kann. Unter der Voraussetzung, dass Mertons Argumentation zutrifft, können einige seiner Ergebnisse als Ausgangspunkt für die Berechnung von Ausfallwahrscheinlichkeiten von Firmen dienen⁴.

Grundidee

Unter der vereinfachenden Annahme alle Verbindlichkeiten der betrachteten Firma seien Zerobonds mit derselben Maturität und Fälligkeit definiert Merton die Insolvenz einer Firma als das Ereignis, dass bei Fälligkeit der Schulden der Wert der Firma geringer ist als die nominelle Höhe der Zahlungsverpflichtungen. In diesem Fall würden die Eigentümer der Firma es vorziehen ihren Gläubigern die Firma zu übertragen statt die – höherwertigen – Schulden zu begleichen.

Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Unternehmens ist damit identisch mit der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignis zu beobachten.

Annahmen

Um das Modell zu schließen⁵ und Formeln abzuleiten, macht Merton eine Reihe technisch motivierter und fundamentaler Annahmen.

Die technischen Annahmen dienen in erster Linie dazu die mathematische Darstellung zu vereinfachen und ein handhabbares Formelwerk zu erhalten und können entsprechend abgeschwächt werden⁶. Sie lauten:

1. Der Markt ist „vollkommen“ (d.h. es gibt weder Transaktionskosten noch Steuern; jeder Investor glaubt, dass er eine beliebige Menge Aktiva zum Marktpreis kaufen und verkaufen kann; Geld kann zum selben Zinssatz aufgenommen werden, wie es verliehen wird; Leerverkäufe von Aktiva sind ohne Einschränkung erlaubt).
2. Der risikofreie Zinssatz ist konstant⁷.
3. Gegen die betrachtete Firma gibt es nur zwei Arten von Forderungen: (1) eine einzige, homogene Klasse von Schuldverschreibungen die aus-

⁵ Die Bestimmung verborgener Inputvariablen ist die zentrale Herausforderung im Merton-Modell. Mertons eigentliches Interesse bestand darin Schuldverschreibungen zu bewerten, die einem Ausfallrisiko ausgesetzt sind, und weniger darin Ausfallwahrscheinlichkeiten zu berechnen. Er selbst leitet deshalb nur die Inputs her, die für diesen Zweck notwendig sind. Die gemachten Annahmen sind auch unter diesem Gesichtspunkt zu sehen. Für die Berechnung von Ausfallwahrscheinlichkeiten ist eine weitere Inputvariable notwendig (der erwartete Ertrag des Firmenwertes). Ihre Bestimmung ist für die praktische Einsatzfähigkeit des Ansatzes von entscheidender Bedeutung.

⁶ Vgl. Robert Merton (1974).

⁷ Bei konstantem Zins gibt es keine Zinsstruktureffekte, so dass sich Zins- und Risikostruktureffekte bei der Bewertung von Schuldverschreibungen und der Berechnung von Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht vermischen.

¹ Robert Merton (1974)

² Dies ist auch der Grund weshalb das Merton-Modell auch oft als Optionspreismodell bezeichnet wird.

³ Fischer Black und Myron Scholes (1973)

⁴ Die Berechnung von Ausfallwahrscheinlichkeiten ist nicht von Merton selbst in dem angeführten Artikel vorgeschlagen worden. Sie ist vielmehr eine Erweiterung des Merton-Ansatzes durch die KMV Corporation (KMV), San Francisco, die unten und im nächsten Abschnitt eingehend diskutiert wird.

schließlich aus Zerobonds⁸ mit derselben Seniorität⁹ und Fälligkeit besteht. (2) Aktien als verbleibende Forderungen.

4. Die Firma ist nicht berechtigt neue Schuldverschreibungen (höherer Seniorität¹⁰) zu emittieren, Dividenden auszuzahlen oder vor Fälligkeit der Schulden eigene Aktien zurückzukaufen¹¹.
5. Es gilt das Modigliani-Miller-Theorem, d.h. es wird angenommen, dass der Wert einer Firma unabhängig ist von ihrer Kapitalstruktur¹².

Die grundlegenden und wesentlichen Annahmen sind die folgenden:

6. Der Firmenwert V folgt einem autoregressiven Prozess, d.h. alle Informationen, die notwendig sind, um die Verteilung der zukünftigen Entwicklung des Firmenwertes zu bestimmen, sind vollständig in seiner vergangenen Entwicklung enthalten. Insbesondere ist der Firmenwert damit nach Voraussetzung keinen exo-

genen Schocks ausgesetzt. Die Annahme, dass V einer geometrischen Brownschen Bewegung¹³

$$dV = \mu V dt + \sigma V dz$$

folgt, hat wiederum den Charakter einer Vereinfachung. Sie impliziert, dass zufällige Ertragschwankungen seriell unabhängig sind¹⁴ mit konstanter Volatilität und dass die Wachstumsraten des Firmenwertes zu jedem Zeitpunkt normalverteilt sind.

7. Der Wert E der Aktien der Firma (und damit auch der Wert der von der Firma emittierten Schuldverschreibungen) ist eine deterministische Funktion des Firmenwertes und der Zeit:

$$E = F(V, t)$$

Aufgrund von Itô's Lemma¹⁵ kann die stochastische Differentialgleichung, die die Verteilung von E definiert, deshalb explizit als

$$dE = \mu_E E dt + \sigma_E E dz_E$$

geschrieben werden. σ_E , μ_E und dz_E sind hierbei bekannte Funktionen von V , t , σ , μ und dz . Insbesondere wird von dieser Annahme impliziert, dass die Entwicklung der Aktienmärkte vollständig von dem stochastischen Verhalten der Firmenwerte bestimmt wird und dass es keine weitere Quelle

⁸ Merton selbst gibt auch eine Lösung für die Variante von Couponbonds an (vgl. Merton (1974), p. 467ff.).

⁹ Für die Berechnung von Ausfallwahrscheinlichkeiten ist es nicht erforderlich, dass alle Schuldverschreibungen dieselbe Seniorität besitzen, da Aktien grundsätzlich die nachrangigste Forderung an eine Firma darstellen. Die identische Seniorität ist nur relevant für die Bewertung der Schuldverschreibungen im Modell, da der erwartete Verlust eines Kredites über den „loss given default“ von der Seniorität abhängt.

