

Risikomanagement mit Sprungprozessen (Teil 3)

Optionsbewertung in exponentiellen Lévy-Modellen

In Teil 1 unserer Serie „Risikomanagement mit Sprungprozessen“ (vgl. RISIKO MANAGER 15/2014) lernten wir Lévy-Prozesse als nützliches Werkzeug für die Modellierung von Preisprozessen mit Sprüngen kennen. Wir führten die Klasse der exponentiellen Lévy-Modelle ein und behandelten statistische Eigenschaften und Methoden zur Parameterschätzung. Dabei sahen wir, dass Lévy-Modelle einige am Markt beobachtbare Phänomene, wie beispielsweise schwere Ränder der Renditen oder die Asymmetrie von Gewinnen und Verlusten, sehr gut beschreiben können. In diesem Kapitel widmen wir uns der Optionsbewertung innerhalb der Lévy-Modellklasse.

In exponentiellen Lévy-Modellen nimmt der Preisprozess einer Aktie die Form $S(t) = S(0) \exp\{X(t)\}$, $t \geq 0$ an, wobei der Exponent X einen Lévy-Prozess bezeichnet. Im Vergleich zum Black-Scholes-Modell wird also die Brown'sche Bewegung mit Drift durch einen Lévy-Prozess ersetzt. Im Black-Scholes-Modell sind geschlossene Formeln für die Preise von europäischen Put- und Call-Optionen bekannt. Dies ist im Allgemeinen für Lévy-Modelle nicht der Fall, und man muss auf numerische Methoden oder Simulationsverfahren zurückgreifen.

Der Wert einer Option lässt sich bekanntlich berechnen als die diskontierte erwartete Auszahlung der Option bezüglich eines risikoneutralen Maßes. Im Black-Scholes-Modell kann dieses äquivalente Martingalmaß eindeutig bestimmt werden. Damit existiert auch eine eindeutige Bewertungsregel. In Lévy-Modellen gibt es im Allgemeinen kein eindeutiges Martingalmaß, sondern unendlich viele, was mit der Unvollständigkeit des Markts zusammenhängt. Das heißt, dass im Vergleich zum Black-Scholes-Modell, Derivate nicht perfekt repliziert werden können. Die Arbeiten von Delbaen und Schachermayer [vgl. Delbaen/Schachermayer 1998] und Cherny und Shiryaev [Cherny/Shiryaev 2002] geben einen guten Überblick zur Arbitragefreiheit und Beziehung zu äquivalenten Martingalmaßen in diesen unvollständigen Märkten.

Im ersten Abschnitt werden wir das Konzept der Lévy-Maße kennenlernen, das wir benötigen, um die Lévy-Khintchine-Formel zu verstehen. Diese Formel wird später unter anderem zur Bestimmung eines risikoneutralen äquivalenten Martingalmaßes benötigt. Weiterhin besprechen wir ein paar Eigenschaften der Lévy-Maße und betrachten diese genauer anhand von Bei-

spielen. Die Lévy-Khintchine-Formel erlaubt eine sehr intuitive Zerlegung eines Lévy-Prozesses in drei unabhängige Prozesse, nämlich die Zerlegung in einen deterministischen Drift, eine Brown'sche Bewegung und einen Sprungteil. Im zweiten Abschnitt kümmern wir uns um den Maßwechsel zu einem risikoneutralen äquivalenten Martingalmaß, die Esscher-Transformierte. Wie eingangs erwähnt, gibt es unendlich viele solche Maße. Die Esscher-Transformierte hat allerdings die besondere Eigenschaft der Strukturserhaltung, das heißt der diskontierte Preisprozess ist bezüglich dem neuen Maß nach wie vor ein exponentieller Lévy-Prozess, allerdings mit einer anderen Verteilung. Ein weiterer Grund, warum wir uns diesen speziellen Maßwechsel anschauen ist, dass die Verteilung bezüglich der Esscher-Transformierten für sehr viele Lévy-Prozesse bekannt ist. Um den Maßwechsel zu illustrieren, werden wir uns zwei Beispielen widmen, dem klassischen Black-Scholes-Modell und dem NIG-Modell. Abschließend geben wir einen kurzen Überblick, welche Möglichkeiten es gibt, die erwartete diskontierte Auszahlung bezüglich der Esscher-Transformierten zu berechnen, um Optionen bewerten zu können. Hier betrachten wir drei Methoden: die Monte-Carlo-Methode, die Fourier-Methode und die PIDE (Partielle Integro-Differentialgleichung)-Methode.

