

Ermittlung des Value-at-Risk von Finanzportefeuilles mit  
Methoden der Extremwerttheorie

GABRIEL FRAHM

# Inhaltsverzeichnis

<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>v</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>viii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	1
1.2 Struktur der vorliegenden Arbeit . . . . .	3
<b>2 Risiken von Finanzportefeuilles</b>	<b>5</b>
2.1 Portefeuillebestandteile . . . . .	5
2.2 Risikoformen . . . . .	6
<b>3 Portefeuillewert, Information und Rendite</b>	<b>9</b>
3.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen . . . . .	9
3.2 Renditedefinitionen . . . . .	11
3.2.1 Diskreter Ansatz . . . . .	11
3.2.2 Kontinuierlicher Ansatz . . . . .	12
3.3 Normalverteilungs- und Random-Walk-Hypothese . . . . .	12
3.3.1 Normalverteilungshypothese bezüglich bedingter absolute- r Portefeuillewertveränderungen . . . . .	13
3.3.2 Random-Walk-Hypothese bezüglich des Wertprozesses . . . . .	14
3.3.3 Normalverteilungshypothese bezüglich bedingter Logrenditen . . . . .	15
3.3.4 Random-Walk-Hypothese bezüglich des Logwertprozesses . . . . .	16
3.4 Wann ist Information irrelevant? . . . . .	17

<b>4</b>	<b>Portefeullerisikomaße</b>	<b>19</b>
4.1	Value-at-Risk . . . . .	19
4.1.1	Bedingter Value-at-Risk . . . . .	19
4.1.2	Unbedingter Value-at-Risk . . . . .	20
4.1.3	Logreturn-at-Risk . . . . .	21
4.2	Shortfall-Risk . . . . .	23
4.2.1	Bedeutung . . . . .	23
4.2.2	Definition . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Grundlagen der Extremwerttheorie</b>	<b>26</b>
5.1	Konvergenz des Stichprobenmaximums . . . . .	26
5.2	Konvergenz der Exzeßverteilung . . . . .	29
5.3	Exzeßmittelwertfunktion . . . . .	31
5.3.1	Definition und Bedeutung . . . . .	31
5.3.2	Beziehung zwischen der EMF und dem MDA . . . . .	33
5.4	Analytische Ermittlung des MDA . . . . .	35
5.4.1	Fréchet-Fall . . . . .	35
5.4.2	Gumbel-Fall . . . . .	39
5.4.3	Weibull-Fall . . . . .	41
5.5	Existenz und Endlichkeit der Momente . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Ansätze zur Ermittlung des Value-at-Risk</b>	<b>45</b>
6.1	Nonparametrischer Ansatz . . . . .	45
6.2	Parametrischer Ansatz . . . . .	51
6.3	Semiparametrischer Ansatz . . . . .	55
<b>7</b>	<b>Ermittlung des VaR mit der POT-Methode</b>	<b>56</b>
7.1	Motivation . . . . .	56
7.2	Schätzung der Flanke einer Verteilungsfunktion . . . . .	58
7.2.1	Schätzung des Flankenvolumens . . . . .	59
7.2.2	Schätzung der Flanke der verlagerten Exzeßverteilungsfunktion . . . . .	59
7.2.3	Schätzung der Flanke . . . . .	60
7.3	Ermittlung der kritischen Schwelle . . . . .	61
7.4	Schätzung des Value-at-Risk . . . . .	62
<b>8</b>	<b>Ermittlung des SR mit der POT-Methode</b>	<b>63</b>
8.1	MDA einer Shortfall-Verteilung . . . . .	63
8.2	Approximation einer Shortfall-Verteilung . . . . .	64
8.3	Approximation des Erwartungswertes von $\exp(-Y)$ . . . . .	64
8.4	Schätzung des Shortfall-Risk . . . . .	66

<b>9 Schätzung des Gestaltparameters</b>	<b>67</b>
9.1 Überblick . . . . .	67
9.2 Upper-Order-Statistics-Ansatz . . . . .	68
9.2.1 Pickands-Schätzer . . . . .	68
9.2.2 Hill-Schätzer . . . . .	68
9.2.3 Deckers-Einmahl-de-Haan-Schätzer . . . . .	69
9.3 Blockmaxima-Ansatz . . . . .	69
9.4 POT-Ansatz . . . . .	70
9.4.1 Maximum-Likelihood-Methode . . . . .	70
9.4.2 Methode der wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente . . . . .	74
<b>10 Fallstudie</b>	<b>78</b>
<b>11 Gütevergleich der VaR-Ermittlungsansätze</b>	<b>81</b>
11.1 Konzeptionelle Grundlagen . . . . .	81
11.2 Eigenschaften stabiler Verteilungen . . . . .	83
11.3 Analyse der Simulationsergebnisse . . . . .	85
11.3.1 Vorbemerkungen . . . . .	85
11.3.2 Analyse . . . . .	85
11.3.3 Optimale Auswahl der VaR-Ermittlungsmethode . . . . .	88
<b>12 Fazit und Ausblick</b>	<b>89</b>
<b>Anhang</b>	<b>89</b>
<b>A Simulierte ME-Plots</b>	<b>90</b>
<b>B Ergebnisse des Gütevergleichs</b>	<b>91</b>
<b>C Überprüfung der Fat-Tails-Hypothese</b>	<b>100</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>101</b>

# Tabellenverzeichnis

Tab. 1: Wahrscheinlichkeiten für die Überschreitung des $\text{LogRaR}_p$ ( $n = 100$ ).....	49
Tab. 2: Wahrscheinlichkeiten für die Überschreitung des $\text{LogRaR}_p$ ( $n = 1000$ ).....	50
Tab. 3: Fiktives Portefeuille.....	78
Tab. 4: Optimale Auswahl der VaR-Ermittlungsmethode.....	88
Tab. 5: Simulationsergebnisse ( $p = 0.01, n = 250$ ).....	91
Tab. 6: Simulationsergebnisse ( $p = 0.01, n = 1000$ ).....	92
Tab. 7: Simulationsergebnisse ( $p = 0.01, n = 5000$ ).....	93
Tab. 8: Simulationsergebnisse ( $p = 0.001, n = 250$ ).....	94
Tab. 9: Simulationsergebnisse ( $p = 0.001, n = 1000$ ).....	95
Tab. 10: Simulationsergebnisse ( $p = 0.001, n = 5000$ ).....	96
Tab. 11: Simulationsergebnisse ( $p = 0.0004, n = 250$ ).....	97
Tab. 12: Simulationsergebnisse ( $p = 0.0004, n = 1000$ ).....	98
Tab. 13: Simulationsergebnisse ( $p = 0.0004, n = 5000$ ).....	99
Tab. 14: Ergebnisse des Hypothesentests.....	100

# Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Bedingte P&L-Verteilung und bedingter Value-at-Risk. ....	20
Abb. 2: Dichtevergleich einer einfachen mit einer gemischten Normalverteilung.....	48
Abb. 3: Dow-Jones-QQ-Plot auf Basis der Normalverteilung.....	52
Abb. 4: Dow-Jones-QQ-Plot auf Basis einer gemischten Normalverteilung.....	53
Abb. 5: Simulierter ME-Plot einer gemischten Normalverteilung. ....	54
Abb. 6: ME-Plots negativer Logrenditen. ....	57
Abb. 7: Explorative Ermittlung der kritischen Schwelle. ....	61
Abb. 8: GPD-Fit an die empirische Exzeßverteilung negativer Logrenditen. ....	73
Abb. 9: ME-Plot eines fiktiven Portefeuilles. ....	78
Abb. 10: Simulierte ME-Plots symmetrisch um Null verteilter Logrenditen.....	90