¹⁰ Siehe Fußnote 9.

¹¹ Es würde hier ausreichen, dass der nominale Schuldenstand und die Höhe der Dividenden deterministische Funktionen der Zeit sind, so dass ihr Einfluss auf die Firmenwert- und Aktienkursentwicklung eindeutig vorhersagbar sind.

¹² Merton zeigt selbst, dass das Modigliani-Miller-Theorem für die Gültigkeit seiner Argumentation nicht zwingend erforderlich ist. Ohne das Theorem wäre lediglich die Darstellung der Lösung komplizierter, da sie zu einem System nichtlinearer stochastischer Differentialgleichungen führt (vgl. Merton (1974), p. 460).

¹³ μ ist die annualisierte kurzfristige erwartete Ertragsrate des Firmenwertes, σ die kurzfristige Standardabweichung der Ertragsrate des Firmenwertes und dz ist eine Brownsche Bewegung.

¹⁴ D.h. unabhängig in ihrer zeitlichen Entwicklung.

¹⁵ Itô's Lemma sagt aus, welche Verteilung Transformationen von stochastischen Differentialgleichungen (genauer: Itô-Prozessen) haben, wenn die Transformation von o.g. Typ ist. Vgl. Øksendal (1998), Theorem 4.1.2.

der Unsicherheit in den Aktienmärkten gibt, wie etwa Spekulation oder unvollständige Aggregation von Information.

8. Es kann ein selbstfinanzierendes Portfolio aus der Firma, Aktien der Firma und einer risikofreien Geldanlage konstruiert und arbitragefrei bewertet werden. Diese Annahme ist einerseits eine notwendige Bedingung für die Erfüllbarkeit der vorangegangenen Voraussetzung, denn wenn Arbitrage im Markt möglich wäre, würde der Wert der Aktien auch von der Größe der Arbitragegelegenheit abhängen, so dass Itô's Lemma ungültig wäre. Darüber hinaus ist die Annahme essentiell, um in Analogie zur Optionspreistheorie von Black-Scholes ohne weitere Einschränkung eine risikoneutrale Welt annehmen und die erwartete Ertragsrate μ des Firmenwertes eliminieren zu können.
9. Der Handel findet kontinuierlich statt, so dass das besagte Portfolio zu jedem Zeitpunkt gehedged werden kann.
10. Der Gesamtwert aller Aktien ist gleich der Summe der Werte der einzelnen Aktien.

Herleitung der Ausfallwahrscheinlichkeit

Dadurch dass im Modell die Insolvenz einer Firma definiert ist als das Ereignis, dass der Firmenwert kleiner ist als der Nominalwert der Schulden bei Fälligkeit der Schulden und durch die Annahme, dass der Firmenwert einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt, wäre es unmittelbar möglich die Ausfallwahrscheinlichkeit der Firma zu berechnen,

wenn die bisher versteckten¹⁶ Variablen μ , σ , and V_0 bekannt wären.

Aus der Verteilung des stochastischen Prozesses von V folgt nämlich, dass der Logarithmus des Firmenwertes zum Zeitpunkt T normalverteilt ist mit Erwartungswert¹⁷

$$\mathbf{E}(\ln V_T) = \ln V_0 + (\mu - 0.5 \sigma^2) T$$

und Varianz

$$\text{Var}(\ln V_T) = \sigma^2 T.$$

Es ist also¹⁸

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\text{default}\} &= \mathbf{P}\{V_T < D\} = \mathbf{P}\{\ln V_T < \ln D\} \\ &= \mathbf{P}\left\{ \frac{\ln V_T - (\ln V_0 + (\mu - 0.5\sigma^2)T)}{\sigma\sqrt{T}} < \frac{\ln D - (\ln V_0 + (\mu - 0.5\sigma^2)T)}{\sigma\sqrt{T}} \right\} \\ &= \Phi\left(\frac{\ln D - (\ln V_0 + (\mu - 0.5\sigma^2)T)}{\sigma\sqrt{T}} \right) = \Phi(-d_2^*) \end{aligned}$$

Die verbleibende Aufgabe besteht also lediglich darin die Parameter μ , σ und V_0 zu bestimmen.

Aus Mertons Analyse können σ und V_0 direkt geschlossen werden:

Mit Hilfe der oben gemachten Annahmen¹⁹ kann gezeigt werden²⁰, dass μ aus

¹⁶ D.h. in ihrem Wert unbekannt Variablen.

¹⁷ Wir setzen den gegenwärtigen Augenblick als $t = 0$.

¹⁸ Mit

$$\begin{aligned} d_2^* &= -\frac{\ln D - (\ln V_0 + (\mu - 0.5\sigma^2)T)}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{(\ln V_0 + (\mu - 0.5\sigma^2)T) - \ln D}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (\mu - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

d_2^* gibt an, wieviele Standardabweichungen der Erwartungswert von $\ln(V_T)$ vom Ausfallpunkt $\ln(D)$ entfernt ist und wird deshalb auch als ‚Distance to default‘ bezeichnet.

¹⁹ Insbesondere Annahme 8.

²⁰ Dies geschieht durch Bildung eines Portfolios aus Aktien der Firma und dem Verkauf von Firmenan-

der Differenzialgleichung, die den Aktienwert E definiert, vollständig eliminiert werden kann. μ kann deshalb den Aktienkurs nicht beeinflussen, d.h. E ist unabhängig von den Risikopräferenzen der Anleger. Es können also Einschränkungen und ohne die Ergebnisse zu verändern die Risikopräferenzen angenommen werden, die die nachfolgenden Berechnungen am einfachsten gestalten. In dieser Hinsicht ist es insbesondere vorteilhaft die Investoren als risikoneutral anzusehen, so dass μ mit dem risikofreien Zinssatz r identisch wäre und alle Diskontfaktoren als e^{-rt} gegeben sind.