Lévy-Maße und die Lévy-Khintchine-Formel

Aus den vorherigen Kapiteln wissen wir, dass Lévy-Prozesse im Allgemeinen nicht-stetig sind. Um die Unstetigkeitsstellen eines Lévy-Prozesses $\{X(t), t \geq 0\}$ zu beschreiben, definierten wir den Sprungpro-

zess $\Delta X(t) = X(t) - X(t-)$, $0 \leq t \leq T$, wobei $X(t-)$ den linksseitigen Grenzwert darstellt, also $X(t-) = \lim_{s \uparrow t} X(s)$. Wir haben bereits Lévy-Prozesse kennengelernt, die in endlicher Zeit unendlich oft springen. Die Summe der Sprünge muss dabei nicht unbedingt konvergieren. Es kann also vorkommen, dass

$$\sum_{\{s \leq t\}} \Delta X(s) = \infty, \text{ f. s.}$$

Immer gilt jedoch, dass die Summe der quadrierten Sprünge konvergiert, d.h.

$$\sum_{\{s \leq t\}} \Delta X(s)^2 < \infty, \text{ f. s.}$$

Im folgenden Abschnitt führen wir mit dem Lévy-Maß ein nützliches Werkzeug zur Analyse der Sprünge von Lévy-Prozessen ein. Wir starten mit dem Lévy-Maß für Compound-Poisson-Prozesse und erweitern dieses anschließend zum Lévy-Maß für allgemeine Lévy-Prozesse.

Lévy-Maß für Compound-Poisson-Prozesse

Für einen Compound-Poisson-Prozess $\{L(t), t \geq 0\}$ mit Intensität α und Sprunghöhendichte f_Y kennen wir bereits aus dem ersten Kapitel dieser Serie die Cumulant-Funktion (vgl. ► Gleichung 01).

Mithilfe von $\nu(A) = \alpha f_Y(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich dies umschreiben zu ► Gleichung 02.

Das Maß ν , das für $\alpha \neq 1$ kein Wahrscheinlichkeitsmaß mehr darstellt, bezeichnen wir als das Lévy-Maß des Compound-Poisson-Prozesses. Anschaulich beschreibt $\nu(A)$ die erwartete Anzahl von Sprüngen, deren Sprunghöhen in der Menge A liegen, in einem Zeitintervall der Länge Eins. Im Spezialfall von Compound-Poisson-Prozessen ist das Lévy-Maß also

gegeben als Produkt von Intensität und Sprunghöhenverteilung. Das Lévy-Maß von Lévy-Prozessen ist im Allgemeinen nicht durch ein solches Produkt darstellbar. Wir werden nun das Lévy-Maß für allgemeine Lévy-Prozesse definieren.

Lévy-Maß für allgemeine Lévy-Prozesse

Für einen Lévy-Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ und einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ definieren wir das *Sprungmaß* von X durch **Gleichung 03**, wobei $\#$ die Anzahl der Elemente in der entsprechenden Menge angibt.

Das Sprungmaß zählt also schlichtweg die Sprünge des Prozesses X , die mit Sprunghöhe in A bis zum Zeitpunkt t eintreten. Mithilfe des Sprungmaßes lässt sich nun das *Lévy-Maß* ν für X definieren als **Gleichung 04**.

Somit können wir das Lévy-Maß interpretieren als die erwartete Anzahl pro Zeiteinheit Eins auftauchender Sprünge, deren Sprunghöhe in A liegt. Die Definition des Lévy-Maßes für allgemeine Lévy-Prozesse ist also konsistent zu dem bereits erwähnten Spezialfall von Compound-Poisson-Prozessen. Weiterhin lässt sich im Fall von $\nu(A) < \infty$ zeigen, dass das Sprungmaß $J(\omega, t, A)$ ein Poisson-Prozess mit Intensität $\nu(A)$ ist [vgl. zum Beispiel Theorem 19.2 in Sato 1999].

Einige Eigenschaften des Lévy-Maßes

Wir schauen uns nun die wichtigsten Eigenschaften von Lévy-Maßen an. Weitere Eigenschaften und Beweise findet der interessierte Leser in den Büchern von Applebaum, Bertoin und Sato [vgl. Applebaum 2004, Bertoin 1996 und Sato 1999].

Ein Lévy-Maß ν hat keine Masse am Ursprung, das heißt $\nu(\{0\}) = 0$.

