

Serie: Bestimmung von Ausfallwahrscheinlichkeiten - Teil 3

Stochastische Ausfallwahrscheinlichkeiten – Credit Risk+

Ein Beitrag von Uwe Wehrspohn

Eine zentrale Annahme des in Teil 1 unserer Serie (vgl. RiskNEWS 05.2002) analysierten Mittelwertmodells bestand darin, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit, die sich mit einer bestimmten Ratinggruppe verbindet, im zeitlichen Verlauf über die Jahre konstant sei. Lediglich die beobachteten Ausfallhäufigkeiten schwankten von Periode zu Periode.

Ein anderer Ansatz wurde in Credit Risk+ verfolgt, einem Risikomodell, das von 1993 bis 1996 von Credit Suisse Financial Products¹ entwickelt wurde.

Wir zeigen in diesem Artikel, welche Probleme die Architektur von Credit Risk+ für die Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten von Ratinggruppen bereitet und welche Konsequenzen sie für die Berechnung des Risikos eines Kreditportfolios nach sich zieht.

Grundidee

In Credit Risk+ sind Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht statisch, sondern selbst stochastisch, also zufällig. Es wird davon ausgegangen, dass die Natur für jedes Rating in jeder Periode unabhängig von allen Vorperioden eine Ausfallwahrscheinlichkeit aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung zieht. Erst in einem zweiten Schritt treten in Abhängigkeit von der jeweils gezogenen Ausfallwahrscheinlichkeit tatsächliche Ausfälle ein. Da sich das Ausfallverhalten von Firmen stark zwischen einzelnen Industrien unterscheidet, wird die Verteilung, aus der Ausfallwahrscheinlichkeiten gezogen werden, in Credit Risk+ von Ratingkategorie und Branche der Firmen abhängig gemacht.

Als intuitive Erklärung werden die Schwankungen der Ausfallwahrscheinlichkeiten in Credit Risk+ auf „Hinter-

¹ Vgl. hierzu die ausführliche Dokumentation von Credit Suisse Financial Products (1996). Credit Risk+ ist eine Adaption des in der Versicherungs-

mathematik häufig verwendeten Compound Poisson Modells.

grundfaktoren' zurückgeführt². Ihr Typ, ihr Ursprung und die Art des Zusammenhanges werden nicht weiter spezifiziert und bleiben anonym. Es wird vielmehr (einfach) angenommen, dass die Verteilungen, aus denen sich die Ausfallwahrscheinlichkeiten bestimmen, die vollständige Information über das Ausfallverhalten von Firmen enthalten.

Beachte, dass, obwohl die Ausfallwahrscheinlichkeiten im Modell zufällig sind, die Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sie kontrollieren, als im Zeitverlauf konstant angenommen werden. Es ist also vor allem die Art der Kontinuität, die Credit Risk+ vom Mittelwertmodell unterscheidet.

Herleitung der Ausfallwahrscheinlichkeit

Hinter dem konzeptionellen Aufbau von Credit Risk+ stehen zwei zentrale treibende Kräfte: das Ziel die Verlustverteilung eines Kreditportfolios analytisch zu berechnen und Computersimulationen zu vermeiden und mathematische Zwänge beim Schätzen der notwendigen Inputdaten. Rein technische Fragestellungen haben aus diesen Gründen in Credit Risk+ einen sehr hohen Stellenwert.

Das Modell nimmt konkret an, die Ausfallwahrscheinlichkeiten seien aus einer Gamma-Verteilung gezogen³. Das Motiv

für diese Voraussetzung ist die bekannte Kompatibilität der Gamma-Verteilung mit der Poissonverteilung, die die gewünschte analytische Lösung für die Portfolioverlustverteilung ermöglicht. Die Poissonverteilung wird im zweiten Schritt des Modellierungsprozesses relevant. Sie beschreibt die Verteilung der Anzahl der Ausfälle pro Periode in einem Branche / Rating-Segment in Credit Risk+⁴, nachdem die Ausfallwahrscheinlichkeit des Segmentes feststeht.

Die Annahme der Poissonverteilung zur Darstellung der Ausfallzahlen bei gegebener Ausfallwahrscheinlichkeit ist nur dann gerechtfertigt, wenn die Ausfälle (bedingt) unabhängig sind. Man kann sogar beweisen, dass die Anzahl der Ausfälle in einer Periode genau poissonverteilt ist, wenn die Ausfallwahrscheinlichkeiten konstant und identisch sind für alle Kreditnehmer⁵ und wenn die Kunden untereinander unabhängig sind. Bei abhängigen Ausfällen wäre die Poisson-Approximation der Binomialverteilung jedoch ungültig.

