FINANZ BETRIEB FB NEWS

S. 2/24 | Unternehmen | Märkte | Veranstaltungen
Banken | Gründung | Personalia
Beiträge | Bewertung | Rechnungslegung | Vorschau

Verlagsgruppe Handelsblatt Newsletter 05 / 2007 WWW.FINANZ-BETRIEB.DE/FBNEWS

Die α-stabile Welt

Steigende Anforderungen an das Risikomanagement

Dr. Michael Buttler, Jochen Papenbrock, München*

I. Einführung

Aktuell vollzieht sich ein Paradigmenwechsel im Risikomanagement. Praktiker beginnen zu verstehen, dass extreme Ausschläge an Finanzmärkten möglichst realitätsgetreu abzubilden sind. Die Fokussierung auf das Phänomen starker Schwankungen ist aufgrund der steigenden Anforderungen an das Risikomanagement sowie wegen der höheren Komplexität vieler Finanzprodukte unbedingt erforderlich. Dadurch wird die Zukunftsfähigkeit herkömmlicher Ansätze grundsätzlich in Frage gestellt.

Der vorliegende Artikel beleuchtet eine viel versprechende Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die diesen gewachsenen Ansprüchen gerecht wird: die α-stabile Verteilungsklasse.

1. Empirische Analysen

Umfangreise Analysen von Marktdaten haben gezeigt, dass finanzwirtschaftliche Verteilungen schwere Ränder aufweisen. Bei der Beobachtung empirischer Erträge von Vermögenswerten fällt auf, dass starke Schwankungen ungewöhnlich oft auftreten. Zu nennen sind hier das Platzen der Dotcom-Blase oder die Ausschläge bei Börsencrashs.

Das relativ häufige Auftreten extremer Ereignisse mit besonders hohen Schäden wird durch die Normalverteilungsannahme nicht hinreichend gut wiedergegeben (umfangreiche empirische Untersuchungen einer Vielzahl von Finanzmärkten unterstreichen diese Beobachtungen, lehnen die Normalverteilungshypothese ab und formulieren stattdessen die α-stabile Hypothese). Weitere empirische Studien belegen außerdem, dass die Erträge nur selten symmetrisch verteilt sind. In der Regel ist die beste Beschreibung eine schiefe Verteilung.

*** Über die Autoren:**
Dr. Michael Buttler ist Geschäftsführer bei Buttler Consulting in München; *Jochen Papenbrock* ist Consultant bei Buttler Consulting, Herzog-Heinrich-Straße 3, 80336 München. Tel.: +49 89 53868720; Fax: +49 89 53868722; michael.buttler@buttler-consulting.de, www.buttler-consulting.de

2. Eine neue Verteilungsklasse

Beginnend mit Arbeiten von *Mandelbrot* im Jahr 1963 gab es fortlaufend Bestrebungen, Verteilungen mit schweren Rändern in den Finanzwissenschaften konsistent zu etablieren. Die angemessene Quantifizierung schwerer Verteilungsränder ist bei praktischen Anwendungen von großem Nutzen: Das Potenzial für hohe Erträge wird besser ausgeschöpft und das Risiko für hohe Verluste eklatant reduziert. Mit Hilfe von Verteilungen mit schweren Rändern haben Institute die Möglichkeit, bessere Strategien zur Risikobewältigung und -steuerung zu entwickeln und diese aktiv zu nutzen. Zudem werden durch die Anwendung solcher Verteilungen automatisch auch die Randabhängigkeiten zwischen verschiedenen Zufallsvariablen berücksichtigt.

Aktuell ist in diesem Bereich das Aufkommen α-stabiler Verteilungen zu beobachten. Inzwischen tritt diese Verteilungsklasse auch in praktischen Anwendungen des Risiko-/Ertragsmanagements, aber zum Beispiel auch in den Geowissenschaften auf. Das intensive Interesse an den α-stabilen Verteilungen zeigt sich zudem in der Pressepräsenz und der zunehmenden Anzahl entsprechender Produkte. Diese Erfolgsgeschichte wurde erst durch die Überwindung der bislang bestehenden Hürden möglich.