# Abkürzungsverzeichnis

ARCH	Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
bzw.	beziehungsweise
CLogRaR	Conditional Logreturn-at-Risk
c.p.	ceteris paribus
CRaR	Conditional Return-at-Risk
CSR	Conditional Shortfall-Risk
CVaR	Conditional Value-at-Risk
DAX	Deutscher Aktienindex
d.h.	das heißt
Dow-Jones	Dow Jones Industrial Index
EMF	Exzeßmittelwertfunktion
engl.	englisch
etc.	et cetera
f	und folgende (bei Seitenangaben)
ff	und fortfolgende (bei Seitenangaben)
GARCH	Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity
GEV	Generalized Extreme Value Distribution
GPD	Generalized Pareto Distribution
i.e.S.	im engeren Sinne
i.V.m.	in Verbindung mit
i.w.S.	im weiteren Sinne
LogRaR	Logreturn-at-Risk
LS-Familie	Lage-Skalen-Familie
LS-Transformation	Lage-Skalen-Transformation
m.a.W.	mit anderen Worten
MDA	Maximum Domain of Attraction
ME-Plot	Mean-Excess-Plot
ML	Maximum-Likelihood

MSE	Mean-Squared-Error
N-Hypothese	Normalverteilungshypothese
No.	Number
Nr.	Nummer
OTC-Kontrakte	Over-The-Counter-Kontrakte
P&L-Verteilung	Profit-Loss-Verteilung
POT-Methode	Peaks-Over-Threshold-Methode
PWM	Probability Weighted Moment
RaR	Return-at-Risk
RBias	Relative-Bias
RMSE	Relative-Mean-Squared-Error
RW-Hypothese	Random-Walk-Hypothese
S.	Seite
SR	Shortfall-Risk
syn.	synonym
u. a.	unter anderem
VaR	Value-at-Risk
vgl.	vergleiche
Vol.	Volume
WN-Prozeß	White-Noise-Prozeß
z. B.	zum Beispiel



# Symbolverzeichnis

$\mathbb{1}_{X \leq x}$	Indikatorvariable, $\mathbb{1}_{X \leq x}(\omega) := \begin{cases} 0, & X(\omega) > x \\ 1, & X(\omega) \leq x \end{cases}$
$\alpha$	Flankenindex, charakteristischer Exponent einer stabilen Verteilung, $\alpha = 1/\xi$
$\mathcal{B}^d$	$d$ -dimensionale Borelsche $\sigma$ -Algebra, (= von der Menge aller Intervalle aus $\mathbb{R}^d$ generierte $\sigma$ -Algebra)
$c$	Skalenparameter einer stabilen Verteilung
$\mathcal{D}_{\xi, \mu, \sigma}^{GEV}$	Träger der verallgemeinerten Extremwertverteilung
$\mathcal{D}_{\xi, \mu, \sigma}^{GPD}$	Träger der verallgemeinerten Pareto-Verteilung
$\mathcal{E}(v)$	Exzeßmittelwertfunktion
$\mathcal{E}_u(v)$	Exzeßmittelwertfunktion der Exzeße über $u$
$\exp$	Eulersche Exponentialfunktion, $\exp(x) \equiv e^x$
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -Ereignisalgebra
$f(x) \rightarrow r, x \rightarrow x_0$	Die Funktion $f$ konvergiert deterministisch gegen $r$ , wenn $x$ gegen $x_0$ geht, syn.: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = r$ .
$f(x) \sim g(x)$	Die Funktion $f$ strebt asymptotisch gegen die Funktion $g$ , $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$ .
$F$	Verteilungsfunktion
$\overline{F}$	rechte Flanke der Verteilungsfunktion $F$ , $\overline{F}(x) := 1 - F(x)$
$F^{\leftarrow}$	Quantilfunktion, $F^{\leftarrow}(p) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$
$\overline{F}^{\leftarrow}$	Quantilfunktion bezüglich der rechten Flanke, $\overline{F}^{\leftarrow}(p) := F^{\leftarrow}(1 - p)$
$F^{v \rightarrow}$	Exzeßverteilung über der Schwelle $v$
$F \in \text{MDA}(H_\xi)$	$F$ befindet sich im Maximum-Anziehungsbereich der verallgemeinerten Extremwertverteilung $H_\xi$ .
$G_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Pareto-Verteilung
$h \in \mathcal{R}_\psi$	Die Funktion $h$ variiert gleichmäßig auf $\infty$ mit dem Index $\psi \in \mathbb{R}$ .
$h \in \mathcal{R}_{-\infty}$	Die Funktion $h$ variiert schnell auf $\infty$ mit dem Index $-\infty$ .
$H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	Verteilungsfunktion der verallgemeinerten Extremwertverteilung

$\mathcal{I}_t$	von $V_t, V_{t-1}, \dots$ generierte $\sigma$ -Algebra
inf	Infimum (= größte untere Schranke)
$k$	Anzahl der realisierten Exzeße
$K_n(v)$	Anzahl der Exzedenten von $v$ , $K_n(v) := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > v}$
$\kappa$	Infimum des kritischen Bereichs des Hypothesentests $H_0 : F \in \text{MDA}(\Lambda)$
log	Natürliche Logarithmusfunktion, $\log \equiv \ln$
$L \in \mathcal{R}_0$	Die Funktion $L$ variiert langsam auf $\infty$ .
$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = r$	Die Funktion $f$ konvergiert gegen $r$ , wenn $x$ von links gegen $x_0$ geht, syn.: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = r$ .
$M_n$	Stichprobenmaximum, $M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$
$M_X$	Momenterzeugende Funktion der Zufallsvariablen $X$ , $M_X(t) := E(\exp(Xt))$
$n$	Stichprobenumfang
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge der natürlichen Zahlen incl. 0: $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$o(f(x))$	Die Funktion $o(f(x))$ konvergiert schneller als die Funktion $f(x)$ , $\lim_{x \rightarrow x_0} o(f(x))/f(x) = 0$ .
$p$	Shortfall-Wahrscheinlichkeit
$P$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$R_t$	Rendite zum Zeitpunkt $t$
$\mathfrak{R}_t$	Logrendite zum Zeitpunkt $t$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge aller positiven reellen Zahlen, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
sup	Supremum (= kleinste obere Schranke)
$t$	Zeitpunkt, $t \in \mathbb{Z}$
$u$	kritische Schwelle
$v_t$	realisierter Portefeuillewert zum Zeitpunkt $t$
$V_t$	Portefeuillewert zum Zeitpunkt $t$
$x := y$	$x$ ist definiert als $y$ .
$x \equiv y$	$x$ und $y$ sind identisch.
$x_F$	rechter Endpunkt der Verteilungsfunktion $F$ , $x_F := \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$
$[x]$	ganzzahliger Anteil von $x \in \mathbb{R}$
$X_{(i)}$	$i$ -te Ordnungsgröße, $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)} \equiv M_n$
$X^+$	positiver Teil der Zufallsvariablen $X$ , $X^+ := \max\{0, X\}$
$X^-$	negativer Teil der Zufallsvariablen $X$ , $X^- := -\min\{0, X\}$
$X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$	Die Zufallsvariable $X_n$ ist asymptotisch normalverteilt mit den Parametern $\mu$ und $\sigma^2$ .