Außerdem gilt, dass (1):

$$\int_{|x| \leq 1} |x|^2 \nu(dx) < \infty, \quad \int_{|x| > 1} \nu(dx) < \infty.$$

► Gleichung 01

$$K_{L(t)}(u) = t\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1) f_Y(dx), \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

► Gleichung 02

$$K_{L(t)}(u) = t \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{iux} - 1) \nu(dx), \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0$$

► Gleichung 03

$$\begin{aligned} J(\omega; t, A) &= \# \{0 \leq s \leq t, \Delta X(s) \in A\} \\ &= \sum_{\{s \leq t\}} 1_A(\Delta X(s)), \end{aligned}$$

► Gleichung 04

$$\nu(A) = E[J(\omega; 1, A)] = E \left[\sum_{\{s \leq 1\}} 1_A(\Delta X(s)) \right].$$

Da die Pfade von Lévy-Prozessen càdlàg sind, hat jeder Pfad nur eine endliche Anzahl von Sprüngen, deren Sprunghöhe betragsmäßig größer als ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ ist. Damit ist die Summe aller Sprünge im Zeitintervall $[0, t]$, die betragsmäßig größer sind als 1, endlich, das heißt

$$\sum_{\{s \leq t\}} \Delta X(s) 1_{|\Delta X(s)| > 1} < \infty.$$

Im Gegensatz zur Summe der *großen* Sprünge (größer als 1), kann die Summe der *kleinen* Sprünge (kleiner als 1) unendlich sein. In diesem Fall ist das Lévy-Maß nicht integrierbar. Genauer gilt:

- Ist ν ein *endliches Maß*, das heißt $\alpha := \nu(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \nu(dx) < \infty$, so kann man mit $f(dx) = \nu(dx)/\alpha$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß definieren. Dabei gibt α die erwartete Anzahl von Sprüngen und $f(dx)$ die Verteilung der Sprunghöhen an.

- Ist $\nu(\mathbb{R}) = \infty$, so werden unendlich viele *kleine* Sprünge erwartet.

Besitzt ein Lévy-Maß eine Dichte, so nennt man diese auch *Lévy-Dichte*. Anhand des Lévy-Maßes, beziehungsweise der Lévy-Dichte, kann man viele nützliche Informationen über den Lévy-Prozess erfahren, beispielsweise Pfadeneigenschaften.

► **Abb. 01** zeigt die Lévy-Dichten eines Compound-Poisson-Prozesses und eines NIG-Prozesses. Die Parameter entsprechen den an Marktdaten kalibrierten Parametern aus dem vorangegangenen Kapitel unserer Reihe. Hier lässt sich zum Beispiel ablesen, dass der Compound-Poisson-Prozess nur endlich viele Sprünge besitzt, wohingegen es beim NIG-Prozess unendlich viele Sprünge sind. Man spricht dann auch von einem Lévy-Prozess unendlicher Aktivität.

Ebenso trägt das Lévy-Maß auch Informationen über die Endlichkeit der Momen-

► Gleichung 05

$$\psi_{X(t)}(u) := \mathbb{E}[\exp\{iuX(t)\}] = e^{tK_X(u)}, \quad u \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

wobei

$$K_X(u) = iua - \frac{u^2 \sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux 1_{|x| < 1}) \nu(dx).$$

► Gleichung o6

$$K_X(u) = K^{(1)}(u) + K^{(2)}(u) + K^{(3)}(u) + K^{(4)}(u) \text{ mit}$$

$$K^{(1)}(u) = iua, \quad K^{(2)}(u) = -\frac{u^2\sigma^2}{2},$$

$$K^{(3)}(u) = \int_{|x|\geq 1} (e^{iux} - 1)v(dx), \quad K^{(4)}(u) = \int_{0<|x|<1} (e^{iux} - 1 - iux)v(dx).$$

te des Lévy-Prozesses mit sich. Die Endlichkeit der Momente ist nämlich bestimmt durch die Endlichkeit eines Integrals bezüglich des Lévy-Maßes. Präziser ausgedrückt: $E[|X(t)|^n]$ ist genau dann endlich, wenn $\int_{|x|>1} |x|^n v(dx) < \infty, t \geq 0$.

Lévy-Khintchine-Formel

Für jeden Lévy-Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$, existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, ein $b > 0$ und ein Lévy-Maß mit $v(\{0\}) = 0$, das (1) erfüllt, sodass die charakteristische Funktion von $X(t)$ gegeben ist durch die sogenannte Lévy-Khintchine-Formel, vgl. ► Gleichung o5.

Ein Beweis dieser Formel kann zum Beispiel in Sato [vgl. Sato 1999, Theorem 8.1] gefunden werden. Die Cumulant-Funktion K_X ist unabhängig vom Zeitpunkt t und kann als Summe von vier Funktionen geschrieben werden, vgl. ► Gleichung o6.