Doch was hat es mit dieser Verteilungsklasse nun tatsächlich auf sich? Sind alle Probleme gelöst? Welche zukünftigen Entwicklungen sind zu erwarten?

II. Die Klasse der α-stabilen Verteilungen

1. Definition der α-stabilen Verteilungen

Sowohl das Randverhalten als auch die Schiefe lassen sich durch die Klasse α-stabiler Verteilungen ausgesprochen gut abbilden. Bestimmt werden sie durch vier bedeutsame und interpretierbare Parameter:

- α bestimmt den Stabilitäts-Index oder die Kurtosis der Verteilung mit $0 < \alpha \leq 2$,
- β ist der Schiefeparameter,
- σ ist der Skalierungsparameter und
- μ ist der Lageparameter.

Die α-stabile Verteilung wird üblicherweise durch ihre charakteristische Funktion $\phi(t)$ beschrieben. Die populärste Parametrisierung der charakteristischen Funktion einer α-stabil verteilten Zufallsvariable mit den Parametern α, β, σ und μ ist:

$$\log(\phi(t)) = \begin{cases} -\sigma^{\alpha}|t|^{\alpha}(1 - i\beta \cdot sign(t) \cdot \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma|t|(1 + i\beta \cdot \frac{\pi}{2} \cdot sign(t) \cdot \ln|t|) + i\mu t, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Durch die guten Kalibrierungseigenschaften der vier Parameter kann ein zufrieden stellendes Fitting erreicht werden. Je kleiner der Parameter α ist, desto mehr Wahrscheinlichkeitsmasse wird in den Extrembereich und an die Spitze der α-stabilen Verteilung verschoben. Zusätzlich bietet der Parameter β die Möglichkeit, auch die Schiefe von empirischen Erträgen zu kalibrieren.

2. Momente der α-stabilen Verteilungen

Für die Momente der α-stabilen Verteilungen für $0 < \alpha < 2$ gelten folgende Beziehungen:

$$E|X|^p < \infty \quad \text{, für } 0 < p < \alpha$$
$$E|X|^p = \infty \quad \text{, für } \alpha \leq p$$

Damit existieren all diejenigen Momente, welche von kleinerer Ordnung als der Stabilitätsindex α sind. Insbesondere bedeutet dies, dass es für $\alpha < 2$ keine endliche Varianz gibt. Im Randfall $\alpha = 2$ (und $\beta = 0$, was in diesem Fall technisch keine Rolle mehr spielt) erhält man die Normalverteilung.

3. Summenstabilität α-stabiler Verteilungen

Für α-stabile Verteilungen gilt die Summenstabilität, d.h. die Summe zweier unabhängiger α-stabil verteilter Zufallsvariablen mit gleichem Parameter α ist wieder α-stabil verteilt.

Diese Eigenschaft ermöglicht nun die elegante Beschreibung auf Portfolioebene, wobei der Portfoliowert als Summe der einzelnen Positionen ermittelt wird. Die Summenverteilung kann direkt auf Basis der Parameter bestimmt werden.

Des Weiteren impliziert die Summenstabilität, dass die Verteilungsfamilie auch in Bezug auf den Betrachtungszeitraum stabil bleibt, was als Skalierungseigenschaft bereits von *Mandelbrot* geschätzt wurde. Es ist somit möglich, Ergebnisse aus kurzen Betrachtungszeiträumen beliebig auf längere Zeiträume zu skalieren – eine einzigartige Eigenschaft unter den Verteilungen mit schweren Rändern.

III. Anwendung α-stabiler Verteilungen

An dieser Stelle sollen nun die α-stabilen Verteilungen mit anderen in der Finanzstatistik gebräuchlichen Verteilungen verglichen werden (siehe Abb. unten auf dieser Seite).

