

## Auszug Publikationen 2006



- Zur Modellierung von Abhängigkeiten in der Bankpraxis – Copula-Funktionen zur Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils



# Zur Modellierung von Abhängigkeiten in der Bankpraxis – Copula-Funktionen zur Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils

Dr. Andreas Beck / Dr. Michael Lesko

Betriebswirtschaftliche Blätter 05/2006

Risiken sind nicht gleich Risiken. Die Aggregation von Chancen-Risiko-Profilen je Risikoart (Adressen-, Marktpreisrisiken etc.) zur Gesamtbank-Chancen-Risiko-Verteilung unter Berücksichtigung ihrer gegenseitigen Abhängigkeiten ist daher eine zentrale Herausforderung für die Bankpraxis. Während gegenwärtig noch die einfache Addition von Risikokennzahlen in der Praxis dominiert, ist ein Verfahren dabei, sich zum State of the Art zu entwickeln. Die Rede ist von der Modellierung mit Hilfe von Copula-Funktionen.

Eine zentrale Aufgabe im Rahmen unterschiedlichster finanzwirtschaftlicher Fragestellungen ist die Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Risikofaktoren in Portfolios. Dafür gibt es prägnante Beispiele, wie die Ermittlung

- des Gesamtbankrisikoprofils (Fall 1),
- des Gesamtbankrisikos im Rahmen der strategischen Asset-Allokation (Fall 2),
- der Adressenrisikoverteilung und des Credit-Value-at-Risks (Fall 3),
- der Modellpreise von CDO-Tranchen (Fall 4).

Im ersten Fall wird über die verschiedenen Risikoarten (Marktpreisrisiken, Adressrisiken, Operationelle Risiken) hinweg das Gesamtrisiko eines Kreditinstituts oder differenzierter die Verteilung der möglichen Gesamtbankwerte bezogen auf einen Risikohorizont ermittelt. Bei der strategischen Asset-Allokation (Fall 2) wird ein Optimierungsproblem gelöst, bei dem die Zielfunktion in der Regel eine Ertrags-Risiko-Relation ist. Die Ermittlung des Gesamtbankrisikos im Rahmen des Optimierungsproblems erfolgt methodisch analog zu der des Gesamtbankprofils.

Ein Hauptbestandteil jedes Credit-Value-at-Risk-Modells (Fall 2) stellt ein Modell für das systematische Risiko dar. Es dient dazu, simultan Risikofaktoren, beispielsweise Brancheninsolvenzraten im Modell CPV Direkt der Sparkassen-Finanzgruppe, zu simulieren, um das systematische Risiko im Adressrisikoportfolio zu modellieren.

Während in den ersten drei Fällen die Risikomessung im Mittelpunkt steht, geht es in Fall 4 um die Preisermittlung für Kreditderivate. Diesen Instrumenten liegen Portfolios zu Grunde, sodass die Adressrisikoverteilung in diesen Portfolios (Underlying) und deren Entwicklung im Zeitverlauf in die Bewertung integriert werden muss.<sup>1</sup>

Da der Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils im Rahmen der Mindestanforderungen an das Risikomanagement (MaRisk) und hier speziell der Erfüllung der Risikotragfähigkeitsanforderungen jedoch eine zentrale Bedeutung zukommt, wird in den folgenden praxisorientierten Überlegungen das Hauptaugenmerk auf die Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils gelegt.

## MaRisk-Anforderungen

Eine zentrale Anforderung der MaRisk ist die Gewährleistung der Risikotragfähigkeit<sup>2</sup>. Die Risikotragfähigkeit ist definiert als die Eigenschaft, dass das Gesamtrisiko, verursacht durch die wesentlichen Risiken unter Berücksichtigung von Wechselwirkungen (Gesamtbankrisikoprofil), laufend durch das seitens der Bank definierte Risikodeckungspotenzial gedeckt ist. Anforderungen an die genaue Ausgestaltung von Gesamtrisiko und Risikodeckungspotenzial werden nicht gestellt. Prinzipiell müssen dabei simultan die drei Bereiche wertorientierte, handelsrechtliche und regulatorische Steuerung betrachtet werden.<sup>3</sup>

Untersucht wird hier nur die wertorientierte Sicht. Dazu wird unterstellt, dass die Risikotragfähigkeit durch den Vergleich von Gesamtrisiko und Gesamtbanklimit geprüft wird. Diese Betrachtung ist für die Banksteuerung sinnvoll. Das Gesamtbanklimit wird als Anteil des Netto-Vermögens der Bank durch das Top-Management festgelegt. Ergänzend können das Gesamtrisiko und das Netto-Vermögen direkt verglichen werden. Anhand dieses Vergleichs wird die Ruin-Wahrscheinlichkeit der Bank errechnet, die unter anderem für die Ratingagenturen bei der Ratingvergabe bedeutsam ist.