Zum Fälligkeitszeitpunkt T der Schulden ist der Aktienkurs aufgrund der niedrigen Seniorität der Aktien identisch mit dem Auszahlungsprofil einer europäischen Call Option:

$$E_T = \max(0, V_T - D) \quad 21$$

Die stochastische Differentialgleichung, die die Verteilung des Aktienkurses E definiert, kann also mit dem Ansatz von Black-Scholes (1973)²² gelöst werden als

teilen, das in seiner Wertentwicklung nicht mehr zufällig ist und sich deshalb mit dem risikofreien Satz verzinsen muss, wenn keine Arbitragemöglichkeiten existieren.

²¹ Wenn $V_T \geq D$ (D = Gesamtverschuldung), zahlen die Aktionäre als Eigentümer der Firma die Schulden zurück, wenn andererseits $V_T < D$, übertragen die Aktionäre die Firma an ihre Gläubiger, lassen die Firma also konkurs gehen, so dass der Wert der Aktien in diesem Fall 0 ist. Das Auszahlungsprofil der Aktien entspricht also gerade dem einer europäischen Call Option mit Fälligkeit T und Strike Preis D .

Die Argumentation hier unterscheidet sich also von der klassischen Analyse von Black-Scholes vor allem darin, dass im Merton-Modell der Aktienkurs nicht das Underlying, sondern das Derivat ist. In der Folge entstehen weitere Abweichungen, da im Merton-Modell der Aktienkurs eine andere Verteilung hat als im Black-Scholes Modell (s.u.).

²² Mit

$$E_0 = V_0 \Phi(d_1) - e^{-rT} D \Phi(d_2).$$

Parallel dazu folgt aus Itô's Lemma²³, dass

$$\sigma_0^E E_0 = V_0 \Phi(d_1) \sigma.$$

Beide Gleichungen können simultan numerisch nach V_0 und σ gelöst werden.

Es ist an dieser Stelle allerdings wichtig darauf hinzuweisen, dass auch dann, wenn alle gemachten Annahmen erfüllt sind, der stochastische Prozess, der die Aktienrenditen definiert, heteroskedastisch ist²⁴, also dass die Volatilität σ_E des Aktienkurses nicht konstant ist, sondern sich mit der Zeit verändert²⁵. Es ist daher keineswegs selbstverständlich, dass σ_E bekannt ist oder durch die 30-Tage-Volatilität geschätzt werden kann, die normalerweise im Black-Scholes-Modell verwendet wird. σ und V bleiben also bis zu einem gewissen Grad verbor-

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_0}{D}\right) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

²³ Die stochastische Differentialgleichung, die die Verteilung des Aktienkurses $E = F(V, t)$ definiert lautet

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial V} rV + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \sigma^2 V^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial V} \sigma V dz$$

Die Volatilität des Aktienkurses folgt aus dem zweiten Term, wobei $\frac{\partial F}{\partial V}$ genau das Delta einer europäischen Call Option ist, also

$$\frac{\partial F}{\partial V} = \Phi(d_1).$$

²⁴ Im Gegensatz dazu ist im Black-Scholes-Modell der Prozess der Aktienrenditen homoskedastisch, d.h. er hat konstante Volatilität.

²⁵ Wenn der Firmenwert sehr groß ist im Verhältnis zur Verschuldung, ist die Volatilität des Aktienkurses näherungsweise konstant. Aber gerade für den Fall mittlerer Bonität oder sogar latenter Zahlungsunfähigkeit ist dies nicht mehr der Fall. Hier unterliegt die Volatilität des Aktienkurses extremen Schwankungen. Unter http://www.cre-germany.com/Animation/Merton_Modell.htm steht als Begleitmaterial zum Artikel ein Applet zur Verfügung, das u.a. diesen Volatilitätseffekt veranschaulicht.

gen und verhindern, dass das Modell vollständig geschlossen werden kann.

Dies gilt umso mehr für die erwartete Rendite des Firmenwertes, μ . Anders als im Capital Asset Pricing Model (CAPM) kann sie nicht unmittelbar aus Marktpreisen ermittelt werden, sondern muss indirekt aus dem zuvor geschätzten Firmenwertprozess abgeleitet werden. Es scheint unwahrscheinlich, dass durch dieses Verfahren immer noch sehr exakte Ergebnisse erzielt werden können.

Diskussion

Wenn es korrekt spezifiziert ist²⁶, kann das Merton-Modell eine Reihe Defizite der traditionellen Kreditrisikoanalyse ausgleichen.

Es stellt eine Methodik zur Verfügung wie die Einschätzung einer Firma durch den Markt in die Kreditanalyse integriert werden kann. Zukunftsorientiertheit ist ein wesentlicher Zug von Marktdaten, der sie für eine Interpretation besonders wertvoll macht. Dies kommt im Modell umso mehr zur Geltung als es ohne jede sekundäre und möglicherweise subjektiv verzerrte Experteneinschätzung zu einer eindeutigen Formel für die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Firma führt. Das Modell liefert damit eine präzise formulierte objektive Aussage über die Unsicherheit einer Investition, die auch als Input für weitere Analysen dienen kann.

Anders als bei ratingbasierter Schätzung, können mit dem Merton-Modell Ausfallwahrscheinlichkeiten von Aktiengesellschaften individuell und tagesaktuell bewertet werden²⁷. D.h. die Risikoprofile

von Firmen können ohne lange Zeitverzögerung evaluiert werden, so dass eventuelle Verschlechterungen der Kreditqualität schnell bemerkt werden können. Es ist deshalb nicht erstaunlich, dass die großen Ratinggesellschaften wie Moody's und Standard and Poor's als Reaktion auf ihr Versagen bei der Warnung vor der Asienkrise marktdatenbasierte Verfahren vom Typ des Merton-Modells eingeführt haben und heute parallel zu ihren klassischen Aktivitäten als Frühwarnsystem einsetzen.

Ein weiterer Vorteil der individuellen Beurteilung von Ausfallwahrscheinlichkeiten besteht darin, dass kein Schätzfehler durch Mittelung in bestimmten Klassen oder Ratinggruppen eintritt. Da die Schätzungen ausschließlich auf der Auswertung eines stochastischen Prozesses beruhen, dessen Verteilung nach Voraussetzung bekannt ist, gibt es ebenfalls keinen Schätzfehler durch zu kleine Gruppen oder geringe Periodenzahlen von Daten.