$X_n \xrightarrow{d} X,$	Die Folge der Zufallsvariablen $X_n$ konvergiert nach Verteilung
$X_n \xrightarrow{d} F_X$	(syn.: konvergiert schwach) gegen die Zufallsvariable $X$ .
$X \stackrel{d}{=} Y$	Die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ sind identisch verteilt.
$Y$	Exzeß über der Schwelle $v$ , $Y \equiv X - v \mid X > v$
$\bar{Y}$	Exzeßmittelwert
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen, $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$
$\Delta V_t$	absolute Portefeuillewertveränderung zum Zeitpunkt $t$
$\Lambda$	Gumbel-Verteilungsfunktion
$\xi$	Gestaltparameter
$\hat{\xi}_{ML}$	ML-Schätzer für den Gestaltparameter
$\hat{\xi}_{PWM}$	PWM-Schätzer für den Gestaltparameter
$\phi_X$	Charakteristische Funktion der Zufallsvariablen $X$ , $\phi_X(t) := E(\exp(iXt))$
$\Phi$	Standardnormalverteilungsfunktion
$\Phi_\alpha$	Fréchet-Verteilungsfunktion
$\Psi_\alpha$	Weibull-Verteilungsfunktion
$\omega$	Ergebnis, $\omega \in \Omega$
$\Omega$	Ergebnismenge

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Die Ermittlung des *Value-at-Risk* eines Finanzportefeuilles, also jenes Anteils am Portefeuillewert, der nach Ablauf einer bestimmten Haltedauer sozusagen „dem Risiko ausgesetzt ist“, ist zum festen Bestandteil des modernen Risikomanagements geworden. Der Value-at-Risk ist - vereinfachend ausgedrückt - ein extremes Quantil der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portefeuillewertveränderung. Das grundsätzliche Problem besteht darin, aus relativ wenigen extremen Realisationen (den sogenannten *Ausreißern*) eine zufriedenstellende Schätzung des gesuchten Quantils herbeizuführen. Wenn sich das gesuchte Quantil in der Nähe des Stichprobenmaximums befindet oder sogar darüber liegt, stellen die herkömmlichen parametrischen und nonparametrischen Ermittlungsansätze nachweislich keine gute Wahl dar.

Neben dem Value-at-Risk ist für Investoren insbesondere der *Shortfall-Risk* interessant. Der Shortfall-Risk ist jener Wertverlust, der im Falle der Überschreitung des Value-at-Risk zu erwarten ist. Es handelt sich quasi um das Risiko „jenseits des Value-at-Risk“. Dem Shortfall-Risk wird in der Literatur zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt, obwohl dieses Konzept eine hilfreiche Erweiterung des Value-at-Risk-Konzeptes darstellt. Eine eingehende Erläuterung dieses Portefeuillerisikomaßes ist daher notwendig.

Aus pragmatischen Gründen wurzelt die klassische Value-at-Risk-Theorie in der Normalverteilungshypothese bezüglich der (logarithmierten) Portefeuillewertveränderungen. Diese vereinfachende Annahme besitzt gravierende Nachteile. Auf die absoluten Portefeuillewertveränderungen bezogen, impliziert die Normalverteilungsannahme eine positive Wahrscheinlichkeit für einen negativen Portefeuillewert. Unter bestimmten und sehr allgemeinen Voraussetzungen bezüglich der Portefeuillekomponenten kann dieses Szenario jedoch von vorne herein ausgeschlossen werden, womit das Normalverteilungsmodell, zumindest was die Modellierung extremer Wertverluste anbetrifft, nicht applikabel ist.

Bezieht man die Normalverteilungsannahme hingegen auf die logarithmierten Portefeuillewertveränderungen, also auf die sogenannten *Logrenditen*, so widerspricht man damit der bekannten Tatsache, daß empirische Verteilungen der Logrenditen von Finanzportefeuilles regelmäßig leptokurtische Formen aufweisen. Logrenditeverteilungen sind also stärker gewölbt und besitzen insbesondere breitere Flanken (*Fat Tails*) als eine Normalverteilung. Wird eine Normalverteilung an das empirisch ermittelte Datenmaterial angepaßt, müssen unweigerlich alle extremen Realisationen ausgeklammert werden, was zu einer ernsthaften

Unterschätzung des Value-at-Risk führen kann. Will man nicht den parametrischen Boden unter den Füßen verlieren, ist man also gezwungen, auf Verteilungsmodelle mit Fat Tails zurückzugreifen. Nun existiert aber eine ganze Bandbreite parametrischer Modelle sowohl für die Randverteilung der Logrendite<sup>1</sup>, als auch für den stochastischen Verlauf des logarithmierten Portefeuillewertes<sup>2</sup>. In jedem Fall sollte der parametrische Fit möglichst gut die realisierte linke Flanke abdecken, was das Auffinden eines außerordentlich „realitätsnahen“ Verteilungsmodells erfordert.

Im Prinzip könnte man stattdessen versuchen, den Value-at-Risk auf nonparametrische Weise ausfindig zu machen. Damit müssten keine Annahmen über die Randverteilung der Logrendite getroffen werden. Dieser Ansatz wäre also robust im Hinblick auf eine Fehleinschätzung des „wirklichen“ Bildungsgesetzes von Logrenditen. Der wesentliche Nachteil nonparametrischer Methoden ist jedoch, daß zuverlässige Quantilschätzungen lediglich im hochfrequentierten Bereich der Verteilung vorgenommen werden können; bei der Schätzung extremer Quantile ist man hingegen auf das realisierte Stichprobenmaximum bzw. -minimum angewiesen. Der nonparametrische Ansatz birgt also ebenfalls die Gefahr einer starken Unterschätzung des Value-at-Risk.

Um die *Stylized Facts* der empirischen Kapitalmarktforschung<sup>3</sup> - womit u.a. Leptokurtosis und Fat Tails gemeint sind - nicht einfach zu ignorieren, bietet sich folglich ein semiparametrischer Mittelweg an. Das bedeutet, man akzeptiert auf der einen Seite die Stylized Facts und sucht auf der anderen Seite im Rahmen dieser Erkenntnis nach geeigneten Methoden, den Value-at-Risk ohne Rückgriff auf ein konkretes Verteilungsmodell zu ermitteln. Damit wird - im Gegensatz zum parametrischen Ansatz - nicht das Ziel verfolgt, die gesamte Randverteilung der Logrendite zu bestimmen, sondern lediglich die Verteilung extremer Realisationen. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der semiparametrischen Ermittlung des Value-at-Risk bzw. des Shortfall-Risk auf der Grundlage zentraler Erkenntnisse der Extremwerttheorie.

Neben der Normalverteilungshypothese basiert die herkömmliche Ermittlung des Value-at-Risk weiterhin auf der Annahme, daß die absoluten Portefeuillewertveränderungen stationär und stochastisch unabhängig sind, m.a.W., daß der Portefeuillewert einem *Random Walk* folgt. Diese Prämisse kann jedoch - ähnlich wie die Normalverteilungshypothese bezüglich der absoluten Portefeuillewertveränderungen - mit Mitteln der Wahrscheinlichkeitstheorie widerlegt werden, ohne konkrete Annahmen über den Preisbildungsmechanismus auf den Finanzmärkten zu treffen. Dagegen läßt sich zeigen, daß die Random-Walk-Hypothese bezüglich des logarithmierten Wertverlaufs zumindest nicht aus Wahrscheinlichkeitstheoretischen Gründen abgelehnt werden muß. Sie kann dann jedoch mit dem Hinweis auf die Existenz von Volatilitätsclustern innerhalb von Finanzzeitreihen kritisiert werden. Dieses Phänomen läßt sich mit bedingt heteroskedastischen Modellen für die Entwicklung der Logrendite erklären, was den angenehmen Nebeneffekt hat, daß man damit zugleich eine theoretische Basis für die beobachteten Fat Tails in den Randverteilungen von Logrenditen konstruieren kann. Allerdings bedeutet die Verwendung bedingt heteroskedastischer Modelle zugleich die Aufgabe der Unabhängigkeitsannahme. Vor diesem Hintergrund scheint eine - im Vergleich zur klassischen Theorie - strengere Definition

---

<sup>1</sup>Exemplarisch seien an dieser Stelle die *stabile Verteilungsfamilie* von Mandelbrot und Fama, die *hyperbolische Verteilung* von Eberlein und Keller sowie die *gemischte Normalverteilung* erwähnt.

<sup>2</sup>Das bekannteste Modell in diesem Zusammenhang ist das *ARCH-Modell* von Engle bzw. das allgemeinere *GARCH-Modell* von Bollerslev.