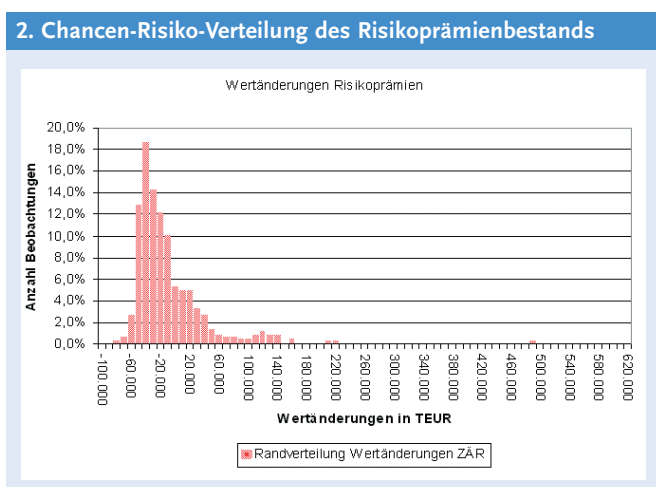
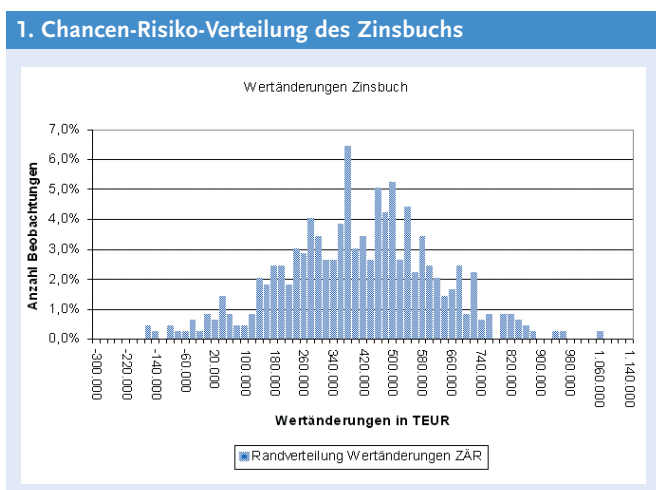
## Ein Beispiel

In unserem Beispiel soll eine Bank ausschließlich Kundengeschäft in Form der Kreditvergabe betreiben. Ihr Netto-Vermögen ergibt sich dabei als Summe aus dem Brutto-Vermögen (Zinsbuch-Barwert) und dem Bestand an Risikoprämien. Zu beachten ist hier, dass das Adressrisikoprämienportfolio eine Vermögensabzugsposition, also eine negative Vermögensposition, ist. Da weitere Vermögenspositionen wie Aktien, Immobilien oder Beteiligungen entfallen, unterliegt die Bank nur dem Zinsänderungs- und Adressrisiko.

Die Bank hat gegenwärtig ein Vermögen im Zinsbuch von 10.000.000.000 Euro und 200.000.000 Euro als Risikoprämienbestand. Das Netto-Vermögen beträgt also 9.800.000.000 Euro. Die isolierte Risikomessung erfolgte für beide Risikoarten über einen Zeithorizont von einem Jahr. Welche Modelle zur Ermittlung der Chancen-Risiko-Profile je Risikoart zugrunde gelegt werden, ist für unsere Überlegungen eigentlich uninteressant. Beispielhaft soll aber angenommen werden, dass die Verteilung der Wertänderungen für das Zinsrisiko mit Hilfe der historischen Simulation und das Adressrisiko anhand einer Monte-Carlo-Simulation (CPV oder CreditMetrics) ermittelt wurde.

