Risikomodellierung unter Parameterunsicherheit

Bayessche Statistik in der Risikoquantifizierung

Die Quantifizierung wesentlicher Risiken ist von grundlegender Bedeutung für eine wertorientierte Unternehmensführung. Doch häufig sind die Erhebung der verfügbaren Risikoinformationen und die Zusammenführung zu einer bestmöglichen Datengrundlage problematisch. Ursachen sind beispielsweise unzureichende Datenqualität, fehlende Daten oder geringer Informationsgehalt einer kurzen Datenhistorie genauso wie die möglicherweise unüberwindbare Komplexität einer fehler- und überschneidungsfreien Aggregation von Informationen aus unterschiedlichen Datenbanken und Dateien. Aus diesem Grund wird häufig auf „subjektives" Expertenwissen zurückgegriffen. Die methodischen Herausforderungen, die sich zu Beginn der Risikoquantifizierung ergeben, liegen in einer adäquaten und transparenten Zusammenführung von Daten und Expertenwissen. Mit den Methoden der Bayesschen Statistik können die Kombination unterschiedlicher Informationsquellen in der Risikomodellierung berücksichtigt und Schätzunsicherheiten im Zusammenhang mit der Parametrisierung eines Risikomodells reduziert werden.

Abb. 01 **Risikoquantifizierung im Vergleich – Klassisch und Bayes**

Risikoquantifizierung

Schritt 1

Gesamtrisikomodell für den jährlichen Oberleitungsschaden (*SH*)*

$$SH = \sum_{t=1}^{N} X_i$$

mit N für die jährliche Schadenanzahl
X_i für den i-ten Oberleitungsschaden im Prognosejahr

* Zur einfacheren Übersicht wird zunächst angenommen, dass die einzelnen Oberleitungsschäden unabhängig voneinander auftreten und dieselbe, bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung (inkl. bekannter Parameter) besitzen.

Modellierung der jährlichen Schadenanzahl
$$N \sim Pois\ (\lambda)$$
mit λ als durchschnittliche Schadenanzahl pro Jahr

Frequentistischer Ansatz
„λ ist eine unbekannte Konstante“
Schätzung von λ
1,7

Bayesscher Ansatz
„λ ist eine Zufallsgröße“
λ besitzt Wahrscheinlichkeitsverteilung
$\lambda \sim$ Gamma (3,846; 0,442)

Monte-Carlo-Simulation für jährlichen Oberleitungsschaden

Schritt 2

Anwendung eines Risikomaßes
$\sigma\ (SH)$, $\mathrm{VaR}_{\alpha}\ (\mathrm{SH})$

Herausforderungen in der Risikoquantifizierung am Beispiel operationeller Risiken

Ausgangspunkt des klassischen Risikomanagementprozesses ist die Risikoanalyse, die Gleißner [vgl. Gleißner 2019] als grundlegende Voraussetzung für eine wertorientierte Unternehmenssteuerung anführt. Neben einer strukturierten Identifikation und Beurteilung von Risiken beinhaltet die Risikoanalyse die Risikoquantifizierung, die sich aus den folgenden zwei Schritten zusammensetzt:

1. Das Risiko wird als Zufallsgröße aufgefasst. Die möglichen Ausprägungen mit ihren Eintrittswahrscheinlichkeiten werden durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung beschrieben.
2. Ein Risikomaß wird angewandt, das unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsverteilung den Risikogehalt durch eine reelle, positive Zahl ausdrückt.

Mithilfe der Quantifizierung sollten insbesondere die für ein Unternehmen wesentlichen Risiken auf ihre quantitativen Auswirkungen untersucht werden. Je nach Risikoart bereitet aber gerade deren quantitative Beschreibung Schwierigkeiten, wie nachfolgend an einem Beispiel verdeutlicht wird.

Die bedeutendsten Geschäftsrisiken für Unternehmen weltweit stellen dem „Risikobarometer 2019“ der Allianz SE folgend Betriebsunterbrechungen und Cyber-Vorfälle dar. Das Risiko der Betriebsunterbrechung führt schon zum siebten Mal die Rangliste an, während Cyber-Vorfälle erstmals im Jahr 2019 gleichauf mit Betriebsunterbrechungen genannt werden. Beide Risiken sind direkt oder indirekt miteinander verflochten. So sind beispielsweise die Ursachen von Betriebsunterbrechungen Cyber-Vorfälle. Auch mögliche Ursachen wie Naturkatastrophen, Brände in der Produktion, Terrorismus, Betrug, Sabotage und Systemausfälle überschneiden sich. Für diese oft unter dem Begriff „operationelles Risiko“ kategorisierten Gefahren ist ein Risikomanagement unerlässlich, jedoch erweist sich deren Quantifizierbarkeit als schwierig. Folgende Herausforderungen treten auf:

» Operationelle Risiken zeichnen sich häufig durch sehr unternehmensspezifische Charakteristika aus, sodass die Übertragbarkeit von statistischen Methoden und Modellen ggf. nicht uneingeschränkt möglich ist.
» Es handelt sich um seltene Risikoereignisse mit hoher, aber unsicherer Wirkung. Die mathematische Modellierung mithilfe der Stochastik wird durch extreme Schadenwerte und eine unregelmäßige, aber stetige Zunahme dieser Schäden im Zeitverlauf erschwert [vgl. Embrechts/Kaufmann/Samorodnitsky 2004].
» Relativ wenige Daten bzw. eine unzureichende Datenbasis stehen für die quantitative Beschreibung des Risikos zur Verfügung.

Unter Berücksichtigung dieser Herausforderungen gründen die verfügbaren Risikoinformationen oft auf internen Daten und (unternehmensspezifischem) Expertenwissen. Eine bestmögliche Datengrundlage resultiert somit aus einer adäquaten Kombination aller Risikoinformationen und hat einen wesentlichen Einfluss auf Güte und Belastbarkeit der anschließenden Risikoquantifizierung und aller weiteren Prozessschritte. Die Bayessche Statistik zeigt einen strukturierten Weg auf, wie unterschiedliche Informationen konsistent und nachvollziehbar zusammengeführt werden können. Sie stellt wissenschaftliche Methoden zur Verfügung, die die Zusammenführung qualitativer Informationen aus Experteninterviews und quantitativer Informationen aus Datenanalysen „objektivieren“ und Transparenz über die Herleitung eines Risikomodells schaffen.

Um die Möglichkeiten der Bayesschen Statistik darzustellen, werden zunächst an einem Praxisbeispiel die Methoden der klassischen Statistik aufgezeigt, die bei der quantitativen Beschreibung eines operationellen Risikos zum Einsatz kommen (der sogenannte „frequentistische Ansatz“ zur Risikomodellierung). Die mit der Risikomodellierung einhergehende Schätzunsicherheit wird aufgezeigt und die Anwendung des „Bayesschen Ansatzes“ in die Risikomodellierung implementiert. **(▶ Abb. 01)**

Klassische Statistik in der Risikoquantifizierung

Im weiteren Verlauf wird ein fiktives kommunales Verkehrsunternehmen betrachtet, dessen Aufgabe der Betrieb von öffentlichem Personennahverkehr (ÖPNV) ist. Unter Betrieb wird die „Gesamtheit aller Maßnahmen eines Verkehrsunternehmens, die der Personen- und Güterbeförderung dienen“ [Verband deutscher Verkehrsunternehmen 2006] verstanden. Der Betrieb eines Verkehrssystems unterliegt einer Vielzahl verschiedener Störeinflüsse wie technischen Störungen, Unregelmäßigkeiten an den Fahrwegen oder Fahrzeugen sowie gefährlichen Ereignissen [vgl. Schnieder 2015]. Andererseits verpflichtet der gesetzliche Rahmen oder zumindest ein Verkehrsvertrag das Verkehrsunternehmen „den genehmigten Betrieb während der Zeitdauer der Genehmigung aufrecht zu erhalten“ [Schnieder 2015]. Das fiktive Verkehrsunternehmen setzt u. a. Straßenbahnen zur Personenbeförderung ein. Im Rahmen der Mittelfristplanung wird das Risiko von Oberleitungsausfällen identifiziert und am entstehenden jährlichen monetären Schaden gemessen.

Der Betriebsleiter erläutert dem Risikomanagement die Situation eines Oberleitungsausfalls wie folgt: Straßenbahnen beziehen ihre Energie zum Fahren aus einer Oberleitung. Das ist ein blanker Draht, der über dem Fahrweg und damit über dem Fahrzeug angeordnet ist. Mithilfe eines Stromabnehmers auf dem Dach des Fahrzeugs wird während der Fahrt der Kontakt, und somit die Stromversorgung, hergestellt. Die Oberleitung befindet sich in einer Höhe von rund fünf Metern, das entspricht ungefähr der zweiten Etage eines Hauses. Trotz der Höhe kommt es vor, dass die Leitung von anderen Verkehrsteilnehmern, wie LKWs, beschädigt oder auch heruntergerissen wird. Zur Wiederherstellung des Straßenbahnbetriebs muss die Oberleitung instandgesetzt, das heißt repariert werden. Da dies oft mehrere Stunden dauern kann, werden in der Zeit die Fahrgäste mit Bussen weiterbefördert. Man spricht dabei vom Schienenersatzverkehr. Im Unternehmen fallen deshalb neben den Kosten für die Schadenbehebung auch Kosten für den Schienenersatzverkehr an.

Der Betriebsleiter teilt ferner mit, dass keine aktuellen oder historischen Daten vorliegen, er kann nur aus seiner langjährigen Erfahrung in einem anderen Unternehmen einen Wert für die Anzahl der jährlichen Oberleitungsschäden und die mögliche Schadenhöhe schätzen.

Für das kommunale Verkehrsunternehmen wird im Folgenden die Quantifizierung des operationellen Risikos „jährlicher Oberleitungsschaden“ unter Einsatz der Methoden der klassischen Statistik präsentiert und damit einhergehende mögliche Modellierungsunsicherheiten aufgezeigt.

Gesamtrisikomodell für den jährlichen Oberleitungsschaden

Ein Risikomodell für die Oberleitungsausfälle wird durch die jährliche Gesamtschadensumme *(SH)* anhand der Schadenanzahl N sowie der Schadenhöhe je Vorfall X_i, für $i=1, \ldots, N$, beschrieben **(▶ Gleichung 01).**

Gleichung 01

$$SH = \sum_{i=1}^{N} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

Die Größen N und X_i, für $i=1, \ldots, N$, sind unbekannt und können unterschiedliche Werte annehmen, sie stellen in der stochastischen Modellierung Zufallsvariablen mit korrespondierender Wahrscheinlichkeitsverteilung dar. Für die Schadenanzahl wird in der aktuariellen Praxis oft die Poisson-Verteilung verwendet, unter Angabe eines die Wahrscheinlichkeitsverteilung spezifizierenden Parameters λ. Es wird für bekannte Werte der Verteilungsparameter angenommen, dass die Schadenanzahl und die Schadenhöhe (stochastisch) unabhängig sind, das heißt, dass die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte jährliche Schadenanzahl unabhängig von der Ausprägung der Schadenhöhe ist und umgekehrt. Auch für die Schadenhöhen je Vorfall X_i, für $i=1, \ldots, N$, wird angenommen, dass sie unabhängig sind und identische Wahrscheinlichkeitsverteilungen besitzen. Die sich aus der Kombination von Schadenanzahl- und Schadenhöheverteilung ergebende Verteilung der Gesamtschadensumme bezeichnet man unter diesen Modellierungsannahmen als Compound-Verteilung, das heißt zusammengesetzte Verteilung. Solche zusammengesetzten Verteilungen werden in der aktuariellen Praxis zur Schadenmodellierung eingesetzt, sind aber allgemein auch bei der Quantifizierung operationeller Risiken von Bedeutung [vgl. beispielsweise Romeike 2018, S. 175 ff.]. Die quantitative Beschreibung des Gesamtrisikos erfolgt im Grunde genommen dadurch, dass eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenanzahl und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenhöhe je Vorfall unterstellt wird. Implizit wird infolgedessen angenommen, dass die einzelnen Oberleitungsausfälle dieselbe Schadenhöheverteilung besitzen, unabhängig vom Eintrittszeitpunkt sind und unabhängig voneinander eintreten.