Die Poisson-Approximation ist genau genommen ein asymptotisches Ergebnis, wenn die Anzahl der Kunden gegen unendlich geht. D.h., es muss zusätzlich gefordert werden, dass die Anzahl der Kunden pro Segment ‚sehr groß‘ wird.

Dies erweist sich als extrem problematische Annahme, da in Credit Risk+ die Segmente an dieser Stelle noch weiter

² Vgl. Credit Suisse Financial Products (1996), p. 20.

³ Diese Wahl mag auf den ersten Blick erstaunen, da die Gamma-Verteilung nicht nur im Einheitsintervall, sondern auf der ganzen positiven reellen Achse Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit annimmt. Die Wahrscheinlichkeit eine nicht definierte Ausfallwahrscheinlichkeit größer als 1 zu ziehen, ist allerdings auch für schlechte Bonitäten in einer

Größenordnung $< 10^{-15}$, also für alle realistischen Fälle vernachlässigbar.

⁴ Für technische Einzelheiten vgl. Credit Suisse Financial Products (1996), p. 32ff.

⁵ Dies entspricht der Annahme der Homogenität von Risikogruppen, die bereits im Mittelwertmodell auftrat. Beachte aber, dass in diesem Fall eine Risikogruppe durch die Kombination von Rating und Branche definiert wird.

nach der Höhe des Kreditvolumens untergliedert werden müssen, um ihre Verlustverteilungen aus der bloßen Anzahl der Ausfälle pro Segment berechnen zu können.

Eine Konsequenz dieser Annahme ist, dass die Verlustverteilung, die aus der Portfolioanalyse in Credit Risk+ resultiert, mit positiver Wahrscheinlichkeit Werte ausweist, die größer sind als der Totalverlust des gesamten Portfolios, und dass die Verlustverteilung stetiger erscheint als sie in Wahrheit ist, da die Sprünge mit imaginären Ausfällen kleiner Exposures aufgefüllt werden.

Für Portfolios, die sehr wenige sehr große Exposures enthalten, für die die Annahme beliebig großer Segmente in keiner Weise zutrifft, – dies ist bei echten Bankportfolien typischerweise der Fall – und bei Junk Bond Portfolien führt die Poisson-Approximation bei hohen Konfidenzniveaus für den Value at Risk deshalb zu einer gravierenden Überschätzung des Portfoliorisikos. Der vom Basler Komitee für Bankenaufsicht geforderte 99,9%-Value at Risk kann damit von Credit Risk+ nicht mehr adäquat gemessen werden.