## Randverteilungen und Aggregation

Die Chancen-Risiko-Verteilungen (Querschnittsanalysen) für das Zinsbuch und den Adressrisikoprämienbestand werden in den Abbildungen 1 und 2 dargestellt.



Ein negatives Vorzeichen stellt dabei einen Abbau des Risikoprämienbestands dar, ist also eine Chance, ein positives Vorzeichen eine Zunahme und damit ein Risiko.

Der vermeintlich einfachste Weg, die einfache Addition, vernachlässigt Diversifikationspotenziale und überschätzt das tatsächliche Gesamtrisiko somit massiv. Das Gesamtrisiko muss daher unter Diversifikationsaspekten ermittelt werden. Mögliche Vorgehensweisen zur Aggregation sind:

- Risikokennzahlen (Weg 1)
- der Gesamtverteilung (Weg 2)
  - Zusammenführung der Chancen-Risiko-Verteilungen je Risikoart (Variante 1)
  - integrierte Risikomessung und anschließende Ermittlung des Gesamtrisikos (Variante 2)

In der Praxis findet sich die Variante "Aggregation der Risikokennzahlen" in der Regel in der Ausprägung der korrelierten Addition der Einzel-Risikokennzahlen (Haltedauer, Konfidenzniveau).

Die Variante "Aggregation zur Gesamtverteilung" kann in zwei Untervarianten aufgespalten werden. In Variante 1 werden die Randverteilungen je Risikoart zusammengefasst. Mathematisch ist eine so genannte Faltung der Randverteilungen durchzuführen. Das dafür am meisten diskutierte Verfahren ist aktuell die Copula-Methode (siehe Abbildung 3).<sup>4</sup>

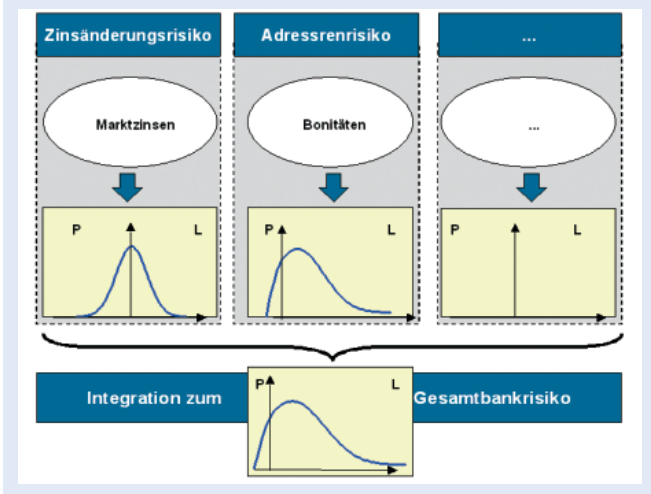
Für Variante 2 müssten alle Risikofaktoren simultan auf das Gesamtportfolio angewendet werden, um dann die Gesamtverteilung zu ermitteln. Dieser Weg ist konzeptionell und rechen-technisch gegenwärtig nicht realistisch und muss eher als Vision betrachtet werden.

## Copula-Funktionen

Eine Copula-Funktion beschreibt die funktionale Abhängigkeit zwischen verschiedenen Zufallsvariablen, die durch (Rand-)Verteilungen repräsentiert werden. Der Ansatz der Copula-Funktion wurde 1959 von Sklar in der Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt. Formal sind Copula-Funktionen multivariate Verteilungsfunktionen, deren Randverteilungen gleichverteilt sind.<sup>5</sup>

Mittels Copula-Funktionen können beliebig verteilte Zufallsvariablen mit beliebigen Abhängigkeitsstrukturen zu neuen gemeinsamen Verteilungsfunktionen verknüpft werden. Ihr Nutzen im Hinblick auf die Aggregation von Risiken sind.<sup>6</sup>

### 3. Aggregation von Randverteilungen zur Gesamtverteilung



- Die Risikoarten bzw. -faktoren müssen im Hinblick auf die Aggregation nicht als normalverteilt angenommen werden. Vielmehr sind beliebige Verteilungen zulässig.
- Die Abhängigkeit zwischen den Risikoarten bzw. -faktoren muss nicht linear abgebildet werden.