<sup>3</sup>Vgl. z.B. Bera/Higgins [4], S. 306, Eberlein/Keller [14], S. 6, Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 406 und Schmid/Trede [62], S. 23.

des Value-at-Risk-Begriffs notwendig zu sein, d.h. es sollte eine Unterscheidung zwischen bedingten und unbedingten Portefeullerisikomaßen vorgenommen werden.<sup>4</sup>

## 1.2 Struktur der vorliegenden Arbeit

In Kapitel 2 wird der Begriff des *Finanzportefeuilles* kurz erläutert und dargelegt, welche Portefeuillebestandteile im Rahmen dieser Arbeit berücksichtigt werden können. Darüber hinaus erfolgt eine Aufzählung der finanziellen Risiken, denen ein solches Portefeuille ausgesetzt ist und es wird darauf hingewiesen, daß das Value-at-Risk-Konzept lediglich das Marktrisiko erfaßt.

Die angesprochenen Nachteile der Normalverteilungshypothese werden sukzessive in den Kapiteln 3 und 6 erörtert. Weiterhin wird in Kapitel 3 die Random-Walk-Hypothese diskutiert, wobei vorher das benötigte wahrscheinlichkeitstheoretische Fundament gelegt wird.

Die in Kapitel 3 eingeführten wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe werden in Kapitel 4 zur formalen Definition des bedingten und des unbedingten Value-at-Risk verwendet. Mit dem gleichen Instrumentarium wird anschließend der Shortfall-Risk definiert.

Die Grundlagen der Extremwerttheorie werden in Kapitel 5 dargelegt. Behandelt werden die beiden elementaren Konvergenzsätze von FISHER-TIPPETT und von PICKANDS-BALKEMA-DE-HAAN. Der erste beschreibt die Konvergenz standardisierter Stichprobenmaxima gegen die *verallgemeinerte Extremwertverteilung*<sup>5</sup>, der zweite beschreibt die Konvergenz diverser Exzeßverteilungen gegen die *verallgemeinerte Pareto-Verteilung*<sup>6</sup>. Die Konvergenzsätze sind praktisch für alle bekannten Verteilungsfamilien gültig. Eine zentrale Erkenntnis der Extremwerttheorie ist, daß aus dem Konvergenzverhalten des standardisierten Stichprobenmaximums einer Verteilungsfamilie ein reeller Gestaltparameter  $\xi$  resultiert, der eindeutig angibt, ob die entsprechende Verteilungsfamilie *fat-/long-tailed* ( $\xi > 0$ ), *medium-tailed* ( $\xi = 0$ ) oder *short-tailed* ( $\xi < 0$ ) ist. In Abhängigkeit von dem Gestaltparameter konvergiert das standardisierte Stichprobenmaximum gegen einen bestimmten „Anziehungsbereich“<sup>7</sup>, wobei der Verlauf der sogenannten *Exzeßmittelwertfunktion* eine besondere Rolle spielt. Darüber hinaus wird gezeigt, wie der MDA einer Verteilungsfunktion auf analytischem Wege ermittelt werden kann. Zum Schluß des Kapitels wird der Zusammenhang zwischen dem MDA und der Existenz endlicher Momente erläutert.

In Kapitel 6 erfolgt eine Darstellung der konventionellen parametrischen und nonparametrischen Ansätze zur Ermittlung des Value-at-Risk, wobei der multivariate Ansatz mittels Risikoparametern kurz erläutert wird.

In den Kapiteln 7 und 8 wird die *Peaks-Over-Threshold-(POT-)* Methode zur Ermittlung des Value-at-Risk und des Shortfall-Risk eingehend erläutert und anhand der in Kapitel 5 gewonnenen Erkenntnisse motiviert. Dabei wird die empirische Exzeßmittelwertfunktion diskutiert und auf die besondere Rolle des daraus abgeleiteten *Mean-Excess-(ME-)Plots*

---

<sup>4</sup>Diese Unterscheidung weicht vom herkömmlichen Value-at-Risk-Konzept ab und findet erst seit relativ kurzer Zeit Anklang. Vgl. z.B. Barone-Adesi/Giannopoulos [2], Engle/Manganelli [20], Huschens [34], McNeil [46], McNeil/Frey [47] und Ormoneit/Neumeier [51].

<sup>5</sup>Engl.: Generalized Extreme Value Distribution (GEV).

<sup>6</sup>Engl.: Generalized Pareto Distribution (GPD).

<sup>7</sup>Engl.: Maximum Domain of Attraction (MDA).

hingewiesen. Anhand des ME-Plots einer Logrenditezeitreihe läßt sich die Fat-Tails-Hypothese auf explorative Art und Weise verifizieren. Zum Vergleich findet man in Anhang A einige simulierte ME-Plots einfach normalverteilter, gemischt normalverteilter und stabilverteilter Logrenditen. Darüber hinaus ist der ME-Plot das zentrale explorative Instrument zur Unterscheidung „extremer“ Realisationen von „gewöhnlichen“ Realisationen, indem es die Festlegung einer *kritischen Schwelle* erlaubt. In Kapitel 8 wird außerdem gezeigt, warum man bei der Berechnung des Shortfall-Risk auf bestimmte analytische Methoden verzichten muß und es wird nachgewiesen, daß der Shortfall-Risk quantifiziert werden kann, obwohl eine geschlossene mathematische Lösung nicht existiert.

Eine Darstellung der diversen Schätzmethoden für den Gestaltparameter  $\xi$  erfolgt in Kapitel 9. Es lassen sich drei Ermittlungsansätze unterscheiden: Die semiparametrische Ermittlung von  $\xi$  auf der Grundlage von Upper-Order-Statistics, seine parametrische Ermittlung auf der Grundlage der GEV (Blockmaxima-Ansatz) und die simultane parametrische Ermittlung von  $\xi$  und  $\sigma$  (dem Skalenparameter der verallgemeinerten Pareto-Verteilung) auf der Grundlage der verallgemeinerten Pareto-Verteilung (POT-Ansatz). Der Schwerpunkt des Kapitels liegt auf der Maximum-Likelihood-Methode und der Methode der wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente im Rahmen des POT-Ansatzes, um auf die in den Kapiteln 7 und 8 gewonnenen Ergebnisse zurückgreifen zu können.

Obwohl die Kernaussagen eines jeden Kapitels bereits anhand der historischen Verläufe des Dow Jones Industrial Index und des DAX belegt werden, erfolgt in Kapitel 10 eine Fallstudie, in der die Berechnung des Value-at-Risk und des Shortfall-Risk exemplarisch vorgeführt wird.

Kapitel 11 beinhaltet einen Gütevergleich der in Kapitel 6 dargestellten Value-at-Risk-Ermittlungsansätze. Zu diesem Zweck wurde auf die Annahme stabilverteilter Logrenditen zurückgegriffen. Die von MANDELBROT und FAMA eingeführte  $\alpha$ -stabile Verteilungsfamilie eignet sich besonders gut, um Fat Tails mit beliebiger Ausprägung zu modellieren. Auf der Grundlage einer vorgegebenen stabilen Verteilungsfunktion wurden jeweils 100000 Value-at-Risk-Schätzungen mit einer parametrischen, einer nonparametrischen und der semiparametrischen POT-Methode simuliert und anschließend Mean-Squared-Error und Bias der jeweiligen Methode berechnet. Auf diese Weise konnten verschiedene Konstellationen von Fat Tails und vorhandenem Stichprobenumfang simuliert werden. Nach einer kurzen Erläuterung der grundlegenden Eigenschaften stabiler Verteilungen werden die Ergebnisse der Simulation analysiert. Eine tabellarische Darstellung der Simulationsergebnisse findet man in Anhang B.

Schließlich erfolgt eine Überprüfung des MDA aller DAX-Werte, wobei die Fat-Tails-Hypothese auf einem Signifikanzniveau von 5% untersucht wird.<sup>8</sup> Die ermittelten Ergebnisse werden in Anhang C dargestellt.

---

<sup>8</sup>Die in der vorliegenden Arbeit sowohl für alle Beispiele, als auch für die Fallstudie und den Hypothesentest verwendeten historischen Kursverläufe stammen von B&W Investment Research und können im WWW unter [11] abgerufen werden.