Durch das völlige Fehlen von Experteneinschätzungen im Modell ist es insbesondere auch möglich, den gesamten Prozess der Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten zu automatisieren. Gerade auch diese Eigenschaft qualifiziert sich das Merton-Modell als Frühwarnsystem, das ja vor allem auch deshalb gebraucht wird, weil Experten manche Entwicklungen eben nicht immer von vorneherein richtig einschätzen.²⁸

normalerweise mit den Bilanzierungsperioden veröffentlicht wird. Ebenso kann es in der Praxis freie Kreditlinien geben, die kurzfristig genutzt werden könnten, um Zahlungen zu leisten und eine Zahlungsunfähigkeit abzuwenden.

²⁸ Wir stellen ihnen unter dem Link http://www.cre-germany.com/Animation/Merton_Modell.htm ein Applet zur Verfügung, dass neben dem o.g. Volati-

²⁶ D.h. wenn alle Annahmen zutreffen.

²⁷ Dies ist nicht unbedingt der Fall, da der aktuelle Schuldenstand einer Firma nicht täglich, sondern

Neben dem technischen Problem, dass manche Inputvariablen eventuell nur ungenau geschätzt werden können, beziehen sich die Hauptkritikpunkte auf die Gültigkeit der fundamentalen Annahmen des Modells.

Der Insolvenz begriff, dass eine Firma genau dann zahlungsunfähig wird, wenn die Gesamtheit der Aktiva zu einem bestimmten Zeitpunkt kleiner ist als die Gesamtheit der Schulden, schließt von vorneherein andere denkbare Insolvenzgründe aus, wie etwa vorübergehende Liquiditätsprobleme, Gerichtsurteile, kriminelle Handlungen etc. Diese eingeschränkte Definition könnte zu einer Fehleinschätzung der Ausfallwahrscheinlichkeit führen.

Es ist insbesondere problematisch, dass Merton annimmt, der Aktienkurs sei eine deterministische Funktion des Firmenwertes und der Zeit allein, um Itô's Lemma anwenden zu können²⁹. Obwohl sie zweifellos sehr stark von den wirtschaftlichen Fundamentaldaten einer Firma beeinflusst werden, ist es unbestritten, dass Aktienkurse von spekulativen Strömungen³⁰ und Marktunvollkommenheiten überlagert werden, die zu ineffizienter Aggregation von Information führen können³¹. Sobehart und Keenan (1999) zeigen, dass Ausfallwahrschein-

lichkeiten überschätzt werden können, wenn die Volatilität der Aktienrenditen, die von der Volatilität des Firmenwertes verursacht wird, überbewertet wird³².

Dieselbe Forderung wird ebenfalls verletzt, wenn die Aktie einer Firma nicht hochliquide ist, so dass der notierte Preis nicht zu allen Zeiten mit dem tatsächlichen Marktpreis der Aktie übereinstimmt. Hierdurch wird der Kreis der Firmen, auf die das Modell überhaupt anwendbar ist, noch einmal zusätzlich eingeschränkt.

Die Annahme, der Firmenwert folge einem autoregressiven Prozess, beschränkt die Beurteilung der Kreditwürdigkeit eines Unternehmens ausschließlich auf die Performance ihrer Aktie und die Höhe ihrer Verschuldung. Exogene Einflüsse wie Länderrisiken, Fluktuationen des wirtschaftlichen Umfeldes, Konjunkturreffekte, makroökonomische Schocks etc., die die charakteristischen Eigenschaften des Firmenwertprozesses beeinflussen könnten, werden systematisch ignoriert.

Dieser Befund zeigt auch, dass das Merton-Modell keine Erweiterung oder Verallgemeinerung der traditionellen Kreditanalyse darstellt, sondern von dieser klar getrennt ist. Diese Beobachtung ist umso wichtiger, als sich Ungenauigkeiten in den Verteilungsannahmen oder in der Datenqualität unweigerlich bis auf die Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten auswirken, wenn das Gesamtmodell

litätseffekt den stochastischen Aktienkursprozess, den Firmenwertprozess, die Verschuldungsentwicklung und die automatisierte Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten hieraus darstellt.

²⁹ Merton macht diese Annahme vor allem sozusagen aus schwerwiegenden technischen Gründen und nicht, weil er sie für ökonomisch realistisch hält.

³⁰ Aktienkurse können sogar eine Bubble-Komponente enthalten. Dies wurde in den vergangenen Jahren z.B. bei Internetaktien deutlich. Das Money Magazine, April 1999, p. 169 berichtet für Yahoo im Frühjahr 1999 ein Kurs-Gewinn-Verhältnis von 1176,6.

³¹ Für eine detaillierte Diskussion möglicher exogener Einflüsse auf Aktienkurse vergleiche Lippner (2000), p. 66-69.

³² Vgl. Sobehart und Keenan (1999), p. 22ff. Die Autoren führen diesen Sachverhalt als einen der Hauptgründe an, warum die Analyse von Aktienkursen und Bondpreisen (s.u.) zu inkonsistenten Schätzungen für die Ausfallwahrscheinlichkeit führen, obwohl beide Ansätze auf der Analyse von Marktdaten für dieselbe Firma basieren.

keine Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse gegen andere ökonomische Variablen einschließt, die ähnliche Information enthalten³³.

Abbildung 1

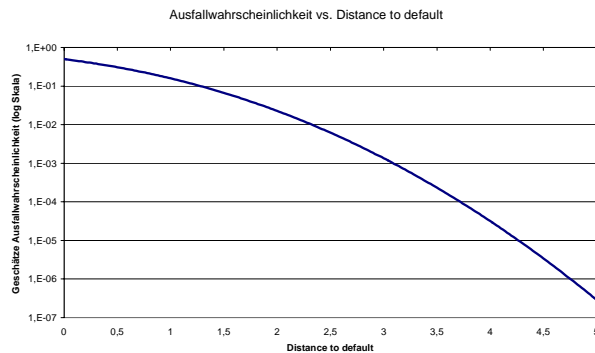


Abbildung 1 zeigt die ‚Distance to default‘³⁴ dargestellt gegen die zugehörige Ausfallwahrscheinlichkeit. Es wird deutlich, dass in diesem Bereich der Zusammenhang zwischen beiden Größen nahezu exponentiell ist, so dass bereits kleine Fehler bei der Distance to default zu großen Fehleinschätzungen der Ausfallwahrscheinlichkeit führen. Eine ganzheitliche Kreditrisikoanalyse würde deshalb versuchen, Marktdaten mit flankierenden Informationen zu kombinieren, sofern erhältlich, um die Präzision zu maximieren.