Abbildung 1

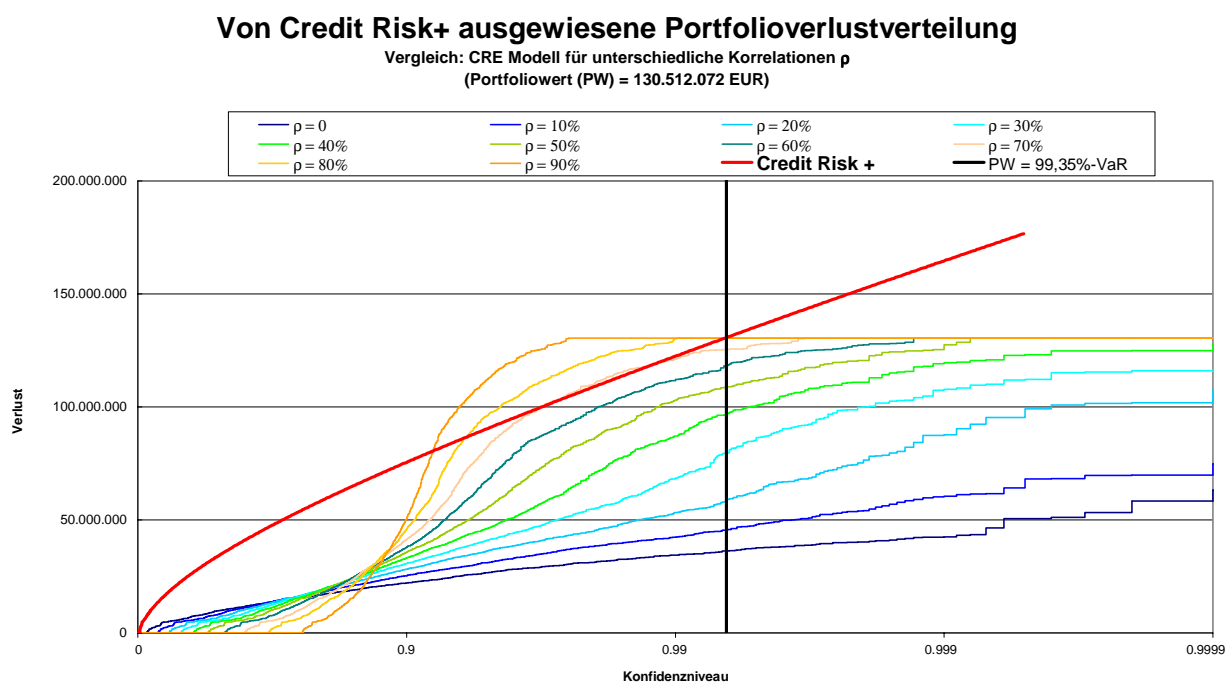


Abbildung 1⁶ illustriert den systematischen Fehler, der durch die Poisson-Approximation in Credit Risk+ ausgelöst

wird. Von einem Konfidenzniveau von 99,35% an überschreitet der ausgewiesene Value at Risk den Portfoliowert, obwohl dies an sich unmöglich ist, da das Portfolio beschränkt ist und die Exposures der Kunden von Credit Risk+ als unveränderlich angenommen werden.

⁶ Die Grafik ist wie folgt zu lesen: Nach Aussage des entsprechenden Modells wird der auf der vertikalen Achse angegebene Portfolioverlust mit der auf der horizontalen Achse angegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten.

Die Rechnungen zur Bestimmung der Verlustverteilung wurden für ein Portfolio und mit einer Software durchgeführt, die beide von Credit Suisse First Boston veröffentlicht wurden. Die Ergebnisse wurden lediglich nicht als Histogramm, sondern als Verteilungsfunktion dargestellt.

Als Vergleich sind die vom Credit Risk Evaluation Model⁷ (CRE Modell) für verschiedene Grade von Abhängigkeit zwischen den Kunden berechneten Verlustverteilungen angegeben. Die Verteilungen sind hier wesentlich un stetiger, da jeder Kunde nur einmal ausfallen kann, und auch für extrem hohe Korrelationen bildet der Totalverlust des Portfolios eine theoretische Höchstgrenze.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass diese konzeptionellen Schwächen in Credit Risk+ ihre Ursache in einer Reihe von Entscheidungen haben, die ausschließlich getroffen wurden, um das Modell analytisch lösen zu können. Sie könnten ausnahmslos leicht vermieden werden, wenn Computersimulationen akzeptiert würden, um das Portfoliorisiko zu berechnen.

Die Annahme unabhängiger Ausfälle bei gegebenen Ausfallwahrscheinlichkeiten ist in Credit Risk+ noch aus einem anderen Grund entscheidend. Die Gamma-Verteilung, aus der die Ausfallwahrscheinlichkeiten gezogen werden, hat zwei freie Parameter, die beide vom Erwartungswert und der Standardabweichung der Ausfallwahrscheinlichkeiten abhängen⁸.

Der Erwartungswert kann aus den mittleren Ausfallhäufigkeiten erwartungstreu und konsistent geschätzt werden, solan-

ge die Ausfälle seriell unkorreliert sind⁹. Es spielt hier keine Rolle, ob und wie die Ausfälle in einer bestimmten Periode voneinander abhängen.

Für die Standardabweichung ist es allerdings ein Problem, ein Schätzverfahren anzugeben, wenn der Grad und die exakte Form der Abhängigkeit zwischen Ausfällen nicht voll spezifiziert sind. Diese Frage entfällt jedoch, wenn (bedingte) Unabhängigkeit angenommen wird, da dann die gemeinsamen Verteilungen der Ausfälle vollständig bekannt sind.

Diskussion

In Credit Risk+ liegt der Focus nicht auf der exakten Modellierung und Schätzung von Ausfallwahrscheinlichkeiten. Die Autoren sagen nicht viel über die Bestimmung verborgener Input-Variablen, insbesondere nicht über die Schätzung der Volatilitäten der Ausfallwahrscheinlichkeiten¹⁰. Dies ist umso fundamentaler als diese Aufgabe trotz der strikten Annahmen nicht selbsterklärend ist.