1. Ablösung der Normalverteilung

Die Popularität der Normalverteilung in Finanzanwendungen ist auf ihre hervorragenden Eigenschaften zurückzuführen. Neben der Summenstabilität spielt hierbei auch der zentrale Grenzwertsatz eine Rolle, der den Einsatz der Normalverteilung auf ein statistisch solides Fundament hebt. Aufgrund umfangreicher empirischer Studien in verschiedenen Märkten ist die Normalverteilungshypothese allerdings abzulehnen. Als Kandidaten zur Ablösung der Normalverteilung bieten sich die Studentsche t-Verteilung und die α-stabile Verteilung an. Beiden ist gemeinsam, dass sie in gewissem Sinne natürliche Verallgemeinerungen der Normalverteilung darstellen.

a) Ablösung durch Studentsche t-Verteilungen

Die Standardansätze des Risikomanagements, wie beispielsweise die Portfoliosteuerung nach *Markowitz*, erfordern eine

Abb. 1: Verteilungen im Vergleich

	Normalverteilung	Studentsche t-Verteilung	α-stabile Verteilung
Pro	■ Summenstabilität ■ Geschlossene Darstellung ■ Zentraler Grenzwertsatz ■ Endliche Varianz	■ Geschlossene Darstellung ■ Schwerer Verteilungsrand ■ Im Allgemeinen endliche Varianz	■ Summenstabilität ■ Verallgemeinerter Grenzwertsatz ■ Herausragende Kalibrierungseigenschaften und gutes Fitting
Kontra	■ Schlechte Kalibrierungseigenschaften und schlechtes Fitting	■ Keine Summenstabilität ■ Kein zentraler Grenzwertsatz ■ Begrenzte Flexibilität für Fitting	■ Keine geschlossene Darstellung ■ Unendliche Varianz

Verlagsgruppe Handelsblatt Newsletter 05 / 2007 WWW.FINANZ-BETRIEB.DE/FBNEWS

multivariate Normalverteilung. Eine nahe liegende Erweiterung ist nun die Nutzung von multivariaten Studentschen t-Verteilungen mit endlicher Varianz:

- Sie sind – wie die multivariate Normalverteilung – Mitglieder der elliptischen Verteilungen, welche sich dadurch auszeichnen, dass es möglich ist, ein Portfolio ausschließlich nach dem Erwartungswertvektor und der Varianz-Kovarianz-Matrix zu steuern. Das kanonische Maß der Abhängigkeit bleibt hierbei stets die lineare Korrelation.
- Sie bieten die Möglichkeit, schwere Ränder zu modellieren.
- Sie besitzen geschlossene Darstellungen.

Die bekannten Techniken zur Portfolioanalyse und das *Black/Scholes*-Modell sind hierbei weiterhin anwendbar. Die Studentsche t-Verteilung erfreut sich aufgrund der genannten Eigenschaften bei Modellierern großer Beliebtheit. Sie modelliert die schweren Verteilungsränder zwar angemessener, trifft jedoch die empirische Gesamtverteilung nur bedingt. Problematisch bei der Klasse der Student-Verteilungen ist zudem, dass sie unter Faltung nicht abgeschlossen ist – die Summenstabilität ist somit nicht gegeben.

b) Ablösung durch α-stabile Verteilungen

Die Klasse der α-stabilen Verteilungen bildet die natürliche Erweiterung der Normalverteilung und ermöglicht aufgrund ihrer Stabilitätseigenschaft die Konstruktion eines kohärenten und verallgemeinerten Bezugssystems zur Risikomodellierung. Die Natürlichkeit der Verallgemeinerung zeigt sich insbesondere im Verhalten der Konvergenz der Summen unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen, welche Gegenstand der Grenzwertsätze sind (Summenanziehungsbereich). Die entsprechenden Summen konvergieren gegen:

- eine Normalverteilung, wenn die Varianzen der Zufallsvariablen endlich sind;
- eine α-stabile Verteilung, wenn die Varianzen der Zufallsvariablen unendlich sind.

Diese Grenzeigenschaft ist fundamental: Stellt man sich die Änderungen von Aktienkursen, Zinsen oder anderen Finanzvariablen als von vielen unabhängig auftretenden Schocks getrieben vor, dann ist das einzig passende Verteilungsmodell ein stabiles – ob normalverteilt oder α-stabil. Wie bereits dargestellt, ist die Klasse der α-stabilen Verteilungen summenstabil und verfügt über hervorragende Kalibrierungs- und Fitting-Eigenschaften.