Submodell für die Schadenanzahl

In der Quantifizierung des jährlichen Oberleitungsschadens ist zunächst eine geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Schadenanzahl auszuwählen. Diskrete Verteilungsmodelle wie Binomial-, negative Binomial- sowie Panjer-Verteilung kommen für die Schadenanzahlmodellierung infrage [vgl. Cottin/Döhler 2009, S. 48 ff.]. Häufig wird die Poisson-Verteilung verwendet, die besonders zur Modellierung der Anzahl von seltenen, unabhängigen Ereignissen in einem festen Zeitraum geeignet ist. Die Poisson-Verteilung wird durch den Verteilungsparameter λ spezifiziert, das heißt, die exakte Nennung eines reellen Werts für den Parameter λ konkretisiert die in diesem Praxisbeispiel zugrunde liegende Schadenanzahlverteilung. Und ermöglicht so die konkrete Berechnung von Wahrscheinlichkeiten und das Formulieren von Wahrscheinlichkeitsaussagen wie beispielsweise, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 Prozent die Anzahl jährlicher Oberleitungsschäden den Wert 2 nicht übersteigt. Der Parameter λ, der Erwartungswert der Schadenanzahl N, kann hier als durchschnittliche jährliche Anzahl von Oberleitungsausfällen aufgefasst werden. Da λ in der Realität oft unbekannt ist, muss λ im Rahmen der Risikoquantifizierung geeignet geschätzt werden.

Submodell für die Schadenhöhe

Liegen einem Schadenvorfall nur einige wenige infrage kommende Schadenwerte zugrunde, so kommen diskrete Verteilungsmodelle bei der Beschreibung der Schadenhöhe zur Anwendung. In erster Linie wird die Schadenhöhe jedoch durch stetige Verteilungsmodelle wie Gamma-Verteilung, t-Verteilung, Weibull-, Pareto-Verteilung oder logarithmische Normalverteilung beschrieben. Die Wahl des Verteilungsmodells hängt dabei von der Größe der möglichen Schäden, insbesondere möglicher wahrscheinlicher Großschäden, ab [vgl. Cottin/Döhler 2009, S. 29]. Ein häufig verwendetes Verteilungsmodell für die Schadenhöhe eines operationellen Risikos ist die logarithmische Normalverteilung. Dabei ist die Schadenhöhe X logarithmisch normalverteilt mit den Verteilungsparametern μ und σ^2, wir schreiben $X \sim \mathrm{LN}(\mu; \sigma^2)$, wenn die logarithmierten Werte der Schadenhöhe, also $\ln(X)$, einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 (bzw. Standardabweichung σ) folgen. In der Praxis können lediglich plausible Aussagen und Schätzungen über die durchschnittliche Schadenhöhe $E[X]$ und die Varianz $Var(X)$, ein Maß für die durchschnittliche Streuung der möglichen Schadenwerte vom Erwartungswert, formuliert werden. Für die anschließende Berechnung der Verteilungsparameter μ und σ^2 kann der in ► **Gleichung 02** und ► **Gleichung 03** dargestellte Zusammenhang ausgenutzt werden.

Gleichung 02

$$\sigma^2 = \ln\left(\frac{\mathrm{Var}(X)}{E[X]^2} + 1\right)$$

Gleichung 03

$$\mu = \ln\left(E[X]^2 \cdot \sqrt{\frac{1}{Var\,(X) + E[X]^2}}\right)$$

Parametrisierung des Gesamtrisikomodells

Das Verteilungsmodell der jährlichen Gesamtschadensumme aus Oberleitungsausfällen setzt sich im Kern aus den beiden Submodellen, den Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Schadenanzahl und Schadenhöhe je Oberleitungsausfall zusammen. Im ersten Schritt ist der jeweilige Verteilungstyp, wie vorher beschrieben, auszuwählen. Im zweiten Schritt erfolgt die Bestimmung der Parameter des ausgewählten Verteilungsmodells. Die anschließende Ableitung des Risikogehalts von jährlichen Oberleitungsausfällen erfolgt

Abb. 02 **Gegenüberstellung der Verteilung der Schadenhöhe bei Vorliegen der Ursache V**

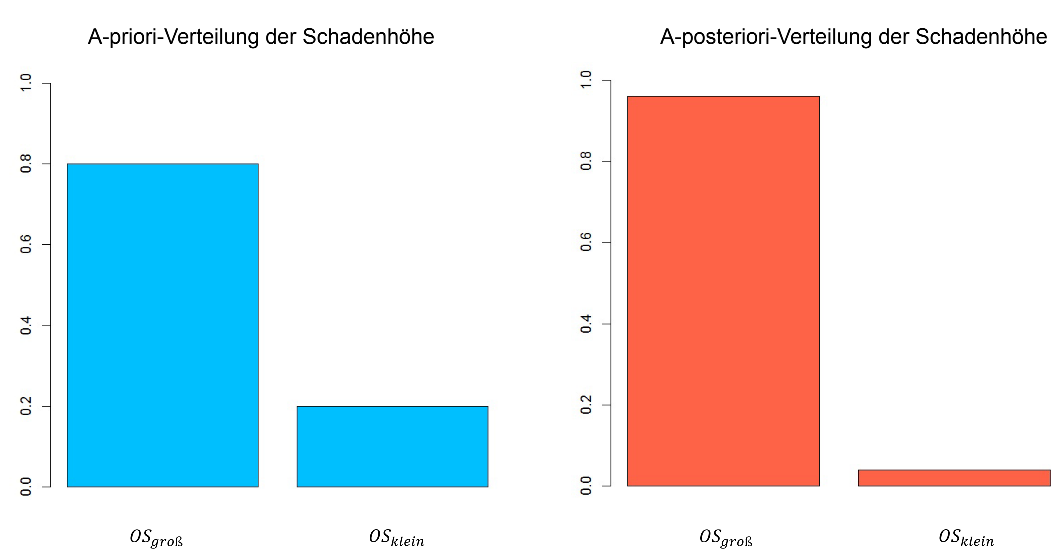
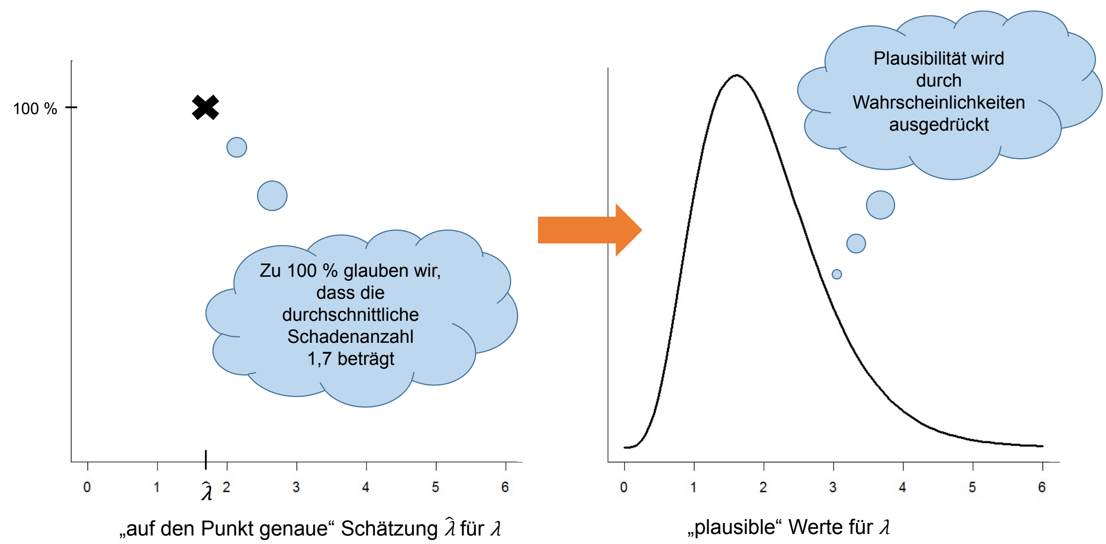


Abb. 03 Punktschätzung für die durchschnittliche Schadenanzahl λ wird zur A-priori-Verteilung der Zufallsgröße λ



unter Anwendung eines Risikomaßes auf die Gesamtschadenverteilung.

Alle drei Schritte sind zur vollständigen Quantifizierung notwendig. Die Methoden der Bayesschen Statistik kommen erst im zweiten Schritt der Gesamtrisikomodellierung zur Anwendung. Im weiteren Verlauf wird daher vorausgesetzt, dass eine adäquate Verteilungsklasse für die Submodelle identifiziert wurde, und nun die Parametrisierung des Gesamtrisikomodells durch konkrete Werte für die Verteilungsparameter λ, μ und σ^2 erfolgt. Wie bereits die Interpretation der jeweiligen Parameter aufzeigt, handelt es sich bei den Verteilungsparametern in der Regel um nicht direkt messbare, unbekannte Größen. Die Herleitung der Modellparameter hängt wesentlich von der vorhandenen Datengrundlage ab. Der Parameter λ, aufgefasst als durchschnittliche jährliche Anzahl von Oberleitungsausfällen, kann folgendermaßen bestimmt werden:

1. Sofern eine ausreichend lange Historie der jährlichen Anzahl von Oberleitungsausfällen vorliegt – in der Statistik spricht man von einer repräsentativen Zufallsstichprobe der Zufallsgröße „Schadenanzahl“ – kann mit den Methoden der klassischen Statistik die durchschnittliche Schadenanzahl geschätzt werden.
2. Im Rahmen der Expertenbefragung schätzt der Betriebsleiter die durchschnittliche Anzahl von Oberleitungsschäden auf den Wert 1,7 pro Jahr.

Parameterunsicherheiten in der Risikomodellierung – ein Metarisiko

Die Parametrisierung des Gesamtrisikomodells birgt bei der subjektiven Schätzung durch den Betriebsleiter offensichtlich Unsicherheiten. Aber auch die Schätzung aus einer großen Datenmenge kann zu Scheingenauigkeiten führen. Nachfolgend werden mögliche Ursachen für die Unsicherheiten erläutert, die im Rahmen der Parametrisierung des Gesamtrisikomodells eintreten können.

Die Grundlage für die Anwendung statistischer Risikomesskonzepte bildet eine Stichprobe von beobachteten Werten. Mit statistischen Methoden wird aus der Stichprobe auf die Grundgesamtheit geschlossen. Beispielsweise wird anhand der statistischen Analyse der jährlichen Vergangenheitswerte für die Schadenanzahl sowohl auf die durchschnittliche jährliche Anzahl von Oberleitungsschäden λ als auch auf die unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Schadenanzahl geschlossen. Gibt es wesentliche Unterschiede zwischen der Datenstruktur und der Struktur der Grundgesamtheit – sind die historischen Daten nicht stellvertretend für die Grundgesamtheit – so ist die Repräsentativität der Stichprobe verletzt. Die vergangenen Werte für die jährliche Anzahl der Oberleitungsschäden sind nicht repräsentativ, wenn beispielsweise das Schienen- und damit das Oberleitungsnetz im Rahmen eines mehrjährigen Projekts kontinuierlich um mehrere Kilometer ausgebaut wird und seit Kurzem eine durch LKWs stark frequentierte Straße kreuzt. Folglich erhöht sich sukzessive die Anzahl der jährlich gezählten Oberleitungsschäden. Die Schätzung der durchschnittlichen Schadenanzahl wird sich historisch begründet jedes Jahr vergrößern, aber aufgrund eines gleichzeitig wachsenden Oberleitungsnetzes den Gesamtschaden noch unterschätzen. Weiter können im Prognosejahr städtische Baumaßnahmen zur Einrichtung von Verkehrsumleitungen führen und verändern damit die Verkehrsströme, insbesondere die Anzahl der Fahrzeuge an Kreuzungen mit Oberleitungen. Auch können die jährlich steigenden Schadenfälle zu einem Lernprozess bei der Belegschaft führen, der zu besseren Präventions- und Wartungsverfahren führt, oder es werden weitere Risikosteuerungsmaßnahmen eingeleitet, wodurch es wiederum zu einer Überschätzung des Gesamtschadens kommt. Auch Extremereignisse wie Stürme oder andere Naturkatastrophen sind ggf. als „Stresssituationen“ nicht stellvertretend für den „Normalzustand“ des Oberleitungsnetzes. Sie können einerseits die Stichprobe verfälschen, andererseits werden Extremereignisse auch nicht durch das Gesamtschadenmodell erfasst.