In seinem Vergleich von Credit Metrics und Credit Risk+ beschreibt Michael Gordy ein Verfahren, wie die Standardabweichung von Ausfallwahrscheinlichkeiten geschätzt werden kann.¹¹ Da die Autoren von Credit Risk+ sich hiervon weder abgegrenzt noch ein eigenes, besseres Verfahren vorgeschlagen haben,

⁹ Dies folgt aus dem Gesetz der großen Zahl.

¹⁰ Vgl. Credit Suisse Financial Products (1996), p. 12f.. Die Autoren nehmen offenbar an, dass Anwender diese Frage nicht gesondert stellen, sondern von den Ratingagenturen veröffentlichte Ergebnisse verwenden würden. Für nicht öffentlich geratete Firmen und Privatkunden ist diese Annahme allerdings fragwürdig.

¹¹ Vgl. Gordy (2000), p. 24-26.

⁷ Zum CRE Modell vgl. Wehrspohn (2003).

⁸ Vgl. Credit Suisse Financial Products (1996), p. 45.

legen wir es für die weiteren Analysen zugrunde. Der Schätzer ist hier gegeben durch¹²

$$\hat{V}(p) = \frac{\hat{V}(\hat{p}) - \eta \bar{p}(1 - \bar{p})}{1 - \eta}$$

Hierbei steht p für die Ausfallwahrscheinlichkeit, $\hat{V}(p)$ für die geschätzte Varianz von p , $\hat{V}(\hat{p})$ für die beobachtete Varianz der beobachteten Ausfallhäufigkeiten, \bar{p} für die mittlere beobachtete Ausfallhäufigkeit. η steht für die mittlere inverse Anzahl Firmen in dem betreffenden Branche / Rating-Segment: Sei n_i die Anzahl der Firmen im Segment in Perio-

de $i=1, \dots, m$. Dann ist $\eta = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i}$.

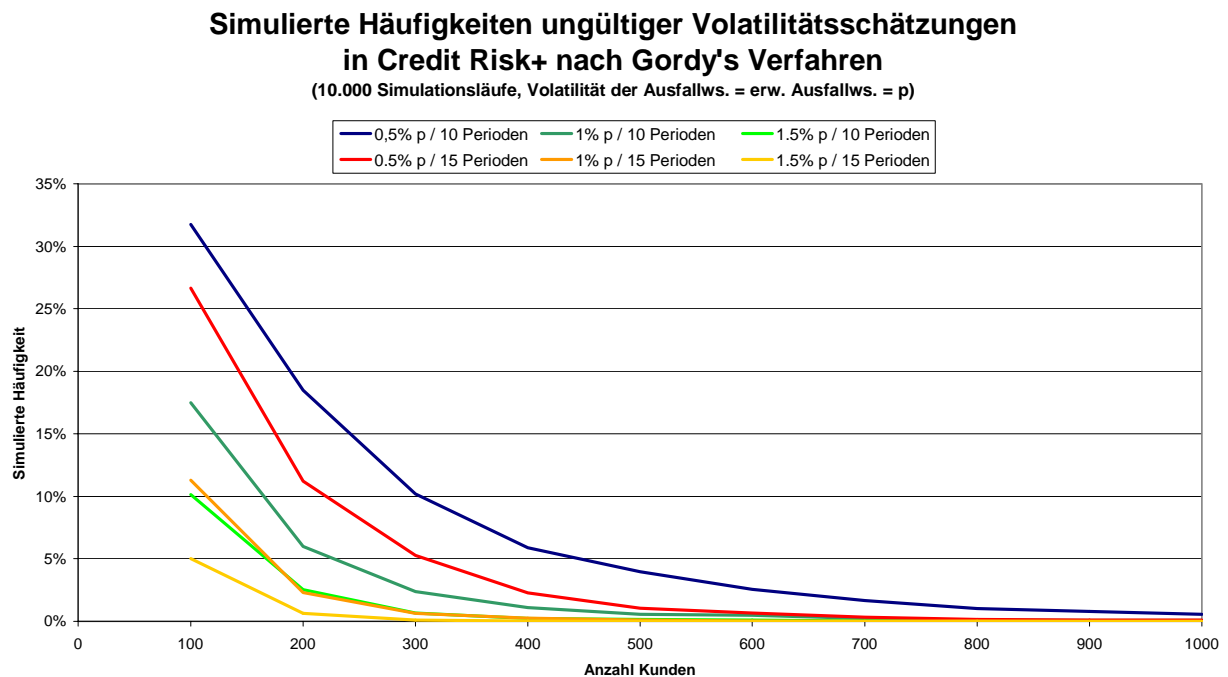
Beachte, dass dieser Varianzschätzer ein ungültiges Ergebnis liefert, wenn