Anzumerken ist, dass die Technik der Copula-Funktionen zwar bereits seit geraumer Zeit in den Kreditrisikomodellen angewendet wird und dort etabliert ist, dies aber wohl nur den Fachspezialisten bewusst war. So liegt sowohl in CreditMetrics<sup>7</sup> als auch in CPV Direkt eine so genannte Gauß- oder Normal-Copula zur Modellierung der Korrelationen zu Grunde.

### Faltung

Das eigentliche Ziel der Risikoaggregation ist das Zusammenfassen der Randverteilungen je Risikoart unter Berücksichtigung der Abhängigkeiten zwischen den Risikoarten. Dieser Vorgang ohne Berücksichtigung von Abhängigkeiten nennt sich Faltung.

Die Grundidee der Faltung zeigt das folgende Beispiel. Gegeben seien die Risikoarten X (Zinsänderungsrisiko etc.) und Y (Aktienkursrisiko etc.). Die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt der entsprechenden Wertänderungen seien PX, PY (siehe Tabelle 1).

Bildet man nun alle gemeinsam möglichen Kombinationen, etwa den Eintritt von X = 0 und Y = -2, und addiert diese zur Zielgröße Z ( $Z = X + Y$ ) auf, so erhält man als Gesamtverteilung die Situation in Abbildung 4.

Die Faltung ist damit nichts anderes als eine andere Auswertung der multivariaten Wahrscheinlichkeitsfunktion.<sup>8</sup> Bei multivariaten Wahrscheinlichkeitsfunktion wird allen möglichen Paaren

eine gemeinsame Eintrittswahrscheinlichkeit zugewiesen.<sup>9</sup> Bei der Faltung werden die Koordinaten der Paare addiert und im Fall, dass verschiedene Kombinationen zum selben Summenwert führen ( $2 = 0 + 2$ ,  $2 = 2 + 0$  etc.), aufsummiert. Der entscheidende Punkt ist somit die Ermittlung der multivariaten Wahrscheinlichkeitsfunktion, in der die Abhängigkeit zwischen den Randverteilungen enthalten ist.

### Copula-Simulationsmodelle

In der Praxis wird das Aggregationsproblem in vier Schritten gelöst. In Schritt 1 werden gleichverteilte Zufallszahlen ("eigentliches Copula-Modell") simuliert. Dabei werden anhand einer Monte-Carlo-Simulation je Szenario eine große Zahl abhängiger, gleichverteilter Zufallszahlen für alle Risikoarten (Zins- und Adressrisiko etc.) erzeugt.

Schritt 2 beschreibt das Quantil-Mapping<sup>6</sup> ("Randverteilungen"). Hier erfolgt ein Vergleich der jeweiligen gleichverteilten Zufallszahl mit dem zu dieser Wahrscheinlichkeit gehörigen Quantil ("Wertänderung") der jeweiligen Randverteilung. Die Simulationsergebnisse je Risikoart und Szenario werden daraufhin in Schritt 3 addiert ("Gesamtrisiko"). Auf Basis aller Szenarien wird schließlich im vierten Schritt die Häufigkeitsverteilung für die Gesamtbank ermittelt.

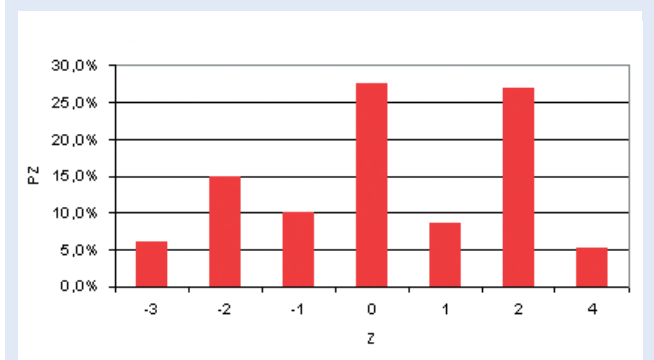
Tabelle 1: Inputdaten der Randverteilung

X	PX	Y	PY
-1	25%	-2	25%
0	60%	0	40%
2	15%	2	35%
Summe	100%	Summe	100%

Tabelle 2: Ergebnis der Faltung

Z	PZ
-3	6,3%
-2	15%
-1	10%
0	28%
1	9%
2	27%
4	5%

### 4. Faltung



## Quantil-Mapping

Wie aber wird das Quantil-Mapping durchgeführt? Ein Beispiel macht dies deutlich. Dabei sei für das Zinsrisiko die Zufallszahl 0,2 und für das Adressrisiko die Zufallszahl 0,7 – zu rechnen ist dann mit  $1 - 0,3 = 0,7$  – geworfen worden. Daraus resultieren für die Randverteilungen Wertänderungen in Höhe von 291.092.000 Euro und -11.370.000 Euro. Man kann also sagen, dass das Copula-Modell in Schritt 1 eine Monte-Carlo-Simulation von Konfidenzniveaus ist und die Copula die jeweilige Spielregel der Simulation.