## Kapitel 2

# Risiken von Finanzportefeuilles

### 2.1 Portefeuillebestandteile

Ein Finanzportefeuille<sup>1</sup> ist ein Bündel diverser Finanzanlageobjekte, also Wertpapiere und sonstiger Finanztitel:

1. Aktien und Aktienindexzertifikate,
2. Fondanteile (z.B. an Aktien-, Renten- und Immobilienfonds),
3. Devisen (= ausländisches Sichtguthaben), inländisches Sichtguthaben sowie Bargeld,
4. Tages- und Termingelder,
5. Unverbriefte Kredite an Unternehmen und private Haushalte,
6. Anleihen, z.B. Bundesschatzbriefe und -obligationen, Inhaber-Schuldverschreibungen, etc.,
7. Edelmetalle, Immobilien und Sachgüter, sofern diese eine Finanzanlagefunktion erfüllen,
8. Derivative Finanzinstrumente, d.h. bedingte Terminkontrakte (= Optionen) und unbedingte Terminkontrakte (= Forwards, Futures und Swaps),
9. Sonstige Verträge, z.B. Mischformen der oben genannten Kontrakte (etwa Genußscheine, Optionsanleihen und Wandelschuldverschreibungen), individuelle Vereinbarungen<sup>2</sup>, etc.

Man unterscheidet generell originäre und derivative Finanztitel. Originäre Finanztitel (sogenannte *Finanzierungstitel*) sind z.B. Aktien und Anleihen. Es handelt sich also um Finanzinstrumente, die einen Fundamentalwert besitzen, d.h. erst bei dauerhafter Insolvenz des Emittenten wertlos werden.<sup>3</sup>

**Exkurs.** Finanzierungstitel stammen von einem Emittenten ab, der durch die Emission der Wertpapiere bestimmte Investitionsprojekte finanzieren möchte. Im Gegenzug verpflichtet sich der Emittent gegenüber dem Gläubiger (im Falle der Fremdkapitalfinanzierung) bzw. dem Eigentümer (im Falle der Eigenkapitalfinanzierung), nicht nur den

---

<sup>1</sup> Wird im folgenden kurz als *Portefeuille* bezeichnet.

<sup>2</sup> Sogenannte „Over-The-Counter“- (OTC-) Kontrakte.

<sup>3</sup> Insofern besitzen auch Währungen und Edelmetalle i.w.S. einen Fundamentalwert.



eingezahlten Betrag im Zeitablauf zu amortisieren, sondern ihn darüber hinaus für seinen Konsumverzicht und die Übernahme von Risiken zu entschädigen. Die Zahlungsmodalität bestimmt hierbei die Vertragsform, m.a.W. die rechtliche Ausgestaltung des Wertpapiers. ○

Derivative Finanztitel (sogenannte *Derivate*) besitzen hingegen keinen Fundamentalwert. Der Zahlungsanspruch bzw. die Zahlungsschuld und somit auch der Preis eines derivativen Finanzinstruments leiten sich lediglich aus dem Preis eines bereits bestehenden Finanztitels (dem sogenannten *Basisobjekt*) ab. Derivate dienen hauptsächlich dem Hedging<sup>4</sup>(= Risikokompensation) und der Spekulation (= Risikoübernahme) und besitzen folgende Charakteristika:

1. Derivate besitzen einen Verfalltag und einen Referenzwert.<sup>5</sup>
2. Der Marktwert des Derivats kann am Verfalltag Null<sup>6</sup> (im Falle bedingter Terminkontrakte) oder sogar negativ<sup>7</sup> sein (im Falle unbedingter Terminkontrakte).

Das bedeutet jedoch nicht, daß originäre Finanztitel keinen Verfalltag und Referenzwert aufweisen können. Im Gegenteil: Praktisch alle gehandelten Anleihen besitzen ein Tilgungsdatum, d.h. einen Zeitpunkt, an dem der Emittent den Nominalwert der Anleihe an die Gläubiger zurückzahlt.

Es sei noch bemerkt, daß sämtliche aus einem Kapitalvermögen resultierende Erlöse - also nicht nur Verkaufserlöse - in die Gewinn- und Verlustrechnung des Investors einfließen müssen. Dividendenzahlungen, Kuponzahlungen, Bezugsrechtserlöse, etc. werden also bei der Ermittlung der Portefeuillewertveränderung explizit berücksichtigt. Es wird dabei angenommen, daß die Erlöse unverzüglich in das jeweilige Anlageobjekt reinvestiert werden. Rein buchhalterische Effekte, etwa im Zuge einer Kapitalerhöhung aus Rücklagen, eines Notizwechsels oder eines Aktiensplittings, sind hingegen nicht zahlungswirksam, sondern wirken sich lediglich auf die Anzahl der Portefeuillekomponenten aus, nicht jedoch auf den Portefeuillewert selbst. Diese „Grundregeln“ müssen selbstverständlich auch bei der Ermittlung von Finanzzeitreihen beachtet werden.<sup>8</sup>

## 2.2 Risikoformen

In einem Portefeuille manifestieren sich verschiedene finanzielle Risiken. Sie lassen sich nach ihrem Ursprung folgendermaßen unterscheiden:<sup>9</sup>

1. Marktrisiko<sup>10</sup>

Das Marktrisiko besteht in der Gefahr von Verlusten durch Marktwertveränderungen.

---

<sup>4</sup>Hedging bedeutet, daß ein bestehendes oder antizipiertes unsicheres Kassageschäft temporär durch ein gegenläufiges Termingeschäft abgesichert wird. Vermeintliche Verluste aus dem Kassageschäft werden damit durch entsprechende Gewinne aus dem Termingeschäft kompensiert, et vice versa.

<sup>5</sup>Je nach Art des Termingeschäfts kann es sich dabei um einen Ausübungspreis, Futurepreis, Zinssatz etc. handeln.

<sup>6</sup>Im Gegensatz zu Fundamentalanlagen ist der Totalverlust durchaus kein Ausnahmefall, sondern üblicher Bestandteil des Risikos von Termingeschäften.

<sup>7</sup>Damit ist eine Schuld gemeint.

<sup>8</sup>Zur Technik der Bereinigung von Finanzzeitreihen siehe z.B. Schmid/Trede [62], S. 10.

<sup>9</sup>Vgl. Jorion [36], S. 14ff und Read [55], S. 4.

<sup>10</sup>Engl.: Market Risk.

2. Insolvenzzisiko<sup>11</sup>

Das Insolvenzzisiko besteht in der Gefahr der Zahlungsunfähigkeit oder -unwilligkeit eines Schuldners, sofern lediglich vertraglich fixierte Zahlungsansprüche betroffen sind.<sup>12</sup>

3. Liquiditätsrisiko<sup>13</sup>

Liquiditätsrisiken bestehen in der Gefahr, daß eine Transaktion aufgrund eines fehlenden Transaktionspartners (also fehlender Liquidität) unterbleiben oder zu unfaireren Konditionen (d.h. nicht zum eigentlichen Marktwert) zustande kommen muß.<sup>14</sup>

4. Betriebsrisiko<sup>15</sup>

Betriebsrisiken resultieren aus der Gefahr menschlichen Fehlverhaltens und technischen Versagens während des Handelsbetriebs auf den Finanzmärkten.

5. Rechtsrisiko<sup>16</sup>

Beschreibt die Gefahr, daß eine vorgesehene Transaktion aufgrund rechtlicher Veränderungen nicht zustande kommen kann bzw. eine unvorhergesehene Transaktion zustande kommen muß.