Für die Aussagekraft einer Stichprobe ist ferner der Stichprobenumfang von zentraler Bedeutung. In der Praxis liegen oft wenige historische Beobachtungswerte vor, was beispielsweise darauf zurückzuführen ist, dass das Verkehrsunternehmen erst seit ein paar Jahren in der gegenwärtigen Form existiert oder die Schadenanzahl bisher nur unzureichend dokumentiert war. Auch mögliche Systemwechsel im Unternehmen, prozessuale Schwierigkeiten oder unterschiedliche Datenquellen (Datenbanksystem und manuell gepflegte Tabellenkalkulationsdatei) erschweren den Zugriff auf eine ausreichend lange Datenhistorie. Infolge eines zu kleinen Stichprobenumfangs kann eine Schätzung erheblich von dem tatsächlich vorliegenden Sachverhalt abweichen.

Letztendlich besitzt auch die Schätzmethode, mit der von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit gefolgert wird, eine möglicherweise für den Sachverhalt unzureichende Güte. Eine Schätzmethode (auch Schätzer oder Schätzfunktion genannt) stellt eine Vorschrift dar, die angibt, wie aus einer Stichprobe ein Schätzwert für einen unbekannten Parameter (eine sogenannte Punktschätzung) ermittelt wird. Ein prominenter Schätzer für den Erwartungswert einer Grundgesamtheit ist beispielsweise die Bildung des Durchschnitts, indem alle Beobachtungswerte aufsummiert und anschließend durch den Stichprobenumfang geteilt werden. Der Idealfall, dass beispielsweise die unbekannte jährliche Schadenanzahl durch eine Punktschätzung genau getroffen wird, ist so gut wie unmöglich. Wünschenswert ist aber zumindest ein Schätzer, dessen Schätzung mit wachsendem Stichprobenumfang „besser“ wird (die sogenannte Konsistenz eines Schätzers). Eine weitere wünschenswerte Eigenschaft ist die Erwartungstreue, d. h. gemittelt über alle möglichen Schätzwerte ergibt sich der unbekannte Parameter. Auch die Streuung der möglichen Schätzwerte, gemessen an der Varianz eines Schätzers, sollte möglichst klein sein, und stellt ein weiteres Gütekriterium für die Wahl einer Schätzmethode dar.

Existiert keine oder eine nur unzureichende Datenbasis, tritt anstelle der statistischen Methoden eine Expertenschätzung zur Bestimmung der nicht messbaren, unbekannten Parameter. Mögliche Ursachen für Prognoseungenauigkeiten in Expertenschätzungen können aus der individuellen Risikowahrnehmung resultieren, insbesondere dann, wenn Heuristiken (sog. Daumenregeln) angewendet werden. Im Folgenden werden einige in Gleißner [vgl. Gleißner 2017, S. 49ff.] aufgeführte wesentliche Erkenntnisse der kognitiven Psychologie in den Kontext des Praxisbeispiels gesetzt.

Aufgrund seiner langjährigen Erfahrungen und Erinnerungen bei der Reparatur und Organisation von Oberleitungsschäden und ihrer Behebung hat der Betriebsleiter eine Vorstellung über die jährliche Anzahl an Oberleitungsschäden. Diese Vorstellung wird jedoch von systematischen Fehlern beim Wahrnehmen und Erinnern beeinflusst. So schätzen wir die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Ereignisses höher ein, wenn ein ähnliches Ereignis erst vor kurzem eingetreten ist. Also wenn sich kurz vor der Einschätzung der jährlichen Zahl an Oberleitungsschäden ein größerer Vorfall ereignet hat, wird der Betriebsleiter die Häufigkeit eher überschätzen.

Der Experte ist erst seit kurzem im Unternehmen und hat vorher in einer anderen Verkehrsgesellschaft gearbeitet und kombiniert internes und externes Wissen, um einen Parameter für die jährliche Anzahl von Oberleitungsschäden zu schätzen. Mit diesem schon früh erlangten Vorwissen werden die Informationen systematisch überbewertet, was auch zu einer Überschätzung führen kann.

Wie die Beispiele zeigen, ist es unerheblich, ob die Punktschätzung für einen nicht messbaren Parameter aus einer statistischen Datenanalyse oder aus einer subjektiven Expertenschätzung stammt. Mit dem frequentistischen Ansatz werden die Unsicherheiten in der Parametrisierung des Gesamtrisikomodells bei der Risikoquantifizierung nicht erfasst und stellen ein Metarisiko dar. Der Bayessche Ansatz trägt zu einer verbesserten Schätzung des Gesamtrisikos bei, wodurch eine Reduktion dieses Metarisikos erreicht wird.

A-priori-Verteilung zur Modellierung von Parameterunsicherheiten

Liegen einem Risiko beispielsweise nur wenige Daten oder eine unvollständige Datenhistorie zugrunde, kann die Parametrisierung der Risiken im Rahmen der Risikoquantifizierung nur unter Berücksichtigung von Expertenschätzungen erfolgen. Die sich daraus ergebenden Parameterunsicherheiten können im Gesamtrisikomodell erfasst werden, indem der unbekannte, nicht messbare Parameter selbst als Zufallsgröße aufgefasst und durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (im Bayesschen Ansatz die sogenannte A-priori-Verteilung) modelliert wird. Wissen, das mithilfe der klassischen Statistik aus vorliegenden Daten gewonnen wird, kann im Bayesschen Ansatz anschließend mit Expertenwissen des Betriebsleiters kombiniert und in Form einer „aktualisierten“ Wahrscheinlichkeitsverteilung für einen unbekannten, nicht messbaren Parameter (der sogenannten A-posteriori-Verteilung) verdichtet werden. Mit dem Bayessche Ansatz erfolgt so eine transparente Einbindung aller vorliegenden Informationen, wodurch die Risikoquantifizierung auf eine (inhaltlich) konsistente Datenbasis gestellt wird. Weiter ermöglicht der Bayessche Ansatz die Abbildung eines kontinuierlichen Lernprozesses. Neue Informationen über das zu quantifizierende Risiko können zu jedem Zeitpunkt im Gesamtrisikomodell berücksichtigt werden, wodurch das aus Parameterunsicherheiten resultierende Metarisiko reduziert werden kann. Den Ausgangspunkt des Bayesschen Ansatzes bildet das Bayessche Theorem.

Bayessches Theorem

Die Bayessche Statistik stellt einen Erkenntnis- oder Lernprozess dar, der insbesondere im Rahmen eines systematischen und kontinuierlichen Umgangs mit Risiken notwendig ist. Zu diesem Zweck werden zwei Informationen, beispielsweise einem Unternehmen bereits vorliegende Informationen oder Annahmen über ein Risiko sowie neu gewonnene Beobachtungswerte, zueinander in Beziehung gesetzt. Der „frequentistische Ansatz", die klassische Statistik, fasst die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis als relative Häufigkeit des Ereignisses in einem (unendlich oft) wiederholten Zufallsexperiment auf. Dagegen basiert der Wahrscheinlichkeitsbegriff des Bayesschen Ansatzes auf subjektiv formulierten oder bekannten objektiven Fakten oder Theorien und eignet sich aus diesem Grund zur Quantifizierung operationeller Risiken. Die „bedingten Wahrscheinlichkeiten" tragen dem wesentlichen Kriterium der Bayesschen Statistik Rechnung: Subjektives Vorwissen A kann durch (neu) vorliegende Daten B modifiziert werden. Die Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ drückt dabei die Plausibilität des Vorwissens A bei Vorliegen neuer Informationen B aus und kann mithilfe des Bayesschen Theorems bestimmt werden. **(► Gleichung 04)**

Gleichung 04

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

mit

$P(A)$ **A-priori-Wahrscheinlichkeit von *A***, d. h. die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis ***A*** ohne weitere (Vor-)Informationen,

$P(A|B)$ **A-posteriori-Wahrscheinlichkeit von *A***, d. h. die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A, wenn neue Informationen B vorliegen (man sagt „die bedingte Wahrscheinlichkeit von ***A*** unter der Voraussetzung, dass B gültig ist")

$P(B|A)$ Wahrscheinlichkeit für B gegeben A,

$P(B)$ Wahrscheinlichkeit für B.

Gerade neuartige, schwer zu quantifizierende Risiken, für die weder Erfahrungswerte noch eine Datenhistorie im Unternehmen vorliegen, können mithilfe des Bayesschen Ansatzes modelliert und im Zuge neuer Informationen jederzeit adäquat aktualisiert werden. Angewandt auf einen Risikofaktor wird das subjektive Wissen durch die Hypothese A formuliert. Die Wahrscheinlichkeit der Hypothese wird durch die A-priori-Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ausgedrückt. Nun tritt ein Ereignis B, beispielsweise die Beobachtung keines Oberleitungsschadens im nächsten Jahr (interpretiert als Wert „0"), ein. Die so gewonnenen empirischen Daten, formuliert durch das Ereignis B, bestätigen mehr oder weniger die Hypothese A. Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ berücksichtigt die neu gewonnenen Informationen und stellt die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese A dar, sofern das Ereignis B beobachtet wurde. Ein fiktives Beispiel zur konkreten Anwendung des Bayesschen Theorems wird für die Schadenhöhe eines Oberleitungsausfalls vorgestellt:

Die stochastische Modellierung der Zufallsgröße X „Schadenhöhe je Vorfall" wird zur einfacheren Handhabung in zwei Ausprägungen unterteilt, einen großen finanziellen Oberleitungsschaden $(OS_{groß})$ und einen kleinen finanziellen Oberleitungsschaden (OS_{klein}). Der Betriebsleiter verdeutlicht, dass die Schadenhöhe von der Ursache des Oberleitungsschadens abhängt und bei der Quantifizierung berücksichtigt werden kann. Gleichfalls erscheint die Analyse der Ursache-Wirkungs-Beziehung vor dem Hintergrund einer anschließenden Risikosteuerung durch ursachenbezogene Maßnahmen zur Risikoreduktion wichtig und notwendig.