Die gängigsten Spielregeln in der Praxis sind die so genannte Normal- oder Gauß-Copula und die Student-Copula. Bei der Normal-Copula handelt es sich um eine so genannte implizite Copula-Funktion, da keine einfache geschlossene Form für die Gauß-Copula – dies gilt auch für die Student-Copula – vorliegt. Die Gauß-Copula ist die gegenwärtig am meisten angewandte Copula-Funktion.

Mit Hilfe der T- oder Student-Copula-Funktion gelingt es, nicht-lineare Abhängigkeiten und stärkere Abhängigkeiten zwischen extremen Ereignissen abzubilden. Beide Funktionen gehören der Klasse elliptischer Funktionen an und weisen ein symmetrisches Abhängigkeitsverhalten auf.<sup>11</sup> Die Student-Copula hat zusätzlich zur Korrelation einen weiteren Parameter, den so genannten Freiheitsgrad.

Für die Simulation der abhängigen, gleichverteilten Zufallszahlen in Schritt 1 mit der Normal-Copula werden sie mit Hilfe der Cholesky-Faktorisierung in korrelierte standardnormalverteilte Zufallszahlen umgewandelt und anschließend rücktransformiert. Die Simulation der Student-Copula kann nicht analog erfolgen. Dafür muss eine zusätzliche Transformation unter Verwendung von Chi-Quadrat-verteilten Zufallszahlen vorgenommen werden. Abbildung 5 zeigt im Fall einer sehr hohen Korrelation von 80 % den Zusammenhang zwischen unabhängigen gleichverteilten Zufallszahlen und mit Hilfe der Normal-Copula abhängigen gleichverteilten Zufallszahlen.

### 5. Unkorrelierte und Abhängige gleichverteilte Zufallszahlen

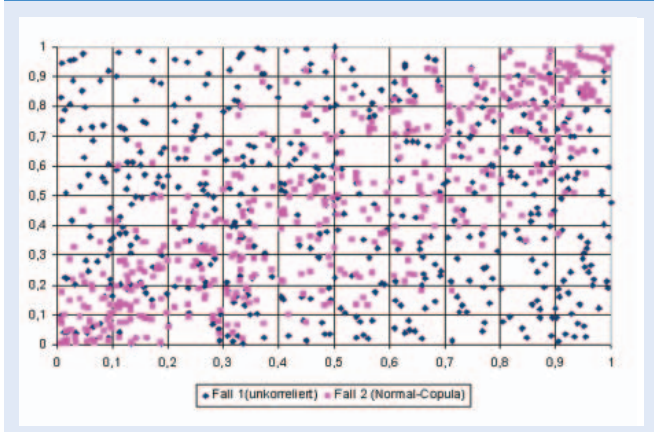
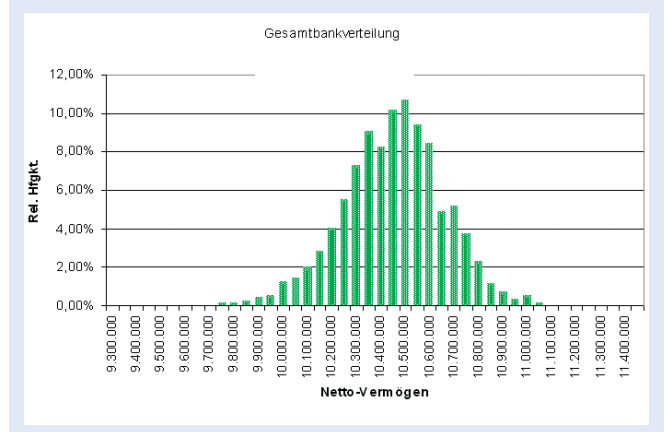


Abbildung 6 verdeutlicht die unterschiedliche Wirkungsweise von Normal- und Student-Copula. Bei der Student-Copula können vor allem in den extremen Chancen- und Risikokombinationen häufiger Werte auftreten.