Nun schauen wir uns diese vier Summanden im Einzelnen an. Der erste Teil entspricht gerade der Cumulant-Funktion eines linearen Prozesses (Drift) mit Parameter α , der zweite Teil gehört zu einer Brown'schen Bewegung mit Volatilitätskoeffizient σ und der dritte Teil zu einem

► Gleichung o7

$$X_\varepsilon^{(4)}(t) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X(s) 1_{\{\varepsilon < |\Delta X(s)| < 1\}} - t \int_{\varepsilon < |x| < 1} xv(dx).$$

Compound-Poisson-Prozess mit Intensität $\alpha = v(\mathbb{R} \setminus (-1,1))$ und Sprunghöhenverteilung $f(dx) = v(dx)/\alpha 1_{\{|x|\geq 1\}}$. Um den vierten Teil zu interpretieren, führen wir den in ► Gleichung o7 dargestellten Prozess ein.

Hier repräsentiert die Summe die (endlich vielen) Sprünge mit einer Sprunghöhe, die betragsmäßig größer ist als ε , aber kleiner als 1. Das Integral entspricht dem durchschnittlichen Wert der Summe. Diese beiden Terme müssen immer gemeinsam betrachtet werden, da im Allgemeinen keiner der beiden Ausdrücke gegen einen endlichen Grenzwert konvergiert, wenn

man ε gegen 0 laufen lässt, die Differenz allerdings schon. Anhand des Gesetzes der großen Zahlen kann man nämlich sehen, dass $X_\varepsilon^{(4)}$ gleichmäßig gegen den Prozess $X^{(4)}$ konvergiert, und im Grenzwert gilt dann [siehe Theoreme 19.2 und 19.3 in Sato 1999] ► Gleichung o8.

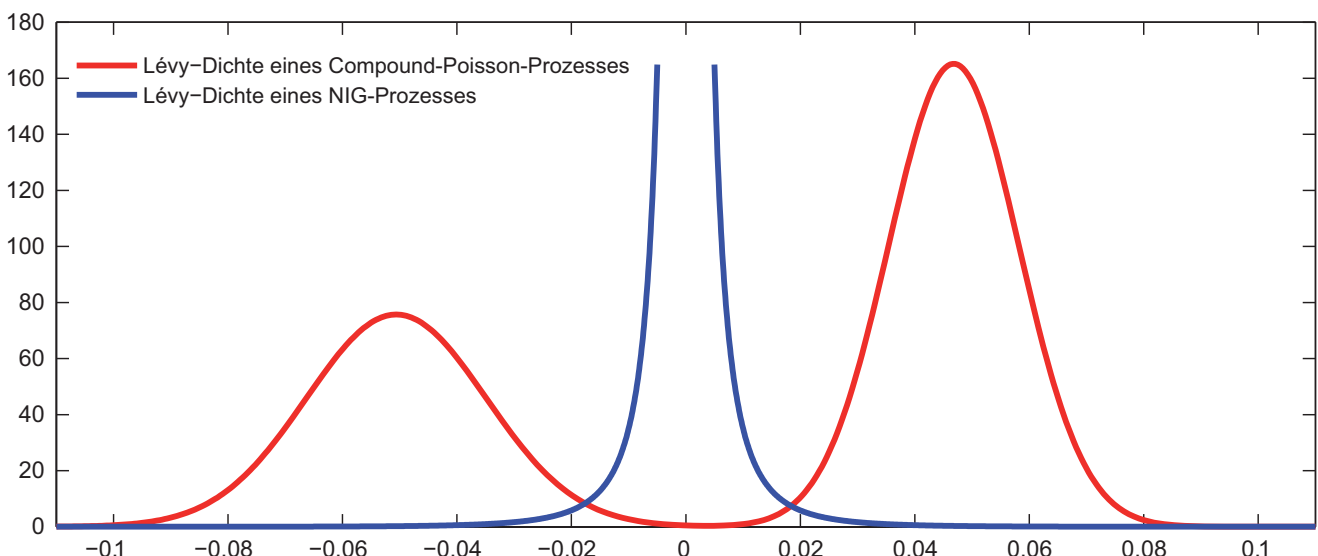
Kommen wir nun zur Interpretation von $K^{(4)}$ zurück und dem Grund, warum der Prozess $X_\varepsilon^{(4)}$ eingeführt wurde. Die Cumulant-Funktion von $X^{(4)}$ entspricht gerade $K^{(4)}$. Der ursprüngliche Lévy-Prozess kann also wiederum auch in vier Teile separiert werden, vgl. ► Gleichung o9.