Folgende Informationen werden vom Risikomanagement für die Quantifizierung aufbereitet:

1. Tritt ein Oberleitungsausfall ein, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen großen Oberleitungsschaden 0,8, wogegen in 20 Prozent aller Fälle ein kleiner Oberleitungsschaden entsteht. Die Wahrscheinlichkeit $P(OS_{groß}) = 0{,}8$ heißt A-priori-Wahrscheinlichkeit für $OS_{groß}$, während $P(OS_{klein}) = 0{,}2$ die A-priori-Wahrscheinlichkeit für das Ereignis OS_{klein} bezeichnet. Die Schätzung der Wahrscheinlichkeiten basiert möglicherweise auf einer Datenhistorie. Andererseits kann das Risikomanagement auch auf eine subjektive Schätzung des Betriebsleiters zurückgreifen. **►Abb. 02** zeigt die A-priori-Verteilung der Schadenhöhe.
2. Die Ursachen eines Oberleitungsschadens werden bereits seit mehreren Jahren dokumentiert. Zur Beziehung zwischen Schadenursache und Schadenhöhe liegen dem Risikomanagement jedoch keine oder nur inkonsistente Informationen aus verschiedenen Quellen vor. Es greift daher auf die Ergebnisse einer externen Statistik zurück. Die Studie eines Verbands für die Verkehrswirtschaft analysiert die Ursachen von Oberleitungsschäden und schafft einen Bezug zu den quantitativen Auswirkungen. Als Hauptursache für Oberleitungsschäden wird das Ereignis V „Fahrzeug mit zu hohen Aufsätzen (beispielsweise Leiter) berührt die Oberleitung" genannt. Weiter kann aus dieser Studie gefolgert werden, dass in 90 Prozent aller Fälle, in denen ein großer finanzieller Schaden entsteht, ein Fahrzeug mit zu hohen Aufsätzen den Schadenvorfall verursacht hat. Umformuliert handelt es sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, genauer die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis V eingetreten ist, wenn ein großer Oberleitungsschaden vorliegt. Mathematisch ausgedrückt handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit $P(V|OS_{groß}) = 0{,}9$. Ansonsten gibt es viele andere Ursachen, wie beispielsweise Unwetter oder technische Defekte des Stromabnehmers, die in dem zu V komplementären Ereignis $\bar{V}$ zusammengefasst werden. Nur in 10 Prozent aller Fälle, in denen ein großer Oberleitungsschaden eingetreten ist, wurde dieser durch andere Ursachen verursacht (mathematisch formuliert $P(\bar{V}|OS_{groß}) = 0{,}1$). Das Eintreten eines kleinen Oberleitungsschadens ist nur in 15 Prozent aller Fälle auf den Straßenverkehr, also das Ereignis V, zurückzuführen, d. h. es gilt $P(V|OS_{klein})=0{,}15$ und $P(\bar{V}|OS_{klein}) = 0{,}85$.

Zunächst kann die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass der Straßenverkehr den Oberleitungsschaden verursacht, ohne weiteres Wissen über die Wirkung vorauszusetzen. In Abhängigkeit der vorliegenden Schadenhöhe kann die Wahrscheinlichkeit, die sogenannte „totale Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *V*", gemäß ▶ **Gleichung 05** berechnet werden.

Die A-posteriori-Verteilung der Schadenhöhe geht aus einer Kombination der A-priori-Verteilung der Schadenhöhe und der Wahrscheinlichkeit der (historischen) Daten hervor. Allgemeiner wird $P(B|A)$ als **Likelihood**, auch **Likelihood-Funktion**, bezeichnet. Die Likelihood ordnet jeder Hypothese *B* ihre Eintrittswahrscheinlichkeit bei Vorliegen des Ereignisses *A* zu.

Gleichung 05

$$P(V) = P(V|OS_{groß}) \cdot P(OS_{groß}) + P(V|OS_{klein}) \cdot P(OS_{klein}) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 + 0{,}15 \cdot 0{,}2 = 0{,}75$$

Bei 75 Prozent der Oberleitungsausfälle verursacht der Individualverkehr den Schaden. Nur in 25 Prozent liegen andere Ursachen einem Schaden zugrunde. Somit besitzt auch die Zufallsgröße „Ursache eines Oberleitungsschadens" eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Im Laufe des Jahres ereignet sich ein weiterer Oberleitungsausfall. Als Ursache wird das Ereignis *V* beobachtet. Die Anwendung des Bayesschen Theorems berücksichtigt nun diese neue Information und erlaubt die Bestimmung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeit für $OS_{groß}$. (▶ **Gleichung 06**)

Gleichung 06

$$P(OS_{groß}|V) = \frac{P(OS_{groß}) \cdot P(V|OS_{groß})}{P(V)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}75} = 0{,}96$$

Die **A-posteriori-Wahrscheinlichkeit $P(OS_{groß}|V)$** ermöglicht, dem Wissen über die Wahrscheinlichkeit eines großen Oberleitungsschadens neue Informationen hinzuzufügen: Wie wahrscheinlich ist ein großer Schaden, wenn die Ursache *V* sich realisiert hat? Es wurde beobachtet, dass Individualverkehr einen Oberleitungsausfall verursacht, was zu einer wachsenden Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen eines großen Schadens (von 0,8 auf 0,96) führt. Bei Vorliegen des Ereignisses *V* nimmt die Plausibilität eines kleinen Oberleitungsschadens ab, die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit für OS_{klein} beträgt 0,04. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße „Oberleitungsschaden je Vorfall" bei Eintritt der Ursache *V* ist gegeben durch $P(OS_{groß}|V) = 0{,}96$ und $P(OS_{klein}|V) = 0{,}04$ und heißt **A-posteriori-Verteilung der Schadenhöhe.** (▶ **Abb. 02**)

Vom Bayesschen Theorem zur Modellierung von Parameterunsicherheiten

Die klassische Statistik liefert basierend auf Daten Schätzwerte für die nicht direkt messbaren Parameter λ, μ und σ^2. Der wahre, aber unbekannte Wert, den beispielsweise der Parameter λ annimmt, existiert immer, wird jedoch nur sehr selten durch den statistischen Schätzer oder durch eine subjektive Expertenschätzung tatsächlich wertmäßig getroffen. Jede Bestimmung des unbekannten Parameters λ, der durchschnittlichen jährlichen Anzahl von Oberleitungsausfällen, weist einen Schätzfehler auf. Tatsächlich ist der Parameter λ unbekannt, sodass in der Praxis i. d. R. mehrere Werte für die Wahl von λ plausibel erscheinen. Daher wird der Parameter λ als Zufallsgröße bzw. -variable aufgefasst. Ausgangspunkt für die Modellierung der Parameterunsicherheit sind nun die infrage kommenden „wahrscheinlichen" oder „plausiblen" Werte für die durchschnittliche jährliche Schadenanzahl. Die Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten erlaubt, die Parameterunsicherheit mithilfe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für λ zu modellieren. (▶ **Abb. 03**) Die Wahrscheinlichkeiten repräsentieren nach Gleißner „den Grad des Vertrauens einer Person" [Gleißner 2014] in die jeweils infrage kommenden Werte für den nicht messbaren Parameter λ.

In der Bayesschen Statistik wird der Parameter λ als Zufallsgröße modelliert, wobei der Bayessche Ansatz einen Lernprozess erlaubt, indem er die Kombination unterschiedlicher Informationen ermöglicht. In der beispielhaften Ausgangssituation, der Quantifizierung eines jährlichen Oberleitungsschadens, bildet das (subjektive) Vorwissen des Betriebsleiters das anfängliche Wissen über die durchschnittliche jährliche Schadenanzahl. Das Vorwissen ist ohne weitere interne oder externe Informationen die beste Vorhersage. Die Plausibilisierung der theoretisch möglichen Werte erfolgt durch die vorhandenen (qualitativen) Vorinformationen, die unabhängig von der Existenz von Beobachtungswerten vorliegen, indem durch den Experten Wahrscheinlichkeiten hinterlegt werden – der Parameter λ besitzt einen Bereich theoretisch möglicher Werte, aber nicht alle Werte sind unbedingt gleich gewichtet. So wird die durchschnittliche jährliche Anzahl von Oberleitungsausfällen, der unbekannte Parameter λ, selbst als Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst. (▶ **Abb. 03**) Die aus dem Vorwissen resultierende Verteilung für λ wird als **A-priori-Verteilung von λ** bezeichnet. Liegen im ersten Jahr der Quantifizierung bereits historische Jahresdaten zu Oberleitungsausfällen vor, so kann eine ergänzende Datenanalyse erfolgen. In der Folge verändert sich ggf. der Glaube an mögliche plausible Werte für λ. Beispielsweise erscheint eine mittlere Schadenanzahl von 1 nach der Datenanalyse wahrscheinlicher als die Werte 4 oder 5. Die Verteilung, die die zusammengeführten Informationen berücksichtigt, heißt **A-posteriori-Verteilung von λ.**

Für die Bestimmung der A-posteriori-Verteilung von λ wird eine Stichprobe von Zufallsgrößen $N_1, N_2, \ldots, N_n$ vom Umfang *n* betrachtet. Beispielsweise repräsentiert die Zufallsgröße N_1 die jährliche Schadenanzahl im ersten Jahr der Datenhistorie. Möglicherweise reicht die Datenhistorie $n = 4$ Jahre zurück. Dass im zweiten Jahr der Datenhistorie ein Oberleitungsschaden beobachtet wurde, ist gleichbedeutend damit, dass die Zufallsgröße N_2 den Wert 1 annimmt (d. h. $N_2 = 1$). Liegt die Datenhistorie $\mathbb{x} = (0, 1, 2, 0)$ vor, so ist dies gleichbedeutend damit, dass die Zufallsgröße N_1 den Wert 0, die Zufallsgröße N_2 den Wert 1, die Zufallsgröße N_3 den Wert 2 und die Zufallsgröße N_4 den Wert 0 annimmt.

Aus dem Bayesschen Theorem folgt beispielsweise für die Wahrscheinlichkeit, dass die durchschnittliche jährliche Schadenanzahl zwischen 0 und 1 liegt, wenn die Beobachtung $\mathbb{x}$ gemacht wurde. **(▶ Gleichung 07)**

Gleichung 07

$$P(0 \leq \lambda \leq 1 \,|\, \mathbb{x}) = \frac{P(\mathbb{x} \,|\, 0 \leq \lambda \leq 1) \cdot P(0 \leq \lambda \leq 1)}{P(\mathbb{x})}$$

Mit wenigen mathematischen Umformulierungen ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsfunktion der A-posteriori-Verteilung von λ. Für einen konkret gewählten Wert λ_0 als durchschnittliche jährliche Schadenanzahl und einer vorliegenden Beobachtung $\mathbb{x}$ gilt: **▶ Gleichung 08**

Gleichung 08

$$f(\lambda_0 \,|\, \mathbb{x}) = \frac{f(\mathbb{x} \,|\, \lambda_0) \cdot f(\lambda_0)}{f(\mathbb{x})}$$

Die **A-priori-Verteilung von λ** wird durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(\lambda_0)$ beschrieben. Die Funktion $f(\mathbb{x} \,|\, \lambda_0)$ heißt **Likelihood für $\mathbb{x}$ gegeben den Wert** $\lambda = \lambda_0$ bzw. Likelihood-Funktion und repräsentiert das Datenmodell. Das Datenmodell enthält alle Informationen, die durch die Auswertung der Stichprobe über den unbekannten Parameter gewonnen werden. Die Beobachtung $\mathbb{x}$ aktualisiert die A-priori-Verteilung von λ ausschließlich über die Likelihood und resultiert in der A-posteriori-Verteilung von λ, hier dargestellt durch $f(\lambda_0 \,|\, \mathbb{x})$. Der Nenner $f(\mathbb{x})$ hängt nicht vom unbekannten Parameter ab. Es handelt sich um eine konstante Größe, oft als **Normierungsfaktor** bezeichnet. Der Normierungsfaktor ergibt sich bei diskreten Zufallsgrößen wie $N_1, N_2, \ldots, N_n$ als Summe über alle möglichen Werte λ_0 für die Zufallsgröße λ. Sind die Zufallsgrößen $N_1, N_2, \ldots, N_n$ stetig, ergibt sich $f(\mathbb{x})$ über eine Integration:

Diskrete Zufallsgrößen

$$f(\mathbb{x}) = \sum_{\lambda_0} P(\mathbb{x}|\lambda) \cdot P(\lambda)$$

Stetige Zufallsgrößen

$$f(\mathbb{x}) = \int_{\lambda_0} f(\mathbb{x}|\lambda) \cdot f(\lambda)\, d\lambda$$

Unter Berücksichtigung der konstanten Größe $f(\mathbb{x})$ existiert eine Proportionalität (ausgedrückt durch „$\propto$") zwischen der A-posteriori-Verteilung von λ und der durch die Likelihood aktualisierten A-priori-Verteilung von λ. **(▶ Abb. 04)**

Folglich können die **Parameterunsicherheiten**, die sich aus der Punktschätzung ergeben, mit (qualitativen) Informationen über den Parameter zusammengeführt und **in Form eines Verteilungsmodells für die nicht messbaren, unbekannten Parameter** bei der Quantifizierung des Gesamtrisikos berücksichtigt werden.