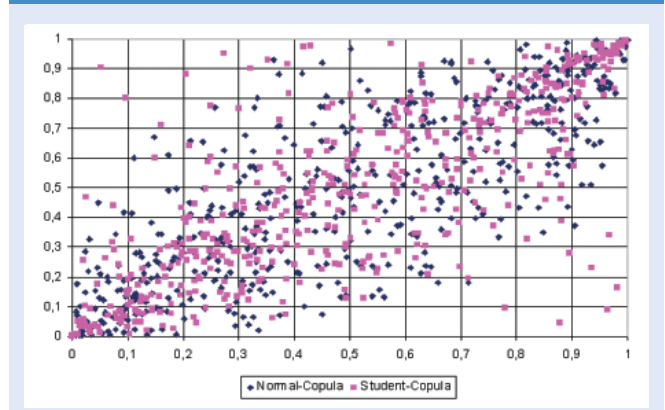
## Gesamtbankverteilung

Die ermittelte Verteilung des Netto-Vermögens anhand der Student-Copula für die Parameter Korrelation zwischen Zinsbuch und Adressrisiko von -10% und Freiheitsgrad 3 wird in Abbildung 7 dargestellt. Anhand der Gesamtbankverteilung, bezogen auf das verwendete Risikomaß und das gewählte Konfidenzniveau kann die Auslastung des Gesamtbanklimits errechnet werden. Beispielsweise kann das Gesamtbanklimit 10% des Nettovermögens zum Kalkulationszeitpunkt betragen.

### 7. Gesamtbankverteilung



### 6. Abhängige und gleichverteilte Zufallszahlen, erzeugt mittels Normal-Gauß-Copula





## Ausblick

Nach wie vor ist die Aggregation durch korrelierte Addition von Risikokennzahlen eine einfache und schnell umsetzbare Lösung. Schwächen dieses Ansatzes liegen unter anderem darin, dass nicht die volle Information (Verteilung) zum Problem vorliegt und schiefe Verteilungen nicht adäquat abgebildet werden.

Copula-Funktionen sind gegenwärtig dabei, sich zum Standardverfahren zur Aggregation von Risiken zu entwickeln. Der einfachste Weg hierbei ist sicher zunächst die Normal-Copula anzuwenden. Der Einsatz der Copula-Funktionen scheint trotz sicherlich noch bestehenden Forschungsbedarfs etwa im Hinblick auf die Wahl der "richtigen" Copula und derer Parameter (Korrelationsmatrix ect.) gerechtfertigt, wenn man bedenkt, dass die Technik im Rahmen der Kreditrisikomodellierung bereits State of the Art ist.

### Autoren:

#### Dipl. Math. oec. Dr. Andreas Beck

Seit Juli 2006 Geschäftsführer der ICnova GmbH in Karlsruhe. Studium der Wirtschaftsmathematik an der Universität Ulm und Syracuse, New York. 1996 Promotion am Lehrstuhl für angewandte Analysis an der Universität Ulm. Ab 1996 bei GILLARDON in der Geschäftsführung für den Aufbau des Bereichs Gesamtbanksteuerung und Consulting verantwortlich. Autor zahlreicher Publikationen zu den Themen Produktkalkulation, Risikomanagement und Aufsichtsrecht.

#### Dipl. Math. oec. Dr. Michael Lesko

Leiter Research Gesamtbanksteuerung bei GILLARDON. Studium der Wirtschaftsmathematik und Promotion an der Universität Ulm. Begleitend zur Promotion Mitarbeiter am Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften (IFA), Ulm. Seit 1998 bei GILLARDON tätig mit dem Schwerpunkt Kreditrisikomodellierung und -systeme. Diverse Veröffentlichungen sowie Seminar- und Referententätigkeiten zu dieser Thematik.