Der Value-at-Risk (VaR) eines Finanzportefeuilles bezieht sich lediglich auf das Marktrisiko.<sup>17</sup> Daher konzentriert sich die vorliegende Arbeit lediglich auf solche Portefeuilles, deren Komponenten ausschließlich dem Marktrisiko unterworfen sind. Darüber hinaus wird vorausgesetzt, daß die Komponenten standardisiert sind, auf organisierten Finanzmärkten gehandelt werden<sup>18</sup> und außerdem keinen Verfalltag und Referenzwert aufweisen. Damit beschränkt sich der Fokus auf Aktien, Fondanteile<sup>19</sup>, Devisen, Edelmetalle, Tages- und Termingelder mit risikoloser Verzinsung sowie inländisches Sichtguthaben und Bargeld. Davon sind lediglich Aktien, Fondanteile, Devisen und Edelmetalle risikobehaftet und somit im Rahmen des Risikomanagements von Bedeutung.<sup>20</sup>

Die Beschränkung auf jene Teilmenge der originären Finanztitel, welche keinen Verfalltag und Referenzwert aufweisen, kann folgendermaßen begründet werden: Man benötigt für die Berechnung des VaR die empirische Verteilungsfunktion der Wertveränderung des betrachteten Portefeuilles. Diese wird zur Schätzung der theoretischen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Wertveränderung herangezogen, woraus der VaR abgeleitet wird. Mit der empirischen Verteilungsfunktion müssen aber genau jene Finanztitel historisch erfaßt werden, welche dem betrachteten Portefeuille angehören. Bei Finanztiteln, die einen Verfalltag und einen Referenzwert besitzen, spielt jedoch der Bewertungszeitpunkt respektive

---

<sup>11</sup>Engl.: Credit Risk. Das Insolvenzzisiko wird gelegentlich auch als (Adressen-)Ausfallrisiko, Bonitätsrisiko, Kreditrisiko, etc. bezeichnet.

<sup>12</sup>Daher sind z.B. Dividendenzahlungen nicht dem Insolvenzzisiko ausgesetzt.

<sup>13</sup>Engl.: Liquidity Risk.

<sup>14</sup>Liquiditätsrisiken sind typischer Bestandteil unvollkommener Finanzmärkte.

<sup>15</sup>Engl.: Operational Risk.

<sup>16</sup>Engl.: Legal Risk.

<sup>17</sup>Vgl. Jorion [36], S. 14, Read [56], S. 1 und Zagst [66], S. 1.

<sup>18</sup>Bei der Ermittlung des VaR greift man auf die historische Entwicklung der Preise der Portefeuillekomponenten zurück. Daher ist man auf eine einheitliche Preisfeststellung, m.a.W. auf organisierte Finanzmärkte angewiesen. Zum Begriff des organisierten Finanzmarktes siehe Franke/Hax [25], S. 58ff.

<sup>19</sup>Ein Fondanteil ist ein Anteil an einem fremden Finanzportefeuille. Die erwähnten Voraussetzungen müssen also strenggenommen auch für alle Komponenten des Fondvermögens gelten.

<sup>20</sup>Es handelt sich ausnahmslos um Finanztitel mit einem Fundamentalwert.

die Restlaufzeit des Kontrakts eine maßgebliche Rolle. Die Restlaufzeit hängt jedoch vom vertraglich festgelegten Verfalltag ab und ist somit ein vertragskonstituierendes Element. Die durch den Zeitablauf bedingte Veränderung der Restlaufzeit befristeter Kontrakte innerhalb eines Portefeuilles führt aus finanzwirtschaftlicher Hinsicht zu einer permanenten Transformation dieser Kontrakte, bis sie sich am entsprechenden Verfalltag vollständig auflösen. Somit kann man zur Schätzung der theoretischen Verteilungsfunktion der Wertveränderung eines Portefeuilles, das teilweise aus Finanztiteln der betrachteten Kategorie zusammengesetzt ist, nicht auf die historische Wertentwicklung des Portefeuilles zurückgreifen. In der klassischen VaR-Theorie wird versucht, dieses Problem dadurch zu umgehen, indem nicht auf die Portefeuillebestandteile selbst abgestellt wird, sondern auf deren annahmegemäß stationären Preisdeterminanten  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ , die als *Risikofaktoren* bezeichnet werden. Mit ihrer Hilfe kann der Preis einer Portefeuillekomponenten  $k$  als Funktion  $P_k = P_k(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$  aller Risikofaktoren interpretiert werden, wobei die Restlaufzeit als „degenerierter“ Risikofaktor in die Bewertung einfließt. Der Portefeuillewert  $V = \sum_{k=1}^K a_k P_k$  ist somit ebenfalls eine Funktion der Risikofaktoren, wobei  $a_k$  die Anzahl der Portefeuillekomponenten der Klasse  $k$  und  $K$  die Anzahl der vorhandenen Klassen symbolisieren. An dieser Stelle möchte ich gerne auf die reichhaltige Literatur zur konventionellen VaR-Ermittlung verweisen.<sup>21</sup>

---

<sup>21</sup>Vgl. z.B. Huschens [33], S. 5ff, Jorion [36], S. 185ff, Read [54], Read [56], S. 30ff und Zagst [66].

## Kapitel 3

# Portefeuillewert, Information und Rendite

Die Berechnung des VaR basiert auf der Betrachtung von potentiellen Portefeuillewertveränderungen<sup>1</sup>, also von in stochastischem Sinne möglichen Wertzuwachsen<sup>2</sup> bzw. Wertverlusten<sup>3</sup> nach einer bestimmten Haltedauer<sup>4</sup>. In der Literatur haben sich unterschiedliche Ansätze zur Erfassung solcher Wertveränderungen etabliert, wobei man zwischen diskreten und kontinuierlichen Ansätzen differenzieren kann.

### 3.1 Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlagen

Im folgenden sei ein Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vorgegeben. Der stochastische Wertverlauf eines Portefeuilles wird mit Hilfe der Theorie stochastischer Prozesse modelliert.

**Definition 3.1.1 (Wertprozeß)** *Ein Wertprozeß ist ein stochastischer Prozeß<sup>5</sup>  $(V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  mit folgenden Eigenschaften*

$$(3.1) \quad P(V_t \leq 0) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

und

$$(3.2) \quad P(V_t \leq v) > 0, \quad \forall v > 0, t \in \mathbb{Z}.$$

□

---

<sup>1</sup>Der Begriff *Wert* wird im statistischen Sinne verwendet und bezeichnet damit die Summe der Marktpreise aller Portefeuillekomponenten. Die kapitalmarkttheoretische Unterscheidung der beiden Begriffe *Preis* und *Wert* (= Gleichgewichtspreis) wird im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgenommen.

<sup>2</sup>Engl.: Profit.

<sup>3</sup>Engl.: Loss.

<sup>4</sup>Engl.: Target Horizon.

<sup>5</sup>Zum Begriff des stochastischen Prozesses vgl. Fahrmeir/Kaufmann/Ost [21], S. 5, Fisz [24], S. 320f und Malliaris/Brock [41], S. 32. Alle Definitionen implizieren die  $\mathcal{F}$ - $\mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$ -Meßbarkeit von  $V_t$ , d.h. für jede Borelmenge  $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{Z}}$  ist das entsprechende Ereignis  $V_t^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ . Vgl. Billingsley [5], S. 182f.

Die Parametermenge  $\mathbb{Z}$  repräsentiere äquidistante Zeitpunkte auf der Zeitachse, z.B. die Menge aller Börsenschlüsse, d.h. es werden alle Wochenenden und Börsenfeiertage aus der physikalischen Zeitachse „herausgefiltert“.

Man kann davon ausgehen, daß ein Portefeuille vollständig aus Kaufpositionen besteht.<sup>6</sup> Short-Positionen - also Leerverkäufe, die den Anleger zur künftigen Eindeckung mit bestimmten Wertpapieren zwingen würden - können somit im ersten Schritt ausgeklammert werden. Ein Portefeuille, das lediglich positive künftige Zahlungen (z.B. Verkaufserlöse, Dividenden, Bezugsrechtserlöse, Zinsen, Tilgungsbeträge, etc.) beinhaltet, also dessen Komponenten allesamt einen Fundamentalwert besitzen, muß auf einem vollkommenen Finanzmarkt<sup>7</sup> jedoch einen positiven Wert aufweisen. Andernfalls könnten die Anleger durch den Erwerb dieses Portefeuilles auf einfache Weise einen Arbitragegewinn erzielen.<sup>8</sup> Daraus resultiert die konstituierende Bedingung (3.1) für Wertprozeße.