► Gleichung o8

$$X^{(4)}(t) = \sum_{0 < s \leq t} \Delta X(s) 1_{\{0 < |\Delta X(s)| < 1\}} - t \int_{0 < |x| < 1} xv(dx).$$

Lévy-Dichten eines Compound-Poisson-Prozesses und eines NIG-Prozesses

► Abb. o1



► Gleichung 09

$$X(t) = at + \sigma W(t) + \sum_{s \leq t} \Delta X(s) 1_{|\Delta X(s)| \geq 1} + \left(\sum_{s \leq t} \Delta X(s) 1_{0 < |\Delta X(s)| < 1} - t \int_{0 < |x| < 1} xv(dx) \right).$$

Jeder Lévy-Prozess besitzt demnach eine Darstellung der obigen Form bestehend aus einem konstanten Drift, einer Brown'schen Bewegung, einem Compound-Poisson-Prozess und einem reinen Sprungmartingal. Diese Aufteilung nennt man die *Lévy-Itô-Zerlegung* eines Lévy-Prozesses. Das Triple (α, σ^2, ν) bestimmt also die Verteilung von $\{X(t), t \geq 0\}$ und wird als *Lévy-Khintchine-Triple* bezeichnet.

Die Esscher-Transformation

Der Preis einer Call-Option mit Strike K und Laufzeit T ist bekanntlich gegeben als die diskontiert erwartete Auszahlung unter einem äquivalenten Martingalmaß, vgl. ►

Gleichung 10.

Um also den Optionspreis zu bestimmen, muss man zunächst ein risikoneutrales Maß \mathbb{Q} spezifizieren. Da der Markt in einem exponentiellen Lévy-Modell unvollständig ist, gibt es (unendlich) viele Wege ein risikoneutrales Maß zu wählen. Hier möchten wir uns auf eine der bekanntesten Vorgehensweisen konzentrieren, die Esscher-Transformation. Andere äquivalente Martingalmaße kann man zum Beispiel in den Arbeiten von Fujiwara und Miyahara, Jeanblanc et al. sowie Schweizer [vgl. Fujiwara und Miyahara 2003, Jeanblanc et al. 2007 sowie Schweizer 1994] finden.

Die Esscher-Transformation wurde im Rahmen von effizienter Derivatebewertung in exponentiellen Lévy-Modellen als erstes von Gerber und Shiu [vgl. Gerber/Shiu 1994] behandelt und später auch auf allgemeinere Modellklassen, wie zum Beispiel Modelle mit stochastischer Volatilität, erweitert [vgl. zum Beispiel Hubaleck/Sgarra 2009]). Die Esscher-Transformierte ist ein strukturerhaltendes Martingalmaß, dergestalt dass Lévy-Prozesse im alten Maß \mathbb{P} auch wiederum im neuen Maß \mathbb{Q} Lévy-Prozesse sind, allerdings mit verändertem Lévy-Khintchine-Triple. Das Ziel ist nun das neue Lévy-Khintchine-Triple in Abhängigkeit vom alten Triple darzustellen, um die Verteilung des Lévy-Prozesses bezüglich der Esscher-Transformierten \mathbb{Q} zu beschreiben.

► Gleichung 10

$$C(T, S, K) = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S(T) - K)^+].$$

► Gleichung 11

$$d\mathbb{Q} = Z(t)d\mathbb{P}, \quad \text{mit} \quad Z(t) = \frac{e^{\theta X(t)}}{\mathbb{E}[e^{\theta X(t)}]}, \quad t \geq 0.$$

► Gleichung 12

$$\frac{\mathbb{E}[e^{\theta X(t)} S(0) e^{-rt} e^{X(t)}]}{\mathbb{E}[e^{\theta X(t)}]} = S(0) \Leftrightarrow \frac{\mathbb{E}[e^{(\theta+1)X(t)}]}{\mathbb{E}[e^{\theta X(t)}]} = e^{rt}.$$

► Gleichung 13

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \sigma^2 \theta + \int_{\mathbb{R}} (e^{\theta x} - 1) x 1_{\{|x| < 1\}} \nu(dx), \quad \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2, \quad \tilde{\nu}(dx) = e^{\theta x} \nu(dx).$$

Wir modellieren den diskontierten Preisprozess via $\tilde{S}(t) = S(0) \exp\{-rt + X(t)\}$, $0 \leq t \leq T$, wobei $\{X(t), t \geq 0\}$ ein Lévy-Prozess mit Lévy-Khintchine-Triple (α, σ^2, ν) ist. Sei $\theta \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $\int_{|x| > 1} |x|^n \nu(dx) < \infty$. Dann ist die Esscher-Transformierte gegeben durch ► **Gleichung 11.**

Um die Martingaleigenschaft des diskontierten Preisprozesses bezüglich des neuen Maßes \mathbb{Q} sicherzustellen, muss unter anderem verifiziert werden, dass für jede Zeit $t \geq 0$ gilt: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}(t)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S(0)] = S(0)$. Dies ist äquivalent zu ► **Gleichung 12.**

Die Existenz und Eindeutigkeit des Parameters $\theta \in \mathbb{R}$, der diese Bedingung erfüllt, wird zum Beispiel in Gerber und Shiu [vgl. Gerber/Shiu 1994] besprochen.