Mertons Ansatz den Firmenwert V und seine Volatilität σ zu bestimmen wäre nicht gerechtfertigt, wenn die Differentialgleichung, die den Aktienkurs definiert, den erwarteten Ertrag auf den Firmenwert μ enthielte, da μ nicht direkt geschätzt werden kann und zudem von den nicht beobachtbaren Risikopräferenzen der Investoren abhängt. Je höher die

Risikoaversion der Investoren ist, desto höher ist μ für jede gegebene Firma. Merton nimmt deshalb an, dass Arbitrageure existieren, die gewährleisten, dass das selbst-finanzierte und keinen zufälligen Wertschwankungen mehr ausgesetzte Portfolio aus der Firma, Aktien und risikofreien Schuldverschreibungen dieselbe risikofreie Verzinsung erhält wie andere risikofreie Geldanlagen, unabhängig von μ . Wäre die Verzinsung des Portfolios höher, könnten Arbitrageure sichere Gewinne machen, indem sie risikofreie Papiere leer verkauften und die Erträge zum Kauf des Portfolios verwendeten. Wäre umgekehrt die Verzinsung geringer, könnten sie das Portfolio leer verkaufen und sich vom Erlös mit risikofreien Papieren eindecken³⁵.

Es ist allerdings fraglich, ob die Existenz von Arbitrageuren für die Anwendung des Optionspreismodells auf das Kreditrisiko so selbstverständlich angenommen werden kann wie bei der Bewertung von Aktienoptionen. Wenn die Aktie einer Firma als Long Call Option auf den Wert der Firma verstanden werden kann, halten die Gläubiger der Firma automatisch die Short Position derselben Option³⁶.

Die Ausgangsposition der Gläubiger und Aktionäre ist hier allerdings eine andere als die der Inhaber von Short und Long Positionen bei Aktienoptionen, denn die Aktionäre bleiben zusätzlich zu ihrer Long Position die Eigentümer der Firma und bestimmen ihr Management. Dies gibt ihnen die Möglichkeit über das Vermögen der Firma relativ frei und zu ih-

³³ Dies wirft auch die Frage auf, wie sich Banken und Gläubiger generell im Spannungsfeld der Fehler eines rein quantitativen Verfahrens und der Fehler von Experteneinschätzungen positionieren sollen.

³⁴ Siehe oben Fußnote 18.

³⁵ Auch diese Argumentation Mertons ist eine exakte Analogie zum Black-Scholes-Modell.

³⁶ Die Long Position bezeichnet das eigentliche Optionsrecht. Die Short Position bezeichnet die Rolle des Stillhalters, also desjenigen, der das Recht gewährt und somit eine Verpflichtung eingegangen ist.

rem eigenen Vorteil zu disponieren, also den Wert des Underlyings aktiv zu beeinflussen. Die Gläubiger als Halter der Short Position können demgegenüber wenig tun, um dies zu verhindern bevor der Insolvenzfall eingetreten ist³⁷. Die Gläubiger sind also im Merton-Modell in einer wesentlich schlechteren Lage als die Halter von Short Positionen von Aktioptionen im Black-Scholes-Modell. Es ist deshalb fraglich, ob die Akteure in einem Kontext, so wie er im Merton-Modell gezeichnet wird, tatsächlich bereit sind als Arbitrageure in den Markt einzutreten.

Schließlich ist der Aktienkurs, der an den Finanzmärkten angegeben wird, der Preis für eine einzelne Aktie. Viele Versuche eine Firma zu übernehmen haben jedoch gezeigt, dass sich der Gesamtwert aller Aktien einer Firma deutlich von der Summe der Werte einzelner Aktien unterscheiden kann³⁸. Der Gesamtwert der Aktien bleibt deshalb eine weitere versteckte Basisvariable des Modells.

Erweiterungen des Merton-Modells durch KMV

Viele technische Schwächen haben den Wert des Merton-Modells für Banken und Investoren, die die Ausfallwahrscheinlichkeiten ihrer Geschäftspartner bewerten wollten, deutlich gemindert. Dies hat die Gründer der KMV Corporation seit Beginn der 1980'er Jahre dazu veranlasst

eine Variante des Merton-Modells in Form des Vasicek-Kealhofer-Modells zu entwickeln³⁹.

Das Vasicek-Kealhofer-Modell⁴⁰ hat denselben konzeptionellen Aufbau wie das Merton-Modell, versucht aber die technisch begründeten Annahmen des Modells abzuschwächen und zu adaptieren⁴¹.

Während das Merton-Modell davon ausgeht, sämtliche Verbindlichkeiten einer Firma bestünden aus Schuldverschreibung in Form von Zerobonds derselben Fälligkeit und Aktien, erlaubt das KMV Modell auch laufende und kurzfristige Verbindlichkeiten, langfristige Schuldverschreibungen, Wandelanleihen, Vorzugsaktien, wandelbare Vorzugsaktien und normale Stammaktien. Ebenso werden Dividenden und Zinszahlungen vor Fälligkeit der Schulden erfasst⁴².

KMV verallgemeinert auch den Insolvenz begriff. Im Merton-Modell war der Ausfall einer Firma gleichbedeutend damit, dass der Firmenwert bei Fälligkeit der Schulden niedriger ist als der Schuldenstand. Im Vasicek-Kealhofer-Modell kann eine Insolvenz auch vor Fälligkeit einer bestimmten Verbindlichkeit eintreten. Die Aktien werden hierzu ohne eine genaue Fälligkeit als ewige Optionen modelliert⁴³.

Im KMV Modell wird der Firmenwert ausschließlich zur Berechnung der Inputvariablen und zur Bestimmung der Di-

³⁷ Vgl. auch Sobehart und Keenan (1999), p. 19f., und Fußnote 32.