$$\hat{V}(\hat{p}) < \eta \bar{p}(1 - \bar{p}),$$

da dann die geschätzte Varianz negative Werte annimmt. Simulationsergebnisse zeigen, dass dies umso häufiger eintritt, je kleiner die Ausfallwahrscheinlichkeiten und die wahren Ausfallvolatilitäten sind und je weniger Perioden in die Auswertung eingehen.

¹² Diese Darstellung des Schätzers präzisiert die Schreibweise von Gordy, Gleichung 17, p. 25.

Abbildung 2



Der Volatilitätsschätzer ist darüber hinaus zwar konsistent¹³, aber in kleinen Stichproben verzerrt¹⁴. Es ist zu erwarten, dass die Volatilität stark unterschätzt wird, wenn die Anzahl der Kunden

den und / oder die Anzahl der zur Verfügung stehenden Beobachtungsperioden klein sind.

Wenn Daten über mehr als 5 Perioden vorliegen, kann der Schätzfehler, der durch eine zu kleine Anzahl Kunden ausgelöst wird, minimiert werden, wenn wenigstens 200 Kunden in jedem Branche / Rating-Segment vorliegen (vgl. Abbildung 3). Da das Portfolio nach zwei Kriterien zerlegt wird (Rating und Branche), impliziert dies, dass eine Finanzinstitution, die 12 Ratinggruppen unterscheidet und Kreditnehmer aus 20 Branchen hat, mindestens 44.000 Firmenkunden benötigt, die ganz gleichmäßig über alle Risikogruppen verteilt sind. Dies ist eine relativ einschränkende Anforderung, da es meistens einige Segmente gibt, die nur dünn besetzt sind. In diesen Risikogruppen ist entsprechend

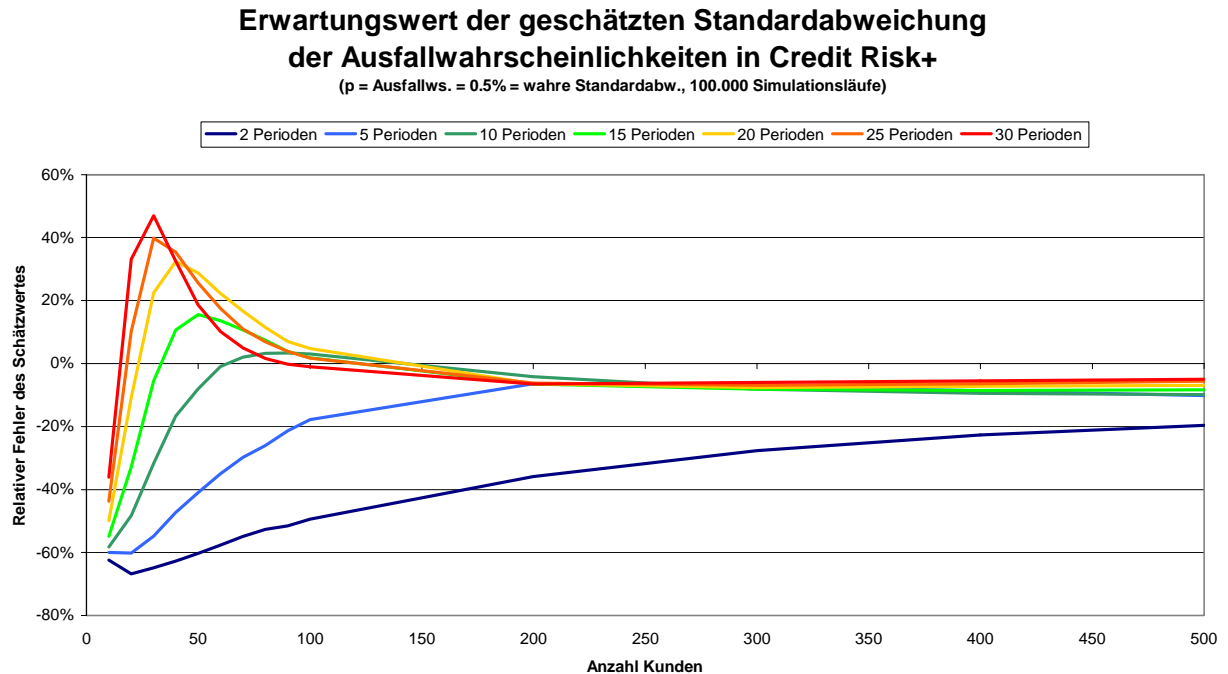
¹³ Konsistenz des Schätzers bedeutet hier, dass die geschätzte Ausfallvolatilität stochastisch gegen die wahre Ausfallvolatilität konvergiert, wenn die Anzahl der Kunden im Segment und die Anzahl der Beobachtungsperioden gegen unendlich geht. Stochastische Konvergenz wiederum bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ die Wahrscheinlichkeit, dass der geschätzte Wert vom wahren Wert um mehr als ε abweicht, gegen Null konvergiert, wenn die Anzahl der Kunden im Segment und die Anzahl der Beobachtungsperioden gegen unendlich geht.