Das neue Lévy-Khintchine-Triple

Der Prozess $\{X(t), t \geq 0\}$ bleibt ein Lévy-Prozess unter der Esscher-Transformierten

mit neuem Lévy-Khintchine-Triple $(\tilde{\alpha}, \tilde{\sigma}^2, \tilde{\nu})$, vgl. ► **Gleichung 13.**

Für einen Beweis verweisen wir auf Hubaleck und Sgarra [vgl. Hubaleck/Sgarra 2005]. Im Folgenden präsentieren wir zwei Beispielmmodelle, das bekannte Black-Scholes-Modell und das NIG-Modell, und geben jeweils die Esscher-Transformierte an.

Beispiel 1 (Black-Scholes-Modell)

Der diskontierte Preisprozess ist gegeben als geometrische Brown'sche Bewegung, also $\tilde{S}(t) = S(0) \exp\{(-r+a)t + \sigma W(t)\}$, $0 \leq t \leq T$, wobei W eine Brown'sche Bewegung ist. Das Lévy-Khintchine-Triple des Exponenten hat also die Form $(\alpha, \sigma^2, 0)$. Die Dichte der Esscher-Transformation ist gegeben durch ► **Gleichung 14.**

Der Parameter θ muss die Martingalbedingung erfüllen vgl. ► **Gleichung 15.**

► Gleichung 14

$$Z(t) = \frac{e^{\theta X(t)}}{\mathbb{E}[e^{\theta X(t)}]} = \exp\left\{\theta \sigma W(t) - \frac{1}{2} \theta^2 \sigma^2 t\right\}.$$

Es folgt, dass X nach wie vor ein Wiener Prozess ist und bezüglich der Esscher-Transformierten sieht das neue Lévy-Khintchine-Triple wie folgt aus:

$$\tilde{a} = r - \frac{1}{2}\sigma^2, \quad \tilde{\sigma}^2 = \sigma^2, \quad \tilde{\nu}(dx) = 0$$

Da der Markt im Black-Scholes-Modell vollständig ist, gibt es genau ein risikoneutrales äquivalentes Martingalmaß. Damit muss natürlich die Esscher-Transformierte mit dem bekannten risikoneutralen Maß im Black-Scholes-Modell übereinstimmen, was auch der Fall ist. Mithilfe dieses Martingalmaßes lassen sich nun die bekannten geschlossenen Formeln für Put- und Call-Optionen herleiten.

Beispiel 2 (NIG-Modell)

Die NIG-Verteilung haben wir bereits sehr ausführlich in den beiden ersten Teilen dieser Artikelserie kennengelernt. Im NIG-Modell wird der diskontierte Preisprozess als exponentieller NIG-Prozess modelliert, das heißt $S(t) = S(0) \exp\{-rt + X(t)\}$, $0 \leq t \leq T$, wobei $X(1) \sim \text{NIG}(\alpha, \beta, \mu, \delta)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta \in (0, \infty)$, $|\beta| < \alpha$. Hubaleck und Sgarra [vgl. Hubaleck/Sgarra 2005] haben gezeigt, dass die Esscher-Transformierte im NIG-Modell genau dann existiert, wenn für die Parameter gilt: $\mu \geq 1/2$ und $\alpha \leq \delta \sqrt{2\alpha - 1}$. In diesem Fall ist X bezüglich des Maßes \mathbb{Q} wieder ein $\text{NIG}(\alpha, \beta, \mu, \delta + \theta)$ -Prozess (vgl.

► Gleichung 16).

Im Gegensatz zum Black-Scholes-Modell sind im NIG-Modell sowie in den allermeisten anderen Lévy-Modellen keine geschlossenen Formeln für europäische Put- und Call-Preise bekannt. Somit muss man die erwartete diskontierte Auszahlung bezüglich der Esscher-Transformierten entweder durch die Monte-Carlo-Methode simulieren oder man greift auf numerische Verfahren zurück. Im folgenden Abschnitt werden wir die einzelnen Möglichkeiten ansprechen.

Optionsbewertung

Die Bewertung Europäischer Optionen hängt im Wesentlichen von der Verteilung des Basiswerts zum Zeitpunkt der Optionsfälligkeit ab. In vielen Modellen kann diese Verteilung nicht geschlossen ausgewertet werden, und man ist gezwungen, numerische Verfahren zu finden, um den Optionspreis zu approximieren. Im Folgenden stellen wir drei mögliche Vorgehensweisen vor.