Um eventuelle Short-Positionen zu berücksichtigen, muß lediglich der Wert  $V_t^{(s)}$  aller Leerverkaufpositionen vom Wert  $V_t^{(l)}$  aller Kaufpositionen subtrahiert werden. Damit erhält man den Wert  $W_t = V_t^{(l)} - V_t^{(s)}$  des aggregierten Gesamtportefeuilles.<sup>9</sup>

Zunächst soll die wahrscheinlichkeitstheoretisch fundierte Argumentationsweise, welche sich im Bereich der mathematischen Finanzmarkttheorie durchgesetzt hat,<sup>10</sup> näher erläutert werden.

**Definition 3.1.2** Sei  $\mathcal{I}_t := \sigma(V_t, V_{t-1}, \dots) \subset \mathcal{F}$  die von  $V_t, V_{t-1}, \dots$  generierte  $\sigma$ -Algebra.<sup>11</sup> □

**Definition 3.1.3**  $P(V_{t+1} \leq x \mid \mathcal{I}_t)$  sei eine nichtnegative,  $\mathcal{I}_t$ -meßbare und  $P$ -integrierbare Zufallsvariable, mit der für alle  $I \in \mathcal{I}_t$  die Gleichung

$$P[(V_{t+1} \leq x) \cap I] = \int_I P(V_{t+1} \leq x \mid \mathcal{I}_t) dP, \quad x \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist.<sup>12</sup> Dann ist  $P(V_{t+1} \leq x \mid \mathcal{I}_t)$  die durch  $\mathcal{I}_t$  bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $V_{t+1}$  und man vereinbart

$$F_{V_{t+1} \mid V_t, V_{t-1}, \dots}(x) \equiv F_{V_{t+1} \mid \mathcal{I}_t}(x) := P(V_{t+1} \leq x \mid \mathcal{I}_t).$$

□

Mit Hilfe des Satzes von RADON-NIKODYM läßt sich zeigen, daß eine Zufallsvariable im Sinne der Definition 3.1.3 überhaupt existiert. Ferner sind je zwei Zufallsvariablen, die obiges Kriterium erfüllen, mit Wahrscheinlichkeit Eins gleich,<sup>13</sup> d.h. die durch  $\mathcal{I}_t$  bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung ist im probabilistischen Sinne eindeutig definiert.

<sup>6</sup>Eine Kaufposition wird im englischen als *Long-Position* bezeichnet, wohingegen eine Leerverkaufposition als *Short-Position* bezeichnet wird.

<sup>7</sup>Zum Begriff des vollkommenen Finanzmarktes siehe Franke/Hax [25], S. 361 und Kruschwitz [38], S. 40.

<sup>8</sup>Die skizzierte Situation stellt per definitionem eine Arbitragegelegenheit dar. Vgl. Franke/Hax [25], S. 362 und Kruschwitz [38], S. 161f.

<sup>9</sup> $(W_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  ist jedoch kein Wertprozeß.

<sup>10</sup>Vgl. z.B. Irle [35], Karatzas/Shreve [37] und Mikosch [49].

<sup>11</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 260 und Malliaris/Brock [41], S. 4.

<sup>12</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 451 i.V.m. S. 443.

<sup>13</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 443.

$P(V_{t+1} \leq x \mid \mathcal{I}_t)$  ordnet somit dem Ereignis  $(V_{t+1} \leq x) \in \mathcal{F}$  die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(V_{t+1} \leq x \mid V_t = v_t, V_{t-1} = v_{t-1}, \dots) =: F_{V_{t+1} \mid V_t = v_t, V_{t-1} = v_{t-1}, \dots}(x)$$

zu, sobald die Realisation der Zeitreihe  $V_t, V_{t-1}, \dots$  in Form von  $v_t, v_{t-1}, \dots$  feststeht. Die Kenntnis der realisierten Zeitreihe  $v_t, v_{t-1}, \dots$  wird wahrscheinlichkeitstheoretisch dadurch ausgedrückt, indem man sagt, daß der Anleger gerade für jene Ereignisse aus  $\mathcal{I}_t$  bestimmen kann, ob sie realisiert wurden oder nicht,<sup>14</sup> obgleich er jedoch nicht das realisierte Ergebnis  $\omega \in \Omega$  kennt.<sup>15</sup> Damit kennt er jedoch zumindest die Realisation von  $P(V_{t+1} \leq x \mid \mathcal{I}_t)$ ,<sup>16</sup> d.h. er kann die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung des künftigen Portefeuillewertes aus der bis dato realisierten Zeitreihe ableiten.  $\mathcal{I}_t$  kann somit als die in  $t$  manifestierte *Information* über den zurückliegenden Wertverlauf interpretiert werden. Aufgrund von  $\mathcal{I}_{t-1} \subset \mathcal{I}_t$  ( $\forall t \in \mathbb{Z}$ ) ist  $\mathcal{I}_t$  eine echte Verbesserung der Information  $\mathcal{I}_{t-1}$  und  $(\mathcal{I}_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  symbolisiert damit den zeitlichen Informationszufluß auf dem Finanzmarkt.

## 3.2 Renditedefinitionen

### 3.2.1 Diskreter Ansatz

Mit dem diskreten Ansatz wird die absolute Wertveränderung  $\Delta V_t := V_{t+1} - V_t$  des Portefeuilles betrachtet.<sup>17</sup> Zwecks Berechnung des VaR zum Zeitpunkt  $t$  interessiert sich ein Anleger nicht nur für die Randverteilung des Zuwachses ( $F_{\Delta V_t}$ ), sondern vielmehr für die durch  $\mathcal{I}_t$  bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung  $F_{\Delta V_t \mid V_t, V_{t-1}, \dots}$ . Er stellt sich also die Frage nach dem Verteilungsgesetz der absoluten Wertveränderung unter der Bedingung der vorhandenen Information über die bis dato realisierten Portefeuillewerte.<sup>18</sup>

$\Delta V_t \mid \mathcal{I}_t = (V_{t+1} - V_t) \mid \mathcal{I}_t$  ist offenbar das Resultat einer Lagetransformation des bedingten Portefeuillewertes  $V_{t+1} \mid \mathcal{I}_t$  mit dem (zum Zeitpunkt  $t$  bereits realisierten) Lageparameter  $-V_t$ . Somit gehört die Verteilung von  $\Delta V_t \mid \mathcal{I}_t$ , d.h.  $F_{\Delta V_t \mid \mathcal{I}_t}$  der Lagefamilie der Verteilung von  $V_{t+1} \mid \mathcal{I}_t$  an.

Eine Abwandlung des diskreten Ansatzes besteht in der Betrachtung der relativen Wertveränderung  $\Delta V_t / V_t \mid \mathcal{I}_t$ .  $R_t := \Delta V_t / V_t$  wird als *Rendite* bezeichnet.<sup>19</sup> Damit gilt  $V_{t+1} \mid \mathcal{I}_t = V_t (1 + R_t) \mid \mathcal{I}_t$ . Man kann  $R_t \mid \mathcal{I}_t$  somit als stochastischen Zinssatz einer einmaligen Verzinsung des (zum Zeitpunkt  $t$  bereits realisierten) Startkapitals  $V_t$  über den Zeitraum  $[t, t+1]$  interpretieren.  $R_t \mid \mathcal{I}_t$  resultiert aus einer Lage-Skalen-(LS-)Transformation des bedingten Portefeuillepreises  $V_{t+1} \mid \mathcal{I}_t$  mit dem Skalenparameter  $V_t^{-1}$  und dem Lageparameter  $-1$ :

$$R_t \mid \mathcal{I}_t = \frac{V_{t+1} - V_t}{V_t} \mid \mathcal{I}_t = V_t^{-1} \cdot V_{t+1} - 1 \mid \mathcal{I}_t.$$

<sup>14</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 450.