³⁸ Der Börsenwert der Mannesmann AG z.B. stieg während der feindlichen Übernahme durch Vodafone zwischen Oktober 1999 und Februar 2000 um 100 Milliarden Mark oder mehr als 100%.

³⁹ Das Vasicek-Kealhofer-Modell wird unter dem Namen ‚KMV Credit Manager‘ kommerziell als Software vertrieben.

⁴⁰ Wir bezeichnen das Vasicek-Kealhofer-Modell auch als KMV Modell.

⁴¹ Vgl. Vasicek (1984), Crosby et al. (2000), Crouhy et al. (2000), Sellers et al. (2000).

⁴² Vgl. Vasicek (1984), p. 5f. und 11.

stance to default als geometrische Brownsche Bewegung dargestellt. Um den Distances to default Ausfallwahrscheinlichkeiten zuzuordnen wird von KMV eine empirische Verteilung verwendet, da die Normalverteilung zu in der Praxis unplausiblen Ergebnissen geführt hat⁴⁴.

Diskussion

Das KMV Modell ist wertvoll, da es das Merton-Modell operationalisiert und in ein für Anwender hilfreiches Instrument verwandelt hat. Obwohl es zunächst auf Aktiengesellschaften spezialisiert ist, ist dies gerade die Kundengruppe internationaler Banken, die aufgrund ihrer geringen Anzahl und ihrer hohen Kreditvolumina einen überproportionalen Anteil zum Kreditportfoliorisiko dieser Banken beiträgt.

Es ist ein entscheidender Vorteil des KMV Modells, dass es den Risikomanagern ermöglicht, Aktiengesellschaften tagesaktuell zu überwachen und die geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeiten⁴⁵ als eine Frühwarninformation zu verwenden, die auf einer vollständig automatisierten und rein quantitativen Analyse beruht. Einmal operativ unterliegt das Modell deshalb nicht mehr der Gefahr eines Versagens durch menschliche Fehlein-

schätzungen der aktuellen wirtschaftlichen Lage⁴⁶.

Aufgrund seiner engen Verwandtschaft mit dem Merton-Modell erbt das KMV Modell allerdings auch alle seine strukturellen Probleme. Dies fällt umso stärker ins Gewicht als sich KMV bisher weigert, die genaue Methodik des Modells und die Datenbasis, auf die sich die Ableitung der empirischen Verteilungen stützt, zu veröffentlichen, so dass das Modell einer Black Box gleicht, der man einfach glauben muss.

Dies kann auch nicht dadurch ausgeglichen werden, dass KMV versichert ausführliche Untersuchungen angestellt zu haben, die die Ergebnisse beweisen⁴⁷. Der Mangel an öffentlich zugänglichen Überprüfungen des Verfahrens ist besonders kritisch, da der Zusammenhang zwischen Distance to default und Ausfallwahrscheinlichkeit so sensibel ist, dass kleine Ungenauigkeiten in der Messung der Distance to default und der Abbildung zwischen beiden Größen bereits zu signifikanten Fehlern in der resultierenden Ausfallwahrscheinlichkeit führen können.

Das Jarrow-Turnbull-Modell

In einer Serie von Artikeln seit 1995 haben Robert Jarrow und Stuart Turnbull eine Reihe Modelle mit verschiedenen Annahmen und unterschiedlichen Komplexitätsgraden entwickelt, die die Beur-

⁴³ Vgl. Vasicek (1984), p. 5f., und Sellers et al. (2000), p. 3.

⁴⁴ Vgl. Fußnote 18 und Crouhy et al. (2000). Sellers et al. (2000), p. 3, berichtet, dass die Normalverteilung der Hälfte der US-amerikanischen Unternehmen in KMV's Datenbank eine Ausfallwahrscheinlichkeit zuordnen würde, die einem AAA Rating entspricht.

⁴⁵ KMV bezeichnet die von ihrem Modell geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeiten bildlich als ‚erwartete Ausfallhäufigkeiten‘ oder ‚expected default frequency‘ oder ‚EDF‘.

⁴⁶ Auch Moody's Investors Service, die inzwischen die KMV Corporation gekauft haben, bewertet die Fähigkeit als Frühwarnsystem zu funktionieren als eine Schlüsselanforderung an ein Ratingsystem.

⁴⁷ Vgl. Sellers et al. (2000) als ein bemerkenswertes Beispiel für KMV's Marketingaktivitäten.

teilung des Kreditrisikos eines Geschäftes auf die Analyse von Credit Spreads⁴⁸ und anderer relevanter Marktfaktoren gründen⁴⁹. Ähnlich wie Merton sind auch Jarrow und Turnbull vor allem an der Bewertung von Wertpapieren, die einem Kreditrisiko unterliegen, interessiert.

Grundidee

Obwohl sie im Detail stark voneinander abweichen, haben die Modelle von Jarrow und Turnbull eine ähnliche Architektur gemeinsam, die aus vier Komponenten besteht:

1. Einem Modell für die Marktfaktoren, die die Größe der Credit Spreads beeinflussen, wie die risikofreie Zinsstrukturkurve und die Aktienkurse. Diese ‚elementaren‘ Faktoren werden generell dargestellt als korrelierte autoregressive Prozesse wie etwa allgemeinen Itô-Prozessen⁵⁰, geometrischen Brownschen Bewegungen oder Mean-reversion Prozessen⁵¹.
2. Dem Insolvenzprozess der Firma. Er wird als Binomial- oder Exponentialprozess dargestellt, der sich unabhängig von den vorher definierten Marktfaktoren entwickelt⁵², oder als Cox-Prozess mit einer vom Zinsniveau und den unerwarteten Änderungen eines Aktienindices abhängigen Intensität.

3. Dem Recovery Rate Prozess. Recovery Rates werden als fester Bruchteil des Barwertes einer Schuldverschreibung oder ihres juristischen Ablösewertes (= Nominalwert zzgl. aufgelaufene Zinsen) dargestellt⁵³ oder endogen aus erwarteten Bondpreisen und Aktienkursen geschätzt⁵⁴.
4. Einem Modell, das die am Markt beobachteten Credit Spreads mit den erwarteten Auszahlungen aus den Schuldverschreibungen und der risikofreien Zinskurve in Beziehung setzt⁵⁵.