¹⁴ Eine Verzerrung der Schätzung bedeutet hier, dass in kleinen Stichproben eine Abweichung des Schätzwertes der Ausfallvolatilität von der wahren Ausfallvolatilität nicht nur zufällig auftritt, sondern dass der Betrag der erwarteten Abweichung positiv ist, dass also ein sog. systematischer Schätzfehler auftritt.

Die Konsistenz des Schätzers impliziert hier, dass der systematische Fehler gegen Null geht, wenn die Anzahl der Kunden im Segment und die Anzahl der Beobachtungsperioden groß wird.

ein signifikanter Schätzfehler zu erwarten. ten.

Abbildung 3

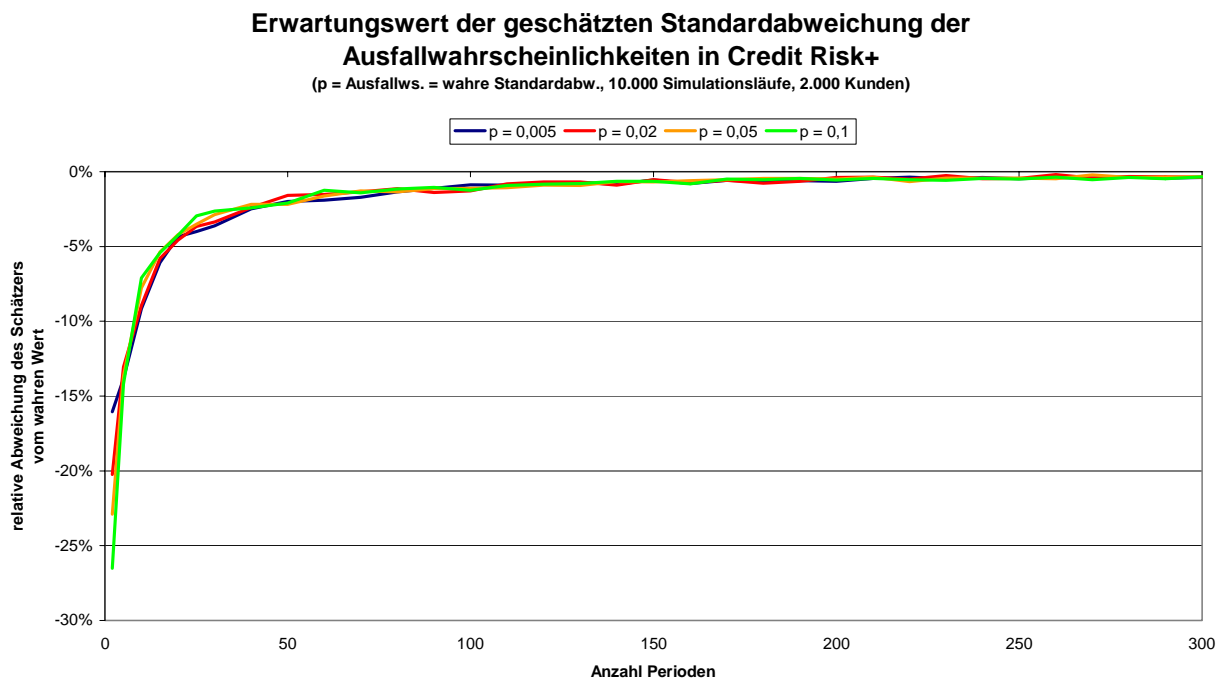


Es ist bemerkenswert, dass für 30 bis 50 Kunden in einem Segment die Volatilität der Ausfallwahrscheinlichkeiten überschätzt wird, wenn viele Beobachtungsperioden vorliegen. Dies liegt daran, dass sich die in der Kunden- bzw. Periodenzahl steigenden und fallenden Komponenten des Schätzers so überlagern, dass die geschätzte Ausfallvolatilität einen Peak erreicht, wenn das Segment mittelgroß ist und die Datenreihe lang.

Abbildung 4 illustriert, dass der Bias der Schätzung der Volatilität der Ausfallwahrscheinlichkeiten, der durch eine kleine Anzahl Beobachtungsperioden ausgelöst wird, nur langsam verschwindet. Liegen nur 5 Beobachtungsperioden vor, muss man auch bei 2.000 Kreditnehmern im Segment von einer systematischen Unterschätzung der Ausfallvolatilität in der Größenordnung von 15%

ausgehen. Bei 15 Perioden wird immer noch erwartet, dass die Volatilität um mehr als 5% unterschätzt wird. Bedenkt man, dass die Ausfallvolatilität neben der Ausfallwahrscheinlichkeit selbst den zentralen Risikofaktor in Credit Risk+ darstellt, zeigt dies, wie kritisch dieses Ergebnis ist, da nur sehr wenige Banken eine lange Ausfallhistorie für ihr internes Rating zur Verfügung haben.

Abbildung 4



Schließlich wird in Credit Risk+ angenommen, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten seriell unabhängig sind, obwohl gleichzeitig vorausgesetzt wird, dass die Ausfallwahrscheinlichkeiten in den einzelnen Perioden von bestimmten systematischen Risikofaktoren abhängen. Vom ökonomischen Standpunkt aus erscheinen diese Annahmen als fragwürdig und wenig intuitiv, da sie implizieren, dass die ‚systematischen‘ Risikofaktoren ebenfalls von Periode zu Periode unabhängig sind.