Für **praktische Fragestellungen** sind sogenannte **konjugierte Verteilungen** bedeutsam: Ausgehend von einer Likelihood wird eine sogenannte konjugierte A-priori-Verteilung für den unbekannten Parameter gewählt, sodass die Verteilung vor der Stichprobe und nach Auswertung der Stichprobe vom selben Verteilungstyp ist, lediglich die Größen, die die Verteilungen parametrisieren, unterscheiden sich. Ausgehend von den Verteilungsparametern der A-priori-Verteilung werden diese durch die Stichprobe aktualisiert. Der Einsatz von konjugierten Verteilungen hat den großen Vorteil, dass sich das Bayessche Theorem analytisch lösen lässt und keine Simulationsverfahren notwendig sind.

Für die Modellierung von Schadenanzahl und -höhe führen Shevchenko/Wüthrich (2008) folgende konjugierte Paare an: Poisson-Gamma, LogNormal-Normal, Pareto-Gamma. Weitere konjugierte Paare von Verteilungen können beispielsweise Bühlmann/Gisler (2005) entnommen werden.

Abb. 04 **Bayessches Theorem zur Kombination unterschiedlicher Informationen**

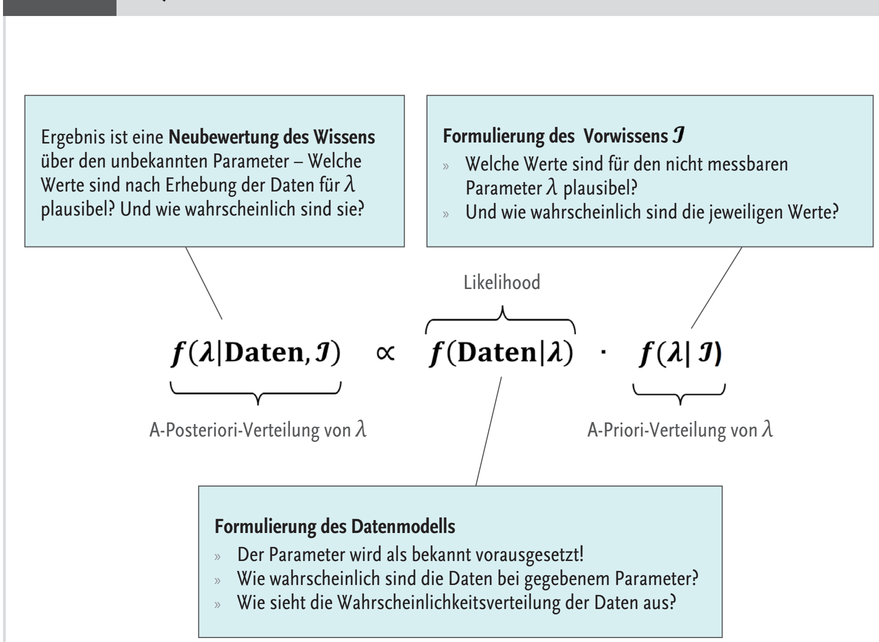
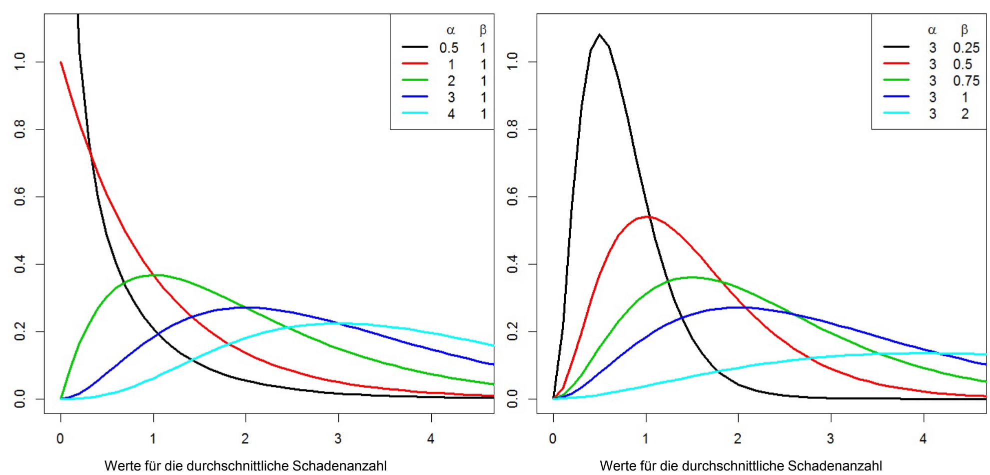


Abb. 05 **Mögliche Gammaverteilungen für den Parameter λ bei Variation der Hyperparameterwerte**



Bestimmung der A-priori-Verteilung für λ

Die unbekannte jährliche Schadenanzahl N von Oberleitungsausfällen wird durch eine Poisson-Verteilung mit dem Parameter λ modelliert. Für eine Poisson-Verteilung als Likelihood stellt die Gammaverteilung die konjugierte Verteilung dar und ist zur Modellierung der A-priori-Verteilung von λ geeignet, das heißt:

$$\lambda \sim \text{Gamma}(\alpha; \beta)$$

Die Gammaverteilung als A-priori-Verteilung für λ wird durch die Größen α und β, die sogenannten Hyperparameter, konkretisiert. Die Größe α ist der formgebende Parameter der Gammaverteilung, wohingegen β als Skalierungsparameter die Gammaverteilung in der Horizontalen streckt oder staucht. (▶ **Abb. 05**) Die Verteilung kann sehr flexibel gestaltet und an die jeweiligen Vorinformationen anpasst werden. Die Werte für die Hyperparameter leiten sich hier aus dem Vorwissen über die jährliche Anzahl von Oberleitungsausfällen ab. Die Schätzung der Hyperparameter kann je nach Art des Vorwissens sowohl subjektiv als auch auf Daten basierend erfolgen.

Im Folgenden wird anhand zweier Beispiele die Spezifikation der Hyperparameter mithilfe von subjektivem Expertenwissen veranschaulicht:

1. Die Erwartung an den Wert für die durchschnittliche Schadenanzahl wird zunächst formuliert. Der Betriebsleiter schätzt durchschnittlich 1,5 Schäden pro Jahr. Statistisch wird damit der Erwartungswert $E[\lambda]$ von λ erfasst. Um die Unsicherheit, die aus dieser Aussage über den unbekannten, nicht messbaren Parameter hervorgeht, zum Ausdruck zu bringen, kann eine Aussage über die zu erwartende Variabilität in den möglichen Werten ergänzt werden. Bekannte Maße für die Streuung sind die Varianz bzw. die aus ihr hervorgehende Standardabweichung. Die Varianz ist die durchschnittliche Abweichung zwischen den möglichen Werten und dem Mittelwert $E[\lambda]$ „zum Quadrat". Die Interpretation bzw. die (subjektive) Schätzung der Varianz stellt eine Herausforderung dar, da die Kennzahl als absoluter Wert in der quadrierten Einheit „Anzahl²" vorliegt und keinen Bezug zum erwarteten Wert herstellt. Dagegen ist die Angabe der Variabilität in Prozent häufig leichter zu interpretieren. In der aktuariellen Praxis wird Shevchenko/Wüthrich [vgl. Shevchenko/Wüthrich 2008] folgend der Variationskoeffizient $Vco(\lambda)(=\sqrt{Var(\lambda)}/E[\lambda])$ quantifiziert, der ein Maß für die relative Streuung bezogen auf den Mittelwert darstellt. Der Betriebsleiter schätzt den $Vco(\lambda)$ auf 50 Prozent, d. h. die durchschnittliche Abweichung der möglichen Werte für λ zum Mittelwert von 1,5 beträgt 50 Prozent.
Mathematisch kann die Expertenmeinung in Form von Gleichungen erfasst werden. Dazu wird berücksichtigt, dass eine Gammaverteilung als A-priori-Verteilung von λ gewählt wurde und die Hyperparameter α und β sich aus den Verteilungsparametern Erwartungswert $E[\lambda]$ und Varianz $Var(\lambda)$ bestimmen lassen. (▶ **Gleichung 09**)

Gleichung 09

$$1{,}5 = E[\lambda] = \alpha \cdot \beta$$

$$0{,}5 = Vco\,(\lambda) = \frac{\sqrt{Var\,(\lambda)}}{E[\lambda]} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

Die anschließende Lösung dieses Gleichungssystems liefert die Werte für die Hyperparameter α und β, $\alpha = 4$ und $\beta = 0{,}375$, und spezifiziert folglich die Form bzw. Gestalt der zugrunde liegenden A-priori-Verteilung von λ. (▶ **Abb. 06**)

2. Die Schätzung der erwarteten durchschnittlichen Anzahl von jährlichen Oberleitungsschäden kann andererseits auch ergänzt werden durch die Aussage über eine (subjektive) Bandbreite von äußerst plausiblen Werten für λ: Die erwartete durchschnittliche Schadenanzahl wird vom Betriebsleiter auf 1,7 geschätzt. Ferner glaubt der Experte, dass die „wahre" durchschnittliche Schadenanzahl mit 80-prozentiger Wahrscheinlichkeit nicht größer als 2,5, aber mindestens 0,5, beträgt.
   Mathematisch liefert die Lösung des folgenden Gleichungssystems die geschätzten Werte für die Hyperparameter α und β. Der Einsatz von Software-Programmen wie beispielsweise R erleichtert unterdessen häufig die Bestimmung der Hyperparameter. (▶ **Gleichung 10**)

Gleichung 10

$$1{,}7 = E[\lambda] = \alpha \cdot \beta$$
$$0{,}8 = P(0{,}5 \leq \lambda \leq 2{,}5) = \int_{0,5}^{2,5} f(\lambda|\alpha, \beta)\, d\lambda$$

Die Lösungen $\alpha \approx 3{,}846$ und $\beta \approx 0{,}442$ spezifizieren die A-priori-Verteilung von λ. (▶ **Abb. 06**)

Weitere Möglichkeiten die Hyperparameter mithilfe subjektiver Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen, können Berger [vgl. Berger 2013 S. 77 ff.] entnommen werden. Basiert das Vorwissen andererseits auf einer ausreichend großen Datenmenge, können wiederum die Methoden der klassischen Statistik herangezogen werden, um die Hyperparameter der A-priori-Verteilung zu schätzen. Mit der Bestimmung der Hyperparameter erfolgt schließlich die vollständige Spezifizierung der A-priori-Verteilung von λ.