Durch die Annahme, dass Arbitrage nicht möglich und der Markt vollkommen ist, kann auch hier wieder eine risikoneutrale Welt angenommen werden. Dies impliziert, dass erwartete Erträge und Diskontfaktoren für unterschiedliche Investments übereinstimmen und unmittelbar aus der risikofreien Zinskurve abgeleitet werden können⁵⁶. Unter diesen Voraussetzungen können die Modelle gelöst und ‚risikoneutrale Ausfallwahrscheinlichkeiten‘ berechnet werden.

Aus der Martingalbedingung, risikoneutralen Ausfallwahrscheinlichkeiten und den Marktfaktoren können natürliche Ausfallwahrscheinlichkeiten⁵⁷ abgeleitet werden⁵⁸.

Jarrow und Turnbull benötigen keine exakte Definition eines Ausfalls wie das

⁴⁸ Also auf die Aufschläge auf den risikofreien Zins, den die Firmen zu bezahlen haben.

⁴⁹ Diese Technologie wurde von der Kamakura Corporation, Honolulu, USA, als kommerzielles Softwarepaket unter dem Namen ‚Kamakura Risk Manager – Credit Risk System‘ umgesetzt.

⁵⁰ Z.B. Jarrow et al. (1995), p. 71, (1997a), p. 275.

⁵¹ Jarrow et al. (2000), p. 284.

⁵² Jarrow et al. (1995), pp. 58, 73; (1997a), p. 273.

⁵³ Jarrow et al. (2000), p. 61.

⁵⁴ Jarrow (2000)

⁵⁵ Z.B. Jarrow et al. (1995), p. 63.

Jarrow et al. (2000), p. 290f. führen noch weitere Komponenten des Spreads ein, insbesondere ein Entgelt für die Illiquidität des Marktes.

⁵⁶ Dies ist dasselbe Argument wie im Merton-Modell.

⁵⁷ D.h. Ausfallwahrscheinlichkeiten, die in der realen Welt gelten und keine Annahmen über risikoneutralität der Marktteilnehmer machen.

⁵⁸ Jarrow et al. (1997a), p. 292, Jarrow (2000).

Merton-Modell oder ratingbasierte Techniken. Sie fordern lediglich, dass ein Ausfall, wenn er einmal eingetreten ist, ein permanenter Zustand bleibt. Eine insolvente Firma kommt nicht zurück. Unter der Annahme, dass die Wahrnehmung der finanziellen Zukunft einer Firma durch den Markt und ihr Ausfallrisiko sich in ihrem Credit Spread niederschlagen, ist es für den Risikomanager nicht notwendig die Firma anderweitig zu monitoren oder explizite Gründe anzugeben, unter denen eine Insolvenz eintreten könnte. Aus diesem Grund wird die Jarrow-Turnbull-Modellfamilie auch als Reduced Form Approach bezeichnet.

Diskussion

Der Jarrow-Turnbull-Ansatz ist die wichtigste Modellfamilie, die Marktfaktoren wie die Zinskurve, Spreads und Aktienkurse verwenden kann, um die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Firma und ihr Exposure gleichzeitig zu berechnen, und so das Markt- und das Kreditrisiko bis zu einem gewissen Grad integriert. Dies ist vor allem dann von Vorteil, wenn große Portfolien aus Zinsprodukten wie Bonds, Swaps oder Zinsoptionen bewertet und gehedged werden sollen. Im Gegensatz zum Merton-Modell hat der Jarrow-Turnbull-Ansatz den zusätzlichen Vorteil, dass alle relevanten Marktfaktoren in ihren Wechselwirkungen gleichzeitig betrachtet werden und nicht nur auf einen Faktor, wie etwa die Aktienkurse einer Firma, isoliert abgehoben wird.

Die abgeleiteten natürlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten können ebenfalls als Frühwarninformation für die Verschlechterung der Kreditqualität von Firmen und die allgemeine Marktstabilität dienen, da sie vollständig aus Marktdaten berechnet werden. Zusätzlich ist der Output der

Modelle ein wertvoller Vergleichspunkt für die Ergebnisse des Merton-Modells.

Neben der offensichtlichen Einschränkung, dass sie nur für Firmen mit börsengehandelten Schuldverschreibungen eingesetzt werden können, teilen die Jarrow-Turnbull-Modelle (bzw. jeweils einige von ihnen) eine Reihe Nachteile mit dem Merton-Modell, insbesondere Datenprobleme und verborgene Variablen.

Credit Spreads hängen in vielen Fällen nicht nur vom Markt- und Kreditrisiko ab, sondern sind oft auch mit anderen Einflüssen kontaminiert⁵⁹, wie Liquiditätsengpässen und Unsicherheit über eine eventuelle Recovery Rate⁶⁰. Dies ist umso gravierender als Daten über die Recovery Rate die am wenigsten verlässlichen Informationen in der Kreditrisikoanalyse überhaupt sind, sie aber die Schätzungen für die Ausfallwahrscheinlichkeiten stark beeinflussen⁶¹.

Dasselbe gilt für Liquiditätsengpässe, die im Bondhandel ein vertrautes Phänomen sind. Kombiniert mit der Beobachtung, dass Bonds normalerweise in kleinen Stückzahlen mit großen Nominalwerten gehandelt werden und nicht wie Aktien in großen Stückzahlen mit kleinen Nominalwerten, deuten die Liquiditätsproble-

⁵⁹ Dieses Problem wird eingehend diskutiert in Jarrow (2000) und in Jarrow et al. (2000), wo jeweils auch einige Lösungsvorschläge entwickelt werden.

⁶⁰ Ausschließlich Spread basierte Verfahren zur Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten erfordern eine Kenntnis der jeweiligen Recovery Rate, da sie eine Komponente des Spreads ist.

Der Jarrow-Turnbull-Ansatz teilt darüberhinaus die Probleme der Verunreinigung der Aktienkurse durch spekulative Einflüsse mit dem Merton-Modell.