- 1 Kiesel, R. / Lesko, M. / Prestele, C., Modellierung von Abhängigkeiten bei der Bewertung von Verbriefungen, in: Gruber, W. et al.: Handbuch Kreditderivate und Verbriefungen, Poeschel, 2005, S. 313 - 329.
- 2 Vgl. Rundschreiben 18/2005, AT 4.1, Tz. 1
- 3 Vgl. Beck, A., Lesko, M., Moderne Ansätze zur Messung von Ertrag und Risiko der Gesamtbank, erscheint in: Sator, F. (Ed.), Handbuch MaRisk, FC Heidelberg, 2006.
- 4 Vgl. Nelsen, R. B. 1999, H. Li, D.X., 2000, Kiesel, R. et al. 2005, Böcker, K. / Spielberg 2005.
- 5 Nelsen, R.B.: An introduction to copulas, volume 139 of Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999.
- 6 Böcker, K. / Spielberg, H.: Risikoaggregation mit Copulas, in: Die Bank 08/2005, S. 56 - 59.
- 7 Lesko, M. / Vorgrimler, S.: Monte-Carlo-Techniken bei modernen Kreditrisikomodellen – ein Beispiel, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 21/1999 und Li, D.X.: On Default Correlation: A Copula Function Approach, in: Journal of Fixed Income, S. 43 - 54, 2000.
- 8 Da im Beispiel diskrete Zufallsvariablen betrachtet werden, wird von Wahrscheinlichkeitsfunktion und nicht von Dichte gesprochen.
- 9 Die Verteilungsfunktion ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion im diskreten Fall durch Summation der Wahrscheinlichkeiten und im stetigen Fall durch Integration der Dichten.
- 10 Durch diesen Schritt können beliebige Randverteilungen zusammengefasst werden.
- 11 Es gibt auch unterschiedliche Copulas, die asymmetrisches Verhalten aufweisen, diese Copulas sind vor allem dann relevant, wenn Chancen und Risiken in der Realität nicht symmetrisch eintreten.

### Literatur:

Beck, A., Lesko, M.: Moderne Ansätze zur Messung von Ertrag und Risiko der Gesamtbank, erscheint in: Sator, F. (Ed.), Handbuch MaRisk, FC Heidelberg, 2006.

Böcker, K. / Spielberg, H.: Risikoaggregation mit Copulas, in: Die Bank 08/2005, S. 56 - 59.

Kiesel, R. / Lesko, M./ Prestele, C.: Modellierung von Abhängigkeiten bei der Bewertung von Verbriefungen, Handbuch Verbriefungen und Kreditderivate, Poeschel, 2005, S. 313 - 329.

Lesko, M./ Vorgrimler, S.: Monte-Carlo-Techniken bei modernen Kreditrisikomodellen – ein Beispiel, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 21/1999

Li, D.X.: On Default Correlation: A Copula Function Approach, in: Journal of Fixed Income, 9, pp 43 - 54, 2000.

Nelsen, R.B.: An introduction to copulas, volume 139 of Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999.

O. V., Rundschreiben 18/2005, Mindestanforderungen an das Risikomanagement

# GILLARDON – innovative Lösungen für die Finanzwirtschaft

## Die Lösungen

Unsere Kernkompetenzen umfassen die Bereiche Kundenberatung, Produktkalkulation und Gesamtbanksteuerung.

### Kundenberatung

**evenit™** ist das themenorientierte Beratungssystem für alle Vertriebskanäle für die Themen Altersvorsorge, Baufinanzierung, Vermögensanalyse und Financial Planning.

### Produktkalkulation

**MARZIPAN™** ist die Lösung zur Produktberatung und -kalkulation von Aktiv- und Passivgeschäften auf Basis der Marktzins- und Barwertmethode.

**FinanceFactory™** ist das regelbasierte Kalkulationssystem für die Absatzfinanzierung, das alle Darlehensvarianten der Absatzfinanzierung inklusive Restkreditversicherung und Subventionsrechnung abdeckt.

### Gesamtbanksteuerung

**THINC™** ist die integrierte Softwarelösung zur wertorientierten Gesamtbanksteuerung und deckt die Themen Markt- und Vertriebssteuerung, Bilanzstrukturmanagement, Risikocontrolling, Treasury, Adressrisikosteuerung, Basel II und IAS / IFRS ab. THINC unterstützt Sie bei der Erfüllung der Anforderungen aus den MaRisk.



GILLARDON ist Branchenspezialist für Softwarelösungen, Consulting und Seminare in den Themenbereichen Kundenberatung, Produktkalkulation und Gesamtbanksteuerung.