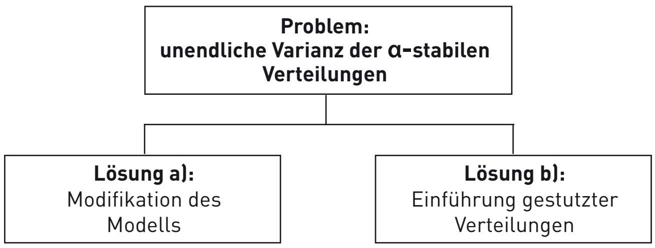
Zusammenfassend ist die α-stabile Verteilung aufgrund ihrer Vielzahl an statistischen und technischen Vorteilen ein äußerst aussichtsreicher Kandidat in der Modellierung. Lange Zeit jedoch haben technische Probleme den effektiven Einsatz dieser Klasse erschwert. Im Einzelnen waren dies das Fehlen einer geschlossenen Darstellung sowie die unendliche Varianz.

2. Lösung der Probleme beim Einsatz α-stabiler Verteilungen

Im Gegensatz zu den Normal- bzw. Student-Verteilungen existiert für α-stabile Verteilungen keine geschlossene Darstellung der Dichte, wodurch die Kalibrierung erschwert wird. Dieses Problem konnte erst vor kurzem durch effiziente Algorithmen behoben werden, welche auf die Beziehung zwischen charakteristischer Funktion und Dichtefunktion abstellen (siehe *Menn/Rachev*, Calibrated FFT-Based Density Approximations for α-Stable Distributions, 2004, Computational Statistics and Data Analysis, download: http://www.statistik.uni-karlsruhe.de/292.php). Dies ermöglichte umfangreiche empirische Studien, in denen die α-stabile Hypothese getestet und bestätigt werden konnte.

Eine weitere Hürde bestand in der unendlichen Varianz, welche die Anwendung α-stabiler Verteilungen im herkömmlichen Portfoliomanagement sowie im *Black/Scholes*-Kontext verhinderte. An dieser Stelle werden zwei Ansätze zur Lösung dieses Problems vorgestellt:

Abb. 2: Problem der unendlichen Varianz



a) Modifikation des Modells

Es können neue Maße für α-stabile Verteilungen definiert werden, so dass klassische Ansätze weiterhin angewendet werden können. Ein Beispiel hierfür ist eine Größe, die dem Sharpe-Ratio ähnelt und auf der Basis von bedingten Erwartungswerten ermittelt wird. Dadurch kann das Risiko-Ertragsprofil eines Portfolios mit α-stabilen Verteilungen optimiert werden. Bei der Wahl dieses Ansatzes besteht die Herausforderung, die modifizierten Maße mit den klassischen in Beziehung zu setzen. Dies ist für eine konsistente Risikokommunikation unbedingt erforderlich.

b) Einführung gestutzter Verteilungen

Bei den *Black/Scholes* no-arbitrage Modellen sind Verteilungen mit endlichen Momenten beliebiger Ordnung erforderlich. Eine unendliche Varianz würde zu einer fehlerhaften Bepreisung von Derivaten führen.

Um die klassischen Modelle auch im α-stabilen Kontext weiterhin nutzen zu können, wurden Algorithmen entwickelt, die die α-stabile Verteilung derart stutzen, dass man Verteilungen mit endlicher Varianz und glatter Dichte erhält. Dies leistet die Familie der „Smoothly Truncated α-Stable Distributions" (STS, siehe *Menn/Rachev*, Smoothly Truncated Stable Distributions, GARCH-Models, and Option Pricing, 2005; download: http://www.statistik.uni-karlsruhe.de/292.php). Technisch gesehen werden hier die äußeren Ränder der α-stabilen Verteilung entfernt und durch die leichten Ränder von Normalverteilungen ersetzt. Die Abschneidepunkte und die Parameter der beiden Normalverteilungen werden dabei mittels mathematischer Optimierung so bestimmt, dass die resultierende Verteilung standardisiert in Bezug auf Erwartungswert und Varianz ist.