► Gleichung 15

$$rt = (\theta + 1)at + \frac{1}{2}(\theta + 1)^2\sigma^2t - \theta at + \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2t \Leftrightarrow r = a + \theta\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2.$$

► Gleichung 16

$$\theta = -\delta - \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2\beta} \sqrt{\frac{4\mu^2\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} - 1}.$$

► Gleichung 17

$$C(T, S, K) = \frac{\exp(-\alpha k)}{\pi} \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty e^{-ixk} \phi_T(x) dx \right)$$

► Gleichung 18

$$\phi_T(x) = \frac{\exp(-rT) \tilde{\psi}_{X(T)+\zeta}(x - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - x^2 + i(2\alpha + 1)x}, \quad x > 0,$$

Fourier-Methode

Die Fourierinversion stellt eine Methode dar, die charakteristische Funktion zu „invertieren“, die zugrunde liegende Verteilung zu extrahieren und den Optionspreis in numerisch effizienter Art und Weise zu bestimmen. Da wie angesprochen exponentielle Lévy-Modelle durch die Cumulant-Funktion des involvierten Lévy-Prozesses charakterisiert sind, stellt die Fourierinversionsmethode in dieser Modellklasse eines der gebräuchlichsten Werkzeuge zur Bewertung von Finanzprodukten dar. Als wegweisend können in

diesem Zusammenhang der Artikel von Carr und Madan [vgl. Carr/Madan 1999] und die Arbeit von Raible [vgl. Raible 2000] angesehen werden. Die Autoren zeigen auf, dass unter bestimmten technischen Voraussetzungen der Preis $C(T, S, K)$ einer Europäischen Option mit Fälligkeit T und $k := \ln(K)$ berechnet werden kann mittels ► Gleichung 17, wobei die Funktion $\operatorname{Re}(\cdot)$ den Realteil beschreibt, $\alpha > 0$ eine zur Anwendbarkeit der Inversionsformel notwendige Konstante ist und ► Gleichung 18 neben dem risikolosen Zinssatz r und dem logarithmierten Startwert $\zeta = \ln(S(0))$ die für das Pricing zentrale charakteristische

Anzeige





Nihoff | Hirschmann (Hrsg.)
BCBS 239
Regulatorische Anforderungen
und effiziente Umsetzung
59,00 Euro



Bank-Verlag GmbH
Wendelinstraße 1 | 50933 Köln

www.bank-verlag-shop.de

► Gleichung 19

$$\widehat{C}_N(T, S, K) = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (S(T_k) - K)^+.$$

Funktion $\tilde{\psi}_{X(T)+\zeta}$ des logarithmierten Aktienkurses $\ln(S(T))$ bezüglich der Esscher-Transformierten enthält.

Letzterer lässt sich auf die charakteristische Funktion des $S(T)=S(0)\exp(X(T))$ zugrunde liegenden Lévy-Prozesses X zum Zeitpunkt T überführen, wodurch deutlich wird, dass die obige Formel für $C(T, S, K)$ die Auswertung und Aggregation der charakteristischen Funktion des Lévy-Prozesses Werte auf der positiven Halbachse $(0, \infty)$ erfordert. Wie das Integral für den Callpreis effizient und simultan für verschiedene Ausübungspreise K berechnet werden kann, wird im nächsten Teil unserer Artikelserie erläutert, welcher die sogenannte Fast-Fourier-Transformation beleuchtet.

PIDE-Methode

Eine Alternative zur Fourier-Methode bildet das numerische Lösen der zum Optionspreis gehörenden Partiellen Integro-Differentialgleichung (engl. PIDE). Nach dem Feynman-Kac-Theorem [vgl. Hilber et al. 2013] entspricht der Preis einer Option nicht nur einem berechneten Erwartungswert, sondern gleichzeitig der Lösung $u(t, x)$ einer Differentialgleichung der Art

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + \mathcal{A}u(t, x) + ru(t, x) &= 0, \\ u(0, x) &= g(e^x). \end{aligned}$$

Der Operator \mathcal{A} enthält nun in anderer Form alle Informationen, die bisher durch das Lévy-Khintchine-Triple modelliert wurden, während die Anfangsbedingung in der zweiten Zeile das Auszahlungsprofil der Option bei Maturität repräsentiert. Durch die Überführung von Erwartungswerten in PIDEs werden aus stochastischen Objekten deterministische, deren Behandlung neue Ansätze erfordern. Mit Methoden zum numerischen Lösen solcher Differentialgleichungen beschäftigen wir uns in einem späteren Kapitel dieser Serie.

Monte-Carlo-Simulation

Die dritte Möglichkeit den Optionspreis zu berechnen, ist die sehr häufig genutzte Monte-Carlo-Simulation. Im Vergleich zu

den beiden anderen numerischen Methoden ist sie um ein Vielfaches langsamer, jedoch lassen sich damit auch sehr komplexe exotische Derivate bewerten, für die keine effizienten numerischen Methoden bekannt sind. Die Idee ist, den terminalen Aktienpreis $S(T)$ N -mal gemäß der Verteilung des Lévy-Prozesses zu simulieren. Anschließend berechnet man aus den simulierten Werten $S(T_k)$, für $k = 1, \dots, N$ den Optionspreis und mittelt über alle Simulationen (vgl. ► Gleichung 19).