Kombination von Vorwissen mit aktuellen Daten: A-posteriori-Verteilung von λ

Das Gesamtrisikomodell für die jährlichen Oberleitungsausfälle wird durch die jährliche Gesamtschadensumme anhand der Schadenanzahl N sowie der Schadenhöhe je Vorfall X_i, für $i = 1, ..., N$, beschrieben. (▶ **Abb. 01**) Das Submodell der Schadenanzahl N wird durch ein Verteilungsmodell, die Poisson-Verteilung mit Parameter λ, beschrieben. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poisson-Verteilung ist gegeben durch ▶ **Gleichung 11**

Gleichung 11

$$P(N = m|\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} \exp(-\lambda)$$
$$\lambda > 0, m = 0, 1, 2, 3, ...$$

Gegeben den bekannten Parameter λ, ordnet die Wahrscheinlichkeitsfunktion jeder Schadenanzahl m ihre Eintrittswahrscheinlichkeit $P(N = m|\lambda)$ zu. Da λ, die durchschnittliche jährliche Schadenanzahl, in der Praxis eine unbekannte, nicht messbare Größe ist, wurde zunächst die Parameterunsicherheit mithilfe der Bayesschen Statistik modelliert. Dazu wurde λ als Zufallsgröße aufgefasst und der Glaube an mögliche, plausible Werte für λ durch Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt. Alle Vorinformationen I wurden durch die A-priori-Verteilung von λ spezifiziert:

$$\lambda \sim \text{Gamma}(3{,}846; 0{,}442)$$

Das **Vorwissen zu dem unbekannten Parameter** kann anschließend mit **empirischen Daten oder neuen qualitativen Informationen** aktualisiert werden. Das Bayessche Theorem bildet diesen Lernprozess ab. Das Ergebnis der Aktualisierung durch neue Informationen ist die **A-posteriori-Verteilung von λ**. Zur Bestimmung der A-posteriori-Verteilung des unbekannten Parameters λ wird die A-priori-Verteilung durch die vorliegenden Daten mithilfe der Likelihood gewichtet.

Da in diesem Praxisbeispiel für die Modellierung von λ konjugierte Verteilungen herangezogen wurden, ist in Konsequenz die A-posteriori-Verteilung wieder eine Gamma-Verteilung. Die **Aktualisierung des Verteilungsmodells erfolgt über die Hyperparameter** der Gamma-Verteilung. Der folgende Algorithmus für die Hyperparameter der ***k*-ten Aktualisierung**, $\hat{\alpha}_k$ und $\hat{\beta}_k$, kann inklusive weiterer Hintergründe beispielsweise Shevchenko/Wüthrich [vgl. Shevchenko/Wüthrich 2008] entnommen werden. Die Aktualisierung basiert auf den Hyperparametern der jüngst verwendeten A-posteriori-Verteilung von λ, ausgedrückt durch die Hyperparameter $\hat{\alpha}_{k-1}$ und $\hat{\beta}_{k-1}$:
A-posteriori-Verteilung von λ nach *k*-ter Aktualisierung:

$$\lambda \sim \text{Gamma}\,(\hat{\alpha}_k; \hat{\beta}_k)$$
$$\hat{\alpha}_k = \hat{\alpha}_{k-1} + m_k \text{ und } \hat{\beta}_k = \frac{\hat{\beta}_{k-1}}{1 + \hat{\beta}_{k-1}}$$

wobei m_k die neu gewonnene, neu beobachtete Anzahl von Oberleitungsschäden ist, die die ***k*-te** Aktualisierung initiiert hat. Praktisch kann eine Aktualisierung notwendig sein, wenn im ersten Geschäftsjahr keine Daten vorlagen. Die Risikoquantifizierung basierte somit ausschließlich auf der mit Expertenwissen modellierten A-priori-Verteilung von λ. Liegen dem Risikomanagement anschließend der Verkehrsgesellschaft zusätzliche Informationen vor, so kann die Aktualisierung des Risikomodells durch neu berechnete Hyperparameter erfolgen. Wurde beispielsweise im zurückliegenden Jahr kein Oberleitungsschaden beobachtet, so ergibt sich nach der ersten Aktualisierung $(k = 1)$ die A-posteriori-Verteilung von λ als Gammaverteilung mit den Parametern $\hat{\alpha}_1 = 3{,}846 + 0 = 3{,}846$ und $\hat{\beta}_1 = 0{,}442 / (1 + 0{,}442) = 0{,}307$. In jedem neuen Geschäftsjahr ergänzt ein neuer Beobachtungswert für die jährliche Schadenanzahl die Daten, sodass jährlich eine Fortschreibung des Gesamtrisikomodells durch eine aktualisierte A-posteriori-Verteilung von λ in der Risikoquantifizierung berücksichtigt werden kann. Die Aktualisierung des Verteilungsmodells für λ im Zeitverlauf ist beispielhaft für einen Datensatz von $n = 4$ Jahren in ▶ **Abb. 07** dargestellt.

Quantifizierung des jährlichen Oberleitungsschadens

Im Zeitverlauf bietet die Bayessche Statistik Methoden an, neue Informationen in der Risikoquantifizierung zu berücksichtigen. Zu einem konkreten Bewertungszeitpunkt ist jedoch die Bestandsgefährdung von Interesse, die von den Oberleitungsausfällen im Prognosejahr ausgeht. Aus diesem Grund werden die Submodelle für Schadenanzahl und Schadenhöhe zu der Wahr-

Abb. 06 A-priori-Verteilung für λ aus den Fallbeispielen 1 und 2

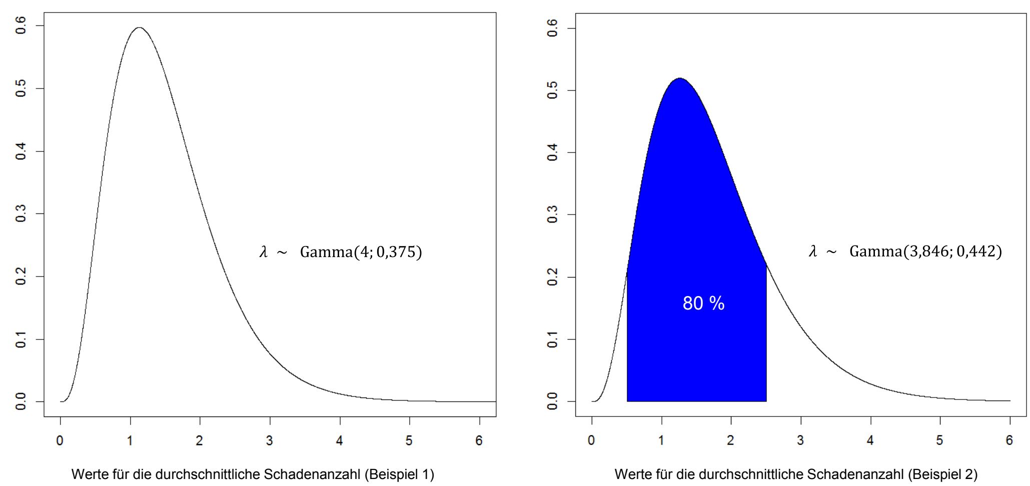
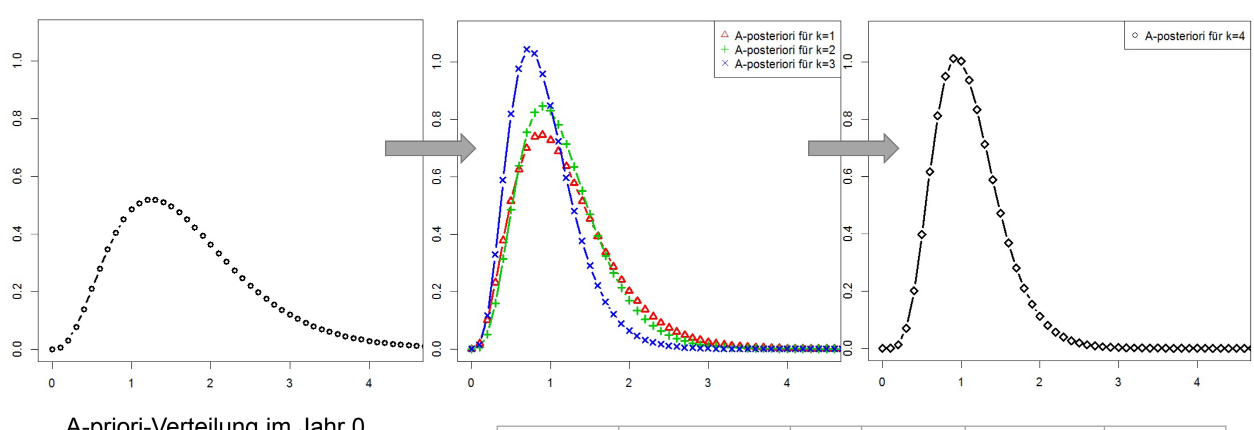


Abb. 07 Aktualisierung des A-priori-Wissens über λ – 4-jähriger Lernprozess



Lernprozess

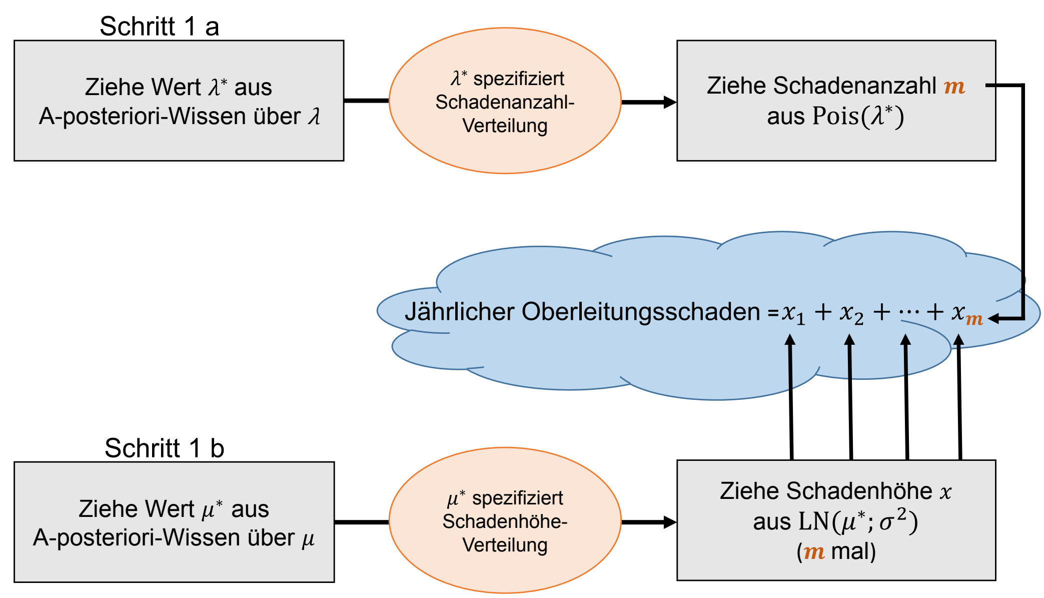
Jahr k	Schadenanzahl	k	$\hat{\alpha}_k$	$\hat{\beta}_k$	$E[\lambda]$
1	0	1	3,846	0,307	1,181
2	1	2	4,846	0,235	1,139
3	0	3	4,846	0,190	0,921
4	2	4	6,846	0,160	1,095

scheinlichkeitsverteilung der jährlichen Gesamtschadensumme zusammengeführt. Anschließend ermöglicht die Anwendung von Risikomaßen die Bestimmung des Risikoumfangs, der durch jährliche Oberleitungsausfälle verursacht wird.

Parameterunsicherheiten im Gesamtrisikomodell

Das Gesamtrisikomodell für die jährlichen Oberleitungsausfälle wird anhand der Schadenanzahl N und der Schadenhöhe je Vorfall X_i, für $i = 1, \ldots, N$, modelliert. Da angenommen wird, dass die einzelnen Schadenhöhen je Vorfall die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung besitzen und unabhängig voneinander auftreten, wird die Analyse der Parameterunsicherheiten für

Abb. 08 Simulationsdurchlauf zur Erzeugung eines jährlichen Schadenszenarios



eine Zufallsgröße X_1, der ersten „Schadenhöhe je Vorfall", vorgestellt. Das Submodell der Schadenhöhe X_1 wird durch das Verteilungsmodell der logarithmischen Normalverteilung mit den Parametern μ und σ^2 abgebildet, geschrieben $X_1 \sim \mathrm{LN}(\mu; \sigma^2)$.

Zunächst wird die durchschnittliche Variabilität der Schadenhöhe als bekannt vorausgesetzt – beispielsweise aufgrund der Ergebnisse einer Oberleitungsnetzsimulation oder der Existenz repräsentativer Benchmarkwerte externer Informationsdienstleister wie Studien oder Versicherungen (für den Fall einer unbekannten Varianz vgl. Shevchenko/Wüthrich 2008). Somit kann ein konkreter Wert für σ ableitet werden, beispielsweise $\sigma = 0{,}8$. Dagegen stellt der Parameter μ häufig eine unbekannte, nicht messbare Größe dar. Der Glaube an mögliche, plausible Werte für die durchschnittliche Schadenhöhe je Vorfall wird durch die A-priori-Verteilung von μ ausgedrückt. Wir unterstellen für die Zufallsgröße μ eine symmetrische Verteilung. Eine zur logarithmischen Normalverteilung konjugierte A-priori-Verteilung mit dieser Eigenschaft ist die Normalverteilung, das heißt es wird $\mu \sim \mathrm{N}(\mu_0; \sigma_0^2)$ angenommen.

Hilfreich für die weitere Interpretation von μ und die Bestimmung der Hyperparameter μ_0 und σ_0^2 ist der in ▶ **Gleichung 12** enthaltene Zusammenhang zwischen dem Erwartungswert von X, der durchschnittlichen Schadenhöhe, und dem unbekannten μ.

Gleichung 12

$$E\,[X|\,\mu, \sigma^2] = \exp\left(\mu + \frac{1}{2}\,\sigma^2\right) = g\,(\mu)$$

Das heißt, die durchschnittliche Schadenhöhe ist ebenfalls eine Zufallsgröße, die bei bekannter Varianz σ^2 vom jeweiligen Wert des Parameters μ abhängt – es besteht folglich ein funktionaler Zusammenhang zwischen der durchschnittlichen Schadenhöhe und μ.

Die Schätzung der Hyperparameter folgt analog zur Bestimmung der Hyperparameter im Submodell der Schadenanzahl, indem nun Vorwissen über die durchschnittliche Schadenhöhe in Form statistischer Charakteristika formuliert wird. Anschließend wird der funktionale Zusammenhang zwischen μ und der durchschnittlichen Schadenhöhe ausgenutzt, um die Hyperparameter μ_0 und σ_0^2 zu berechnen. Ausgehend von dem Wissen, dass viele Kleinschäden auftreten, aber auch größere finanzielle Schäden nicht unwahrscheinlich sind, kann der Betriebsleiter beispielsweise die erwartete durchschnittliche Schadenhöhe je Vorfall auf 20 [T €] (für T=Tausend) schätzen. Ferner glaubt der Betriebsleiter, dass die plausiblen Werte für die durchschnittliche Schadenhöhe im Mittel um 15 Prozent streuen. In Analogie zu der Modellierung der Parameterunsicherheit für die Schadenanzahl kann ein System von Gleichungen aufgestellt werden, deren Lösung Schätzungen für die Hyperparameter μ_0 und σ_0^2 liefert (ggf. kann je nach Vorwissen die Berechnung mithilfe geeigneter statistischer Software durchgeführt werden).

Monte-Carlo-Simulation im Gesamtrisikomodell

Für die Prognose des Gesamtrisikos aus Oberleitungsausfällen ist die Berechnung der zusammengesetzten Verteilung der jährlichen Gesamtschadensumme notwendig. Da die Schadenanzahl hier einer

Poisson-Verteilung folgt, wird die entsprechende Verteilung des Gesamtschadens unter den getroffenen Modellierungsannahmen als zusammengesetzte Poisson-Verteilung bezeichnet. Ausgehend von bekannter Schadenanzahl- und Schadenhöheverteilung kann jedoch im Allgemeinen die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsverteilung analytisch nicht berechnet werden, d. h. eine explizite Angabe der Verteilung des Gesamtschadens ist nicht möglich. Mithilfe einer Monte-Carlo-Simulation wird die zusammengesetzte Verteilung durch die empirische Verteilung des Gesamtschadens approximiert, indem eine große repräsentative Stichprobe möglicher Schadenszenarien für die Oberleitungsausfälle im kommenden Jahr erzeugt wird.

Den Kern der Monte-Carlo-Simulation bildet die Vorgehensweise zur Erzeugung eines jährlichen Schadenszenarios. **(▶ Abb. 08)** Die Parameterunsicherheiten werden durch ein Wahrscheinlichkeitsmodell in der Simulation berücksichtigt, das je nach Wissensstand zum Bewertungszeitpunkt durch A-priori- oder A-posteriori-Verteilung des nicht messbaren Parameters modelliert wird. Im weiteren Verlauf sprechen wir jeweils von einer A-posteriori-Verteilung, d. h. wir nehmen an, dass für die Quantifizierung des Oberleitungsschadens ein Lernprozess eingesetzt hat. Ein Simulationsdurchlauf besteht im Wesentlichen aus der Simulation einer Schadenanzahl sowie der anschließenden Simulation der korrespondierenden Anzahl von „beobachteten“ Schadenhöhen und lässt sich wie folgt beschreiben:

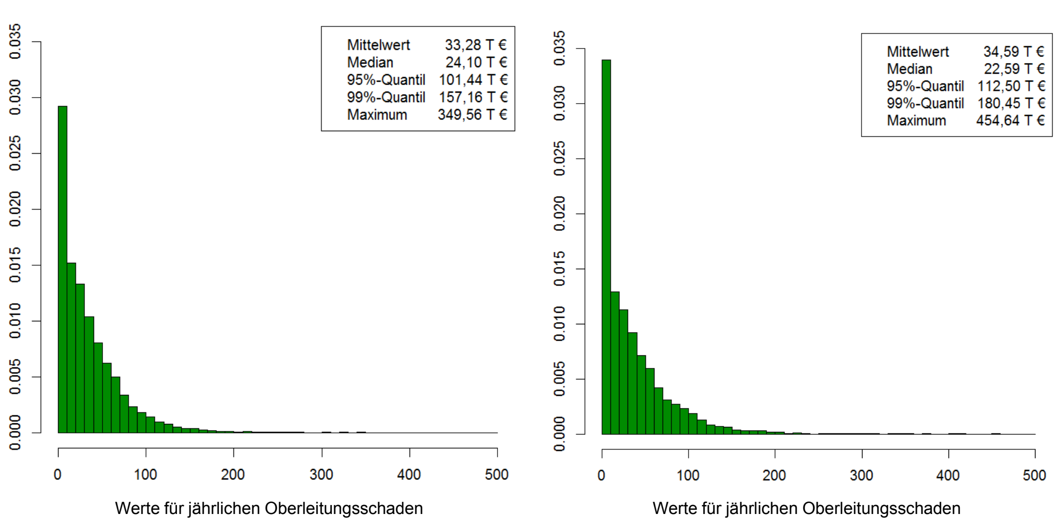
1. Erzeugung einer Zufallszahl für die unbekannten Parameter des Gesamtmodells aus der jeweiligen A-posteriori-Verteilung
   a. Ziehung eines Werts für die durchschnittliche Anzahl von Schäden, die im nächsten Schritt die Schadenanzahl-Verteilung charakterisiert
   b. Ziehung eines Werts für die durchschnittliche Schadenhöhe, die im nächsten Schritt die Schadenhöhe-Verteilung charakterisiert
2. Erzeugung einer jährlichen Schadenanzahl m, aufgefasst als Realisierung der Zufallsgröße „Schadenanzahl“, aus der Schadenanzahl-Verteilung
3. Erzeugung von m Schadenhöhen aus dem Wahrscheinlichkeitsmodell der Schadenhöhe, aufgefasst als Realisierungen der m gleichartigen Zufallsgrößen „Schadenanzahl je Vorfall“
4. Berechnung eines Zukunftsszenarios für den jährlichen Oberleitungsschaden durch Summation aller m „beobachteten“ Schadenhöhen.

Mithilfe der Monte-Carlo-Simulation kann aus einer ausreichend großen Anzahl von simulierten Oberleitungsschäden eine repräsentative empirische Verteilung erzeugt werden. Somit ist der erste Schritt der Risikoquantifizierung, nämlich die Bestimmung oder Schätzung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Risiko eines jährlichen Oberleitungsschadens, vollständig durchgeführt. Die anschließende Auswertung des Simulationsergebnisses mithilfe statistischer Kennzahlen liefert schließlich auch den Risikogehalt. Als Risikomaße können die Standardabweichung oder auch der Value-at-Risik herangezogen werden.

Monte-Carlo-Simulation im Vergleich

Die obige Monte-Carlo-Simulation kann nach dem frequentistischen Ansatz auch ohne Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten durchgeführt werden, dazu werden die unbekannten Parameter an-

Abb. 09 **Empirische Verteilung des jährlichen Oberleitungsschadens – Frequentistisch versus Bayes**



hand des vorhandenen Wissens (auf einen Punkt) geschätzt. So entfällt Schritt 1 im obigen Simulationsschema. Die ▶ **Abb. 09** vergleicht die empirische Verteilung des jährlichen Oberleitungsschadens, einerseits erzeugt mit dem frequentistischen Ansatz (links) und andererseits unter Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten mit dem Bayesschen Ansatz (rechts).

Der frequentistische Ansatz beruht auf einer geschätzten durchschnittlichen Schadenanzahl von 1,7, einer durchschnittlichen Schadenhöhe von 20 T € und einer mittleren Variabilität der Schadenhöhe von 100 Prozent. Im Bayesschen Ansatz werden obige Informationen ergänzt. Dabei wird angenommen, dass bisher keine zuverlässigen Daten vorhanden sind. Zunächst wird die durchschnittliche Schadenanzahl als Zufallsgröße mit Erwartungswert 1,7 modelliert.

Ferner sei die „wahre" durchschnittliche Schadenanzahl mit 80-prozentiger Wahrscheinlichkeit nicht größer als 2,5, aber mindestens 0,5. Somit ist die A-priori-Verteilung von λ eine Gammaverteilung mit Parametern $\alpha \approx 3{,}846$ und $\beta \approx 0{,}442$. Im Submodell der Schadenhöhe ist der Parameter σ bekannt, gegeben durch $\sigma = 0{,}8$. Weiter ist die A-priori-Verteilung der unbekannten Zufallsgröße μ eine Normalverteilung, wir schreiben $\mu \sim N(\mu_0; \sigma_0^2)$, mit Parametern $\mu_0 = 2{,}675$ und $\sigma_0 = 0{,}15$.

Beide Ansätze ermöglichen die Quantifizierung des Oberleitungsschaden im Prognosejahr, weisen jedoch folgende Unterschiede auf.

Der Bayessche Ansatz berücksichtigt Parameterunsicherheiten, indem unbekannte Parameter als Zufallsgrößen mit eigener Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst und im Rahmen der Simulation berücksichtigt werden. Folglich sind auch wertmäßig „große" Oberleitungsschäden über 350 T€ im Bayesschen Ansatz zu beobachten, wie auch in der Realität große Schäden selten, aber nicht unwahrscheinlich sind.

Der erwartete Schaden fällt unter Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten höher aus, die Differenz zwischen den unterschiedlichen Werten könnte als „Sicherheitszuschlag" für die Parameterunsicherheit (hier ca. 3,9 %) interpretiert werden.

Wird das Risiko als Planabweichung aufgefasst, kann das Risiko mithilfe von Streuungsmaßen wie der Standardabweichung oder dem Variationskoeffizienten gemessen werden. Die Simulationsergebnisse im Bayesschen Ansatz weisen eine größere Streuung auf.

In der Praxis besteht das Risiko häufig in der negativen Abweichung von einem geplanten bzw. versicherten Schadenwert. Die ausschließliche Berücksichtigung möglicher finanzieller Verluste, die über den versicherten Schaden hinausgehen, können mithilfe von Downside-Risikomaßen gemessen werden. Prominent ist der Value-at-Risk, dessen Prinzip hier auf den jährlichen Oberleitungsschaden übertragen werden kann. Zunächst wird beispielhaft für den Bayesschen Ansatz das 95 Prozent-Quantil der Gesamtschadenverteilung mit 112,50 T€ berechnet: In 95 Prozent aller Fälle wird ein Gesamtschaden von 112,50 T€ nicht überschritten. Nur in 5 Prozent aller Fälle oder alle 20 Jahre übersteigt der jährliche Gesamtschaden durch Oberleitungsausfälle den Wert. Sofern der mittlere Schaden von 34,59 T€ im Rahmen der Planung berücksichtigt oder versichert wurde, leitet sich schließlich ein Risikogehalt aus Oberleitungsausfällen in Höhe von 77,91 T€ ab, nur alle 20 Jahre fällt das Risiko höher aus. Im klassischen Ansatz würde der Risikogehalt mit dem Value-at-Risk-Ansatz dagegen mit 68,16 T€ bewertet.

Die Risikoquantifizierung mit dem Bayesschen Ansatz ermöglicht die Berücksichtigung bzw. Quantifizierung des Metarisikos „Parameterunsicherheiten" in der Gesamtrisikomodellierung. Die Modellierung von Parameterunsicherheiten durch Wahrscheinlichkeitsmodelle führt im Rahmen der Monte-Carlo-Simulation in der Regel zu einen größeren Gesamtrisikoumfang als beim frequentistischen Ansatz und kann als „Sicherheitsaufschlag" für das Metarisiko aufgefasst werden. Die Interpretation der Wahrscheinlichkeitsmodelle für die nicht messbaren Parameter als A-priori-Verteilungen nach dem Bayesschen Ansatz ermöglicht einen kontinuierlichen Lernprozess. Im Zeitverlauf kann somit zu jedem nachfolgenden Bewertungszeitpunkt neues Wissen über die unbekannten Parameter über die A-posteriori-Verteilung zusammengeführt und das Gesamtrisiko aktualisiert werden.

Fazit und Ausblick

Die Risikoquantifizierung beginnt mit der Modellierung eines Risikos durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit zugehörigen Parametern. Das Risikomodell sollte dabei den realen risikobehafteten Sachverhalt bestmöglich abbilden, das bedeutet insbesondere, dass alle verfügbaren Daten und relevanten Informationen in die Modellentwicklung miteinbezogen werden. Die Anwendung der Bayesschen Statistik reduziert die Schätzunsicherheiten im Zusammenhang mit der Parameterisierung des Risikomodells, indem Methoden zur Verfügung gestellt werden, die das Zusammenführen heterogener Informationen ermöglichen. Kausale Zusammenhänge, wie zum Beispiel Ursache-Wirkungs-Beziehungen, können in das Risikomodell miteinbezogen werden. Auch veränderte (unternehmerische) Rahmenbedingungen oder Zukunftsszenarien, die häufig nur qualitativ formuliert werden, können mit bisherigem Wissen kombiniert werden. So kann zu jedem Zeitpunkt eine Aktualisierung des Risikomodells herbeigeführt werden, ohne die Transparenz der (mathematischen) Herleitung zu vernachlässigen.

Die Modellierung der Parameterunsicherheiten erfolgt durch Verteilungsmodelle. Liegt anfänglich kein Wissen über den unbekannte Parameter vor, so kann als A-priori-Verteilung des Parameters eine sogenannte nichtinformative Verteilung (beispielsweise die „Jeffreys' A-priori-Verteilung") gewählt werden. Umgekehrt wächst mit zunehmender Länge der Datenhistorie auch die Aussagekraft einer Stichprobe, sodass die Likelihood die A-priori-Verteilung dominiert. Anders ausgedrückt ist bei großem Stichprobenumfang die A-posteriori-Verteilung unabhängig vom Vorwissen und folgt der Likelihood. Weiter bietet die Bayessche Statistik eine große Flexibilität bei der Wahl der Likelihood und der A-priori-Verteilung eines Parameters. Sofern keine konjugierten Verteilungen ausgewählt werden, kann die A-posteriori-Verteilung häufig jedoch nicht analytisch bestimmt werden, sondern muss nummerisch mithilfe von Simulationsmodellen wie der Markov-Chain-Monte-Carlo-Simulation [vgl. Bättig 2015, S. 99ff.] ermittelt werden.

Wird die Risikoquantifizierung im Kontext der Unternehmensplanung durchgeführt, so können die Methoden der Bayesschen Statistik auch für die Ermittlung möglicher Planwerte eingesetzt werden. Ausgangspunkt ist die in der Risikoquantifizierung bestimmte A-posteriori-Verteilung des Parameters. Beispielsweise kann ein Planwert für die durchschnittliche Schadenhöhe eines Oberleitungsschadens im Prognosejahr mit den Bayesschen Schätzmethoden aus dem Verteilungsmodell für λ abgeleitet werden, wodurch das gesamte A-posteriori-Wissen Berücksichtigung in der Planung findet. Mit Kredibilitäts- bzw. Glaubwürdigkeitsintervallen und Hypothesentests der Bayesschen Statistik können wiederum Annahmen bzw. Hypothesen an den unbekannten Wert eines Parameters untersucht werden, ohne Informationen aus dem A-posteriori-Wissen zu vernachlässigen.

Für eine wert- und risikoorientierte Unternehmensführung ist die Quantifizierung wesentlicher Risiken unumgänglich. Diese unterliegt jedoch in der unternehmerischen Praxis verschiedenen Herausforderungen. Um die Auswirkungen eines Risikos auf das Unternehmen zu ermitteln, wird zunächst im Rahmen der Risikomodellierung eine Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt und anschließend die unbekannten Verteilungsparameter wertmäßig geschätzt. Die Schätzung dieser in der Regel nicht messbaren, unbekannten Größen führt zu Scheingenauigkeiten. Parameterunsicherheiten resultieren sowohl aus den Schätzmethoden als auch aus der Datengrundlage, die der Quantifizierung zugrunde liegt. Parameterunsicherheiten stellen ein „Metarisiko" dar. Die Bayessche Statistik stellt Methoden zur Verfügung, mit denen dieses Metarisiko modelliert und bei der Quantifizierung berücksichtigt werden kann. Dennoch ist eine Auseinandersetzung mit den Grenzen und Problemen der Anwendbarkeit der Bayesschen Statistik im Rahmen der Validität eines Risikomodells notwendig. Die Herausforderungen in der Parametermodellierung liegen beispielsweise in der mathematischen Formulierung des (Vor-)Wissens, in der Wahl einer adäquaten A-priori-Verteilung unter verschiedenen Verteilungstypen oder möglicherweise in der Auswahl einer nichtinformativen A-priori-Verteilung, die das Unwissen geeignet ausdrückt. Nichtsdestotrotz ist die Vernachlässigung von Parameterunsicherheiten in der Risikomodellierung nicht die beste Abschätzung für dieses Metarisiko. Das Fallbeispiel zeigt, wie die Bayessche Statistik die bestverfügbaren Informationen über Modellparameter im Risikomodell wiedergeben und so zu einer verbesserten Quantifizierung von Risiken beitragen kann.

Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise

Allianz SE [2019]: Risikobarometer 2019 https://www.agcs.allianz.com/content/dam/onemarketing/agcs/agcs/reports/Allianz-Risk-Barometer-2019.pdf, Abruf am 31.10.2019.

Bättig, D. [2015]: Angewandte Datenanalyse, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2015.

Berger, J. O. [2013]: Statistical decision theory and Bayesian analysis, Springer Verlag, 2. Auflage, New York 2013.

Bühlmann, H./Gisler, A. [2005]: A course in credibility theory and its applications, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2005.

Cottin, C./Döhler, S. [2009]: Risikoanalyse, Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden 2009.

Embrechts, P./Kaufmann, R./Samorodnitsky, G. [2004]: Ruin theory revisited: stochastic models for operational risk, in: Risk Management for Central Bank Foreign Reserves (Eds. C. Bernadell et al.) European Central Bank, Frankfurt a.M., pp. 243-261.

Fenton, N./Neil, M. [2013]: Risk assessment and decision analysis with Bayesian networks, CRC Press, Boca Raton 2013.

Gleißner, W. [2011]: Quantitative Verfahren im Risikomanagement: Risikoaggregation, Risikomaße und Performancemaße, in: Der Controlling-Berater 16/2011 S. 179-204.

Gleißner, W. [2014]: Wahrscheinlichkeiten, Bayes-Theorem und statistische Analysen, in: Controller Magazin, 2 / 2014, S. 68-74.

Gleißner, W. [2017]: Grundlagen des Risikomanagements, Vahlen Verlag, 3. Auflage, München 2017.

Gleißner, W. [2019]: Risikoanalyse(I): Grundlagen der Risikoquantifizierung, in: Controller Magazin, 2/2019, S. 42-46.

Hedderich, J./Sachs, L. [2018]: Angewandte Statistik. Methodensammlung mit R, Springer Verlag, 16. Auflage, Berlin 2018.

Heri, E.W./Zimmermann, H. [2001]: Grenzen statistischer Messkonzepte für die Risikosteuerung, in: Henner Schierenbeck, Bernd Rolfes, Stephan Schüller (Hrsg.): Handbuch Bank-Controlling, Gabler Verlag, Wiesbaden 2001, S. 995-1014.

Lambrigger, D. D./Shevchenko, P. V./Wüthrich, M. V. [2007]: The quantification of operational risk using internal data, relevant external data and expert opinion, in: Journal of Operation Risk, Band 2(3), S. 3-27.

Lambrigger, D.D./ Shevchenko, P. V./ Wüthrich, M. V. [2008]: Give credit where credit is due: Operational risk goes Bayesian, Konferenzpapier, ASTIN colloquia, Manchester UK, http://www.actuaries.org/ASTIN/Colloquia/Manchester/Papers/Lambrigger_paper_final.pdf (2008), Abruf am 31.10.2019.

O'Hagan, A. [2019]: Expert knowledge elicitation: subjective but scientific, in: The American Statistician, 73(sup1), S. 69-81.

Romeike, F./Hager, P. [2013]: Erfolgsfaktor Risikomanagement 3.0: Lessons learned, Methoden, Checklisten und Implementierung, Springer Verlag, 3. Auflage, Wiesbaden 2013.

Romeike, F. [2018]: Risikomanagement, Springer Verlag, Wiesbaden 2018.

Schnieder, L. [2015]: Betriebsplanung im öffentlichen Personennahverkehr, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2015.

Shevchenko, P. V. /Wüthrich, M. V. [2006]: The structural modelling of operational risk via Bayesian inference: Combining loss data with expert opinions, in: Journal of Operation Risk, Band 1(3), S. 3-26.

Tschirk, W. [2014]: Statistik: Klassisch oder Bayes, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 2014.

Verband Deutscher Verkehrsunternehmen [2006]: Das Fachwort im Verkehr – Grundbegriffe des ÖPNV, Alba Fachverlag, Düsseldorf 2006.

Wieczorek, G. [2018]: Risikoquantifizierung, in: WISU, Heft 5/ 2018, S. 562-564.

Autoren

Prof. Dr. Gabriele Wieczorek, Lehrgebiet Industrielle Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie, Hochschule Hamm-Lippstadt.

Oliver Disch, Leiter des Konzernrisikomanagements eines größeren, kommunalen Querverbundunternehmens.