Die Voraussetzung der seriellen Unabhängigkeit ist jedoch wesentlich für das Modell. Ohne sie würde die Verteilung der Ausfallwahrscheinlichkeiten in einer Periode von den konkreten Werten der Risikofaktoren im Zeitverlauf abhängen, was wiederum genaue Informationen über Art und Messbarkeit der Faktoren erforderte, um die relevanten Inputparameter schätzen zu können.

Fazit

Die stochastische Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten in Credit Risk+ ist noch nicht soweit ausgereift, dass sie korrekte Ergebnisse in der Praxis zumindest erwarten ließe.

Anders als im Mittelwertmodell, wo es zu zufälligen Schätzfehlern bei der Bestimmung von Ausfallwahrscheinlichkeiten kommen konnte, ist in Credit Risk+ unter den Datenbeschränkungen realer Anwendungssituationen mit systematischen Fehlern, insbesondere einer systematischen Unterschätzung der Volatilität der Ausfallwahrscheinlichkeiten zu rechnen. Vor allem für die Schätzung von Ausfallvolatilitäten ist deshalb weitere Forschung erforderlich.

Gemeinsam mit den geschilderten gravierenden Problemen bei der analyti-

schen Berechnung der Portfolioverlustverteilung ist davon auszugehen, dass Credit Risk+ in seiner heutigen Form keine verlässlichen Portfolioanalysen liefern kann.

Kontakt:

Uwe Wehrspohn

Universität Heidelberg
Alfred Weber Institut
Grabengasse 14
69117 Heidelberg
Tel.: ++49.173.66 18 784
Email: wehrspohn@risknet.de

Center for Risk & Evaluation
GmbH & Co. KG
Berwanger Straße 4
75031 Eppingen
Email: wehrspohn@cre-germany.com

Literatur:

Credit Suisse Financial Products (1996): "Credit Risk+, a credit risk management framework," *Working Paper*

Michael Gordy (2000): "A comparative anatomy of credit risk models," *Journal of Banking and Finance* 24, pp. 119-149

Uwe Wehrspohn (2003): "Credit Risk Evaluation," Monographie (forthcoming)