Mit dem Gesetz der großen Zahlen lässt sich zeigen, dass dieser angenäherte Optionspreis für $N \rightarrow \infty$ gegen den tatsächlichen Preis konvergiert, also $\widehat{C}_N(T, S, K) \rightarrow C(T, S, K)$. Für mehr Details zur Monte-Carlo-Methode verweisen wir auf die lezenswerten Bücher von Glassermann und Korn et al. [vgl. Glassermann 2003 sowie Korn et al. 2010]. □

Fazit und Ausblick

In diesem eher technischen Kapitel lernten wir die Werkzeuge kennen, die man benötigt, um in exponentiellen Lévy-Modellen Europäische Optionen zu bewerten. Dazu gehören das Konzept der Lévy-Maße sowie die Lévy-Khintchine-Formel. Als äquivalentes Martingalmaß fokussierten wir uns auf die Esscher-Transformierte, die es auf recht einfache Art ermöglicht, in Lévy-Modellen risikoneutral zu bewerten. Abschließend motivierten wir numerische Verfahren zur effizienten Berechnung von Optionspreisen. Im Vergleich zu der sehr zeitaufwändigen Bewertung durch eine Monte-Carlo-Simulation, sind die Fourier-Methode und die PIDE-Methode in der Lage, Europäische Optionen in Lévy-Modellen sehr effizient zu bewerten. In den folgenden zwei Artikeln dieser Serie werden wir diese beiden Verfahren genauer unter die Lupe nehmen.

Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise:

- Applebaum, D. (2004):** *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. Cambridge University Press.
- Bertoin, J. (1996):** *Lévy Processes*. Cambridge University Press.

Carr, P./Madan, D. B. (1999): Option valuation using the fast Fourier transform. *The Journal of Computational Finance* 2(4): 61–73.

Cherny, A./Shiryayev, A. (2002): Vector stochastic integrals and the fundamental theorems of asset pricing. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 237, pp. 6–49.

Delbaen, F./Schachermayer, W. (1998): The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Math. Ann.* 312, pp. 215–250.

Fujiwara, T./Miyahara, Y. (2003): The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes. *Finance and Stochastics*. 7, pp. 509–531.

Gerber, H.U./Shiu, E.S.W. (1994): Martingale approach to pricing perpetual American options. *Proceedings of the 4th AFIR International Colloquium, Orlando, April 20–22*, pp. 659–689.

Glassermann, P. (2003): *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer.

Hilber, N./Reichmann, O./Schwab, C./Winter, C. (2013): *Computational methods for quantitative Finance: Finite element methods for derivative pricing*. Springer.

Hubalek, F./Sgarra, C. (2005): Esscher transforms and the minimal entropy martingale measure for exponential Lévy models. *Thiele Research Report No. 13*, pp. 1–33.

Hubalek, F./Sgarra, C. (2009): On the Esscher transforms and other equivalent martingale measures for Barndorff-Nielsen and Shepard stochastic volatility models with jumps. *Stochastic Processes and their Applications*. 119, pp. 2137–2157.

Jeanblanc, M./Klöppel, S./Miyahara, Y. (2007): Minimal Fq-martingale measure for exponential Lévy processes. *The Annals of Applied Probability*. 17, pp. 1615–1638.

Korn, R./Korn E./Kroisandt, G. (2010): *Monte Carlo Methods and Models in Finance and Insurance*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics.

Raible, S. (2000): *Lévy processes in finance: Theory, numerics, and empirical facts*. PhD thesis, University of Freiburg.

Sato, K. (1999): *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press.

Schweizer, M. (1994): On the minimal martingale measure and the Föllmer-Schweizer decomposition. *Stochastic Analysis and Applications*. 13, pp. 573–599.

Die Autoren:

Dr. Asma Khedher und **Thorsten Schulz** sind Wissenschaftler am Lehrstuhl für Finanzmathematik der Technischen Universität München. Sie sind Autoren zahlreicher Fachpublikationen in den Gebieten Finanz- und Versicherungsmathematik, Risikomanagement und Stochastik. Im Rahmen des KPMG Center of Excellence in Risk Management widmen sie sich aktuellen Fragestellungen des modernen Risikomanagements.

Wir bedanken uns herzlich bei der KPMG AG für das Sponsoring des KPMG Center of Excellence in Risk Management an der Technischen Universität München, über welches die Stellen von Asma Khedher und Thorsten Schulz teilfinanziert werden.