⁶¹ In den meisten Modellen von Jarrow und Turnbull kann man zeigen, dass bei gegebenem Spread die Ausfallwahrscheinlichkeit gegen 100% konvergiert, wenn die Recovery Rate ihrerseits gegen 1 geht.

me daraufhin, dass die Annahme, dass Arbitrageure im Markt aktiv sind und die Preise permanent auf ihr angemessenes Niveau heben, durchaus zweifelhaft ist.

Zusammenfassung

Marktdatenbasierte Verfahren zur Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten erschließen einen Datenpool für die Kreditrisikoanalyse der tagesaktuell und kundenindividuell ausgewertet werden kann. Es werden an keiner Stelle⁶² Experteneinschätzungen zur Durchführung der Berechnung benötigt, so dass der gesamte Prozess der Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten automatisiert werden kann. Die Verfahren qualifizieren sich hierdurch insbesondere zur Generierung von Frühwarninformationen und der Unterstützung von Monitoringprozessen im Kreditrisikomanagement. Diese Anwendung ist auch deshalb besonders für die geschilderten Verfahren geeignet, als es hier vor allen darauf ankommt, dass die zeitliche Entwicklung der Bonität einer Firma richtig erfasst wird und weniger auf die absolute Korrektheit der geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Die kundenindividuelle Analyse hat darüber hinaus den Vorteil, dass anders als bei ratingbasierten Verfahren, wo alle Kunden, die gewisse Merkmale teilen, gleich behandelt werden, kein Portfolio von Kunden notwendig ist, um die Rechnungen durchzuführen. Bei den marktdatenbasierten Ansätzen schlagen deshalb keine Portfoliostruktureffekte auf die

Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten durch⁶³.

Wie exakt die von den Modellen ausgewiesenen Ausfallwahrscheinlichkeiten tatsächlich sind, ist ohne Auswertungen praktischer Anwendungen durch Banken nicht zu beantworten, da von den Anbietern einschlägiger kommerzieller Software bisher keine nachvollziehbaren Studien veröffentlicht wurden. Da es, wie geschildert, auf dem Niveau der Daten und der Bestimmung aller relevanten Variablen teilweise massive Probleme in den Modellen gibt, sind an dieser Stelle Vorbehalte sicherlich angebracht.

Aufgrund des hohen Modellrisikos durch starke modelltheoretische Annahmen und der geringen Robustheit der Modelle gegen (ganz alltägliche) Kontamination der Daten ist es deshalb geraten, marktdatenbasierte Verfahren vor allem parallel und in Ergänzung der in dieser Hinsicht wesentlich robusteren ratingbasierten Methoden einzusetzen.

⁶² U.U. mit Ausnahme der Bestimmung der Recovery Rate im Jarrow-Turnbull-Modell.

⁶³ Im ersten Teil unserer Serie über das ratingbasierte Mittelwertmodell hatten wir gezeigt, dass hier bei Gültigkeit der Annahmen die Ausfallwahrscheinlichkeit der Kunden in einer Ratingkategorie zwar erwartungstreu geschätzt werden kann, dass aber die Varianz des Schätzwertes stark vom Grad der Abhängigkeiten zwischen den Kunden abhängt. Vergleichbare Phänomene treten generell bei ratingbasierten Verfahren auf.

Kontakt:

Uwe Wehrspohn

Universität Heidelberg
Alfred Weber Institut
Grabengasse 14
69117 Heidelberg
Tel.: ++49.173.66 18 784
Email: wehrspohn@risknet.de

Center for Risk & Evaluation GmbH & Co.
KG
Berwanger Straße 4
75031 Eppingen
Email: wehrspohn@cre-germany.com

Literatur:

Black, Fisher and Myron Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, pp. 637-659

Crosby, Peter J. (1997): "Modeling default risk," Working Paper, KMV Corporation, <http://www.kmv.com/>

Crouhy, Michael; Dan Galai and Robert Mark (2000): „A comparative analysis of current credit risk models," *Journal of Banking & Finance* 24, pp. 59-117

Jarrow, Robert A. and Stuart M. Turnbull (1995): "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk," *Journal of Finance* 50, pp. 53-85

Jarrow, Robert A. and Stuart M. Turnbull (1997a): "An integrated approach to the hedging and pricing of eurodollar derivatives," *Journal of Risk and Insurance* 64, pp. 271-299

Jarrow, Robert A. and Stuart M. Turnbull and D. Lando (1997b): "A Markov model for the term structure of credit risk spreads," *Review of Financial Studies* 10, pp. 481-523

Jarrow, Robert A. and Stuart M. Turnbull (2000): "The intersection of market and credit risk," *Journal of Banking & Finance* 24, pp. 271-299

Jarrow, Robert (2000): "Default parameter estimation using market prices," Working Paper

Kealhofer, Stephen (1993): "Portfolio management of default risk," Working paper, KMV Corporation, <http://www.kmv.com/>

Kealhofer, Stephen, Sherry Kwok and Wenglong Weng (1998): "Uses and abuses of bond default rates," Working Paper, KMV Corporation, <http://www.kmv.com/>

Lipponer, Alexander (2000): "Kreditportfoliomanagement: Die Bedeutung von Korrelationen für die Bewertung von Kreditausfallrisiken," Dissertation Universität Heidelberg

Merton, Robert C. (1974): "On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates," *Journal of Finance* 39, pp. 449-470

Øksendal, Bernt (1998): "Stochastic differential equations: an introduction with applications," Springer-Verlag

Sellers, Martha; Oldrich Alfons Vasicek and Allen Levinson (2000): "The KMV EDF credit measure and probabilities of default," Working Paper, KMV Corporation, <http://www.kmv.com/>

Sobehart, J.R. and S.C. Keenan (1999): "Equity Market Value and Its Importance for Credit Analysis; Facts and Fiction," Research Report 2-7-7-99, Moody's Risk Management Services, <http://www.kmv.com/>

Sobehart, Jorge R. and Roger M. Stein (2000): "Moody's public firm risk model: a hybrid approach to modeling short term default risk," Working paper, Moody's Investors Service, <http://www.kmv.com/>

Vasicek, Oldrich Alfons (1984): "Credit Valuation," Working Paper, KMV Corporation, <http://www.kmv.com/>