<sup>15</sup>Die vorliegende Arbeit unterstellt laut Definition 3.1.1 unendliche Wertprozesse. Somit wird der Anleger niemals den vollständigen Pfad des stochastischen Prozesses erfahren und damit auch nicht die Kenntnis über das realisierte Elementarereignis erlangen.

<sup>16</sup>Man beachte, daß  $F_{V_{t+1} \mid V_t, V_{t-1}, \dots}(x) = P(V_{t+1} \leq x \mid \mathcal{I}_t)$  eine  $\mathcal{I}_t$ -meßbare Zufallsvariable ist, während  $F_{V_{t+1} \mid V_t = v_t, V_{t-1} = v_{t-1}, \dots}(x)$  ihre Realisation darstellt.

<sup>17</sup>Vgl. Jorion [36], S. 76 und Read [56], S. 7.

<sup>18</sup>Vgl. McNeil [46], S. 1f. Die Frage nach der bedingten Verteilung des Zuwachses ergibt sich automatisch, wenn man z.B. von einem autoregressiven Prozeß der Zuwächse oder der Volatilitäten ausgeht.

<sup>19</sup>Vgl. Read [56], S. 7. In der angelsächsischen Literatur werden dafür die Begriffe *Return* oder auch *Arithmetic Return* verwendet (vgl. Jorion [36], S. 76).

Somit gehört die Verteilung von  $R_t \mid \mathcal{I}_t$  der LS-Familie der Verteilung von  $V_{t+1} \mid \mathcal{I}_t$  an.

### 3.2.2 Kontinuierlicher Ansatz

Mit dem kontinuierlichen Ansatz wird nicht mehr direkt der Wertprozeß  $(V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ , sondern der logarithmierte Wertprozeß (Logwertprozeß)  $(\log V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  betrachtet.<sup>20</sup> Die absolute Wertveränderung  $\mathfrak{R}_t := \log V_{t+1} - \log V_t$  bezeichnet man als *Logrendite*.<sup>21</sup> Angenommen ein Anleger interessiert sich für die durch  $\sigma(\log V_t, \log V_{t-1}, \dots)$  bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Logrendite  $\mathfrak{R}_t \mid \sigma(\log V_t, \log V_{t-1}, \dots)$ . Da jeder Logwertzeitreihe mit Wahrscheinlichkeit Eins in eindeutiger Weise eine entsprechende Wertzeitreihe zugeordnet werden kann, gilt  $\sigma(\log V_t, \log V_{t-1}, \dots) = \mathcal{I}_t$ , d.h. eine bis  $t$  realisierte Wertzeitreihe beinhaltet genau die gleiche Information, wie eine bis  $t$  realisierte Logwertzeitreihe. Man kann sich daher lediglich auf die ursprüngliche  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{I}_t$  beschränken.

Es gilt<sup>22</sup>

$$V_{t+1} \mid \mathcal{I}_t = V_t \cdot \exp(\mathfrak{R}_t) \mid \mathcal{I}_t = V_t \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\mathfrak{R}_t}{n}\right)^n \mid \mathcal{I}_t.$$

$\mathfrak{R}_t \mid \mathcal{I}_t$  kann folglich als stochastischer Zinssatz einer kontinuierlichen Verzinsung des (zum Zeitpunkt  $t$  bereits realisierten) Startkapitals  $V_t$  über den Zeitraum  $[t, t+1]$  interpretiert werden. Die Logrendite wird aus diesem Grund auch als *Momentanrendite*, *kontinuierliche Rendite* oder *Rate of Return* bezeichnet.

Die Dichte von  $\mathfrak{R}_t \mid \mathcal{I}_t$  ist - im Gegensatz zum diskreten Ansatz - nicht mehr das Resultat einer einfachen Lage-Skalen-Modifikation der bedingten Dichte von  $V_{t+1}$ . Vielmehr gilt nun

$$f_{\mathfrak{R}_t \mid \mathcal{I}_t}(x) = V_t \cdot \exp(x) \cdot f_{V_{t+1} \mid \mathcal{I}_t}(V_t \cdot \exp(x)).$$

## 3.3 Normalverteilungs- und Random-Walk-Hypothese

Im folgenden werden zwei gängige finanzmarkttheoretische Modellannahmen - die *Random-Walk-Hypothese* (RW-Hypothese) und die *Normalverteilungshypothese* (N-Hypothese) - erläutert und einer kritischen Betrachtung unterzogen. Im Verlauf des Kapitels wird gezeigt, daß die RW-Hypothese bezüglich des Wertprozesses an der konstituierenden Bedingung für Wertprozesse (3.1), also schon in finanzwirtschaftlicher Hinsicht, scheitert.<sup>23</sup> Die RW-Hypothese bezüglich des Logwertprozesses mündet hingegen in einem grundlegenden Problem der Finanzökonometrie, nämlich bei der Fragestellung, ob Logrenditen von zeitlich vorgelagerten Logrenditen abhängen, oder nicht. Darüber hinaus hat man festgestellt, daß Finanzzeitreihen typischerweise sogenannte *Volatilitätscluster* aufweisen, d.h. Perioden starker Volatilität wechseln sich mit Perioden schwacher Volatilität ab. Solche Abhängigkeitsstrukturen werden allerdings im Rahmen der Zeitreihenanalyse untersucht, indem man sich bewußt von der RW-Hypothese distanziert.<sup>24</sup>

<sup>20</sup>Hierbei kommt die Voraussetzung  $P(V_t \leq 0) = 0$  zum Tragen, denn somit ist  $(\log V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  mit Wahrscheinlichkeit Eins definiert.

<sup>21</sup>Vgl. Read [56], S. 8. Im angelsächsischen Raum spricht man vom *Log-Return* oder vom *Geometric Return* (vgl. Jorion [36], S. 76).

<sup>22</sup>Vgl. Heuser [29], S. 170.

<sup>23</sup>Vgl. Campbell/Lo/MacKinlay [12], S. 15 und S. 32.

<sup>24</sup>Vgl. Schlittgen/Streitberg [60], S. 1 und S. 90.

Die N-Hypothese bezüglich der bedingten Renditen  $R_t | \mathcal{I}_t$  führt - analog zur RW-Hypothese für Wertprozesse - zum Problem der finanzwirtschaftlichen Verlustgrenze. Hingegen kann die Annahme normalverteilter bedingter Logrenditen  $\mathfrak{R}_t | \mathcal{I}_t$  ökonomisch nicht unmittelbar von der Hand gewiesen werden, weswegen sie lange Zeit die herrschende Meinung widerspiegelte.<sup>25</sup> Gegenwärtig ist man geteilter Auffassung über die bedingte Verteilung von Logrenditen, während sich bezüglich deren Randverteilung die empirische Erkenntnis einer leptokurtischen Form durchgesetzt hat.<sup>26</sup>

### 3.3.1 Normalverteilungshypothese bezüglich bedingter absoluter Portefeuillewertveränderungen

Zur Modellierung der Verteilung der bedingten absoluten Wertveränderung  $\Delta V_t | \mathcal{I}_t$  wird oft die Normalverteilung herangezogen.<sup>27</sup> Diese Vorgehensweise ist allerdings schon in wahrscheinlichkeitstheoretischer Hinsicht aufgrund der gegebenen Nullschranke des Trägers von  $F_{V_{t+1}|\mathcal{I}_t}$  bedenklich.

**Satz 3.3.1** Aus  $P(V_t \leq 0) = 0$  folgt  $P(V_t \leq 0 | \mathcal{I}_{t-n}) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots, \forall t \in \mathbb{Z}$ ).  $\square$

**Beweis:** Es gilt

$$0 = P[(V_t \leq 0) \cap I] = \int_I 0 \, dP, \quad \forall I \in \mathcal{I}_{t-n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Nach RADON-NIKODYM sind somit alle durch  $\mathcal{I}_{t-n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $P(V_t \leq 0 | \mathcal{I}_{t-n})$  mit Wahrscheinlichkeit Eins gleich 0.  $\blacksquare$

Für Wertprozesse gilt laut Definition 3