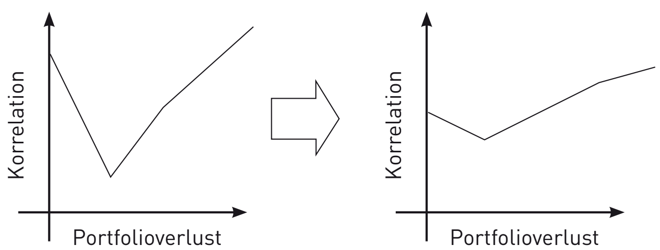
Umfangreiche Studien bezüglich der STS-Verteilungen haben gezeigt, dass sie sich gut für die Modellierung von Finanzdaten eignen, da sie asymmetrisch sein können und viel Wahrscheinlichkeitsmasse im Randbereich haben. Außerdem bleiben diese Verteilungen unter affiner Transformation innerhalb einer Klasse.

Die Einführung der STS-Verteilungen stellt somit einen idealen Kompromiss zwischen qualitativ hochwertiger Modellierung empirischer Daten sowie der Einhaltung theoretischer und technischer Restriktionen dar. Auch für die STS-Verteilungen stehen bereits effiziente Verfahren zur Dichte-Approximation und zur Simulation zur Verfügung.

3. Die STS-Verteilungen in der Praxis

Ein Beispiel für die herausragenden Eigenschaften der STS-Verteilung sind eigene Untersuchungen im Bereich der Preisfindung synthetischer CDO-Tranchen des iTraxx- bzw. CDX-Index. Basis bildete das dynamische Strukturmodell von *Hull/Predescu/White* zur Evaluation korrelationsabhängiger Kreditderivate (siehe *Hull/Predescu/White*, The valuation of correlation-dependent credit derivatives using a structural model, Working Paper, Joseph L. Rotman School of Management, University of Toronto, 2006). Die Normalverteilung in dem zugrundeliegenden *Black/Cox/Merton*-Modellierungsrahmen konnte flexibel durch die STS-Verteilung ersetzt werden, wobei die bestehenden linearen Korrelationsannahmen erhalten blieben.

Abb. 3: Reduktion des Correlation Smile durch Einsatz der STS-Verteilungen



Aufgrund ihres Verhaltens im Extrembereich kamen zusätzlich Randabhängigkeiten im Faktormodell zum Tragen, die zu einer enormen Verbesserung der Preisfindung führten. So wurde der durch die Normalverteilung erzeugte „Correlation Smile" durch eine nahezu flache Linie im Falle der STS-Verteilung ersetzt, was auf eine sehr gute simultane Darstellung der Risiken aller Tranchen schließen lässt.

Das Ausfallverhalten im Referenzportfolio wurde akkurat dargestellt; gleichzeitig konnte auf bewährte Modelle zurückgegriffen werden. Das Beispiel zeigt allgemein, dass Standardansätze in Kombination mit Verteilungen wie der STS entscheidende, statistisch fundierte Verbesserungen erfahren können.

IV. Zusammenfassung

Die Ausführungen belegen, dass die Klasse α-stabiler Verteilungen signifikant bessere Ergebnisse liefert und damit als Grundlage für ein modernes Risikomanagement dienen kann. Bislang wurde ihr Einsatz aufgrund technischer Probleme erschwert. Diese sind nun gelöst; somit steht einem breiten Einsatz der α-stabilen Klasse nichts mehr im Wege. Bereits heute sind entsprechende Anwendungen in der Praxis zu finden; beispielsweise greift die Bewertung synthetischer CDO-Tranchen auf diese Methodik zurück.

Referenzen und weiterführende Literatur:

Höchstötter/Rachev/Fabozzi, Distributional Analysis of the Stocks Comprising the DAX 30; download: http://www.statistik.uni-karlsruhe.de/292.php.

Rachev, Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Rachev editor, Elsevier 2003.

Rachev/Menn/Fabozzi, Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions: Implications for Risk Management, Portfolio Selection and Option Pricing; Wiley 2005.

Rachev/Mittnik, Stable Paretian Models in Finance, Series in Financial Economics and Quantitative Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York/London 2000.

Samorodnitsky/Taqqu, Stable Non-Gaussian Random Processes; Stochastic Models with Infinite Variance, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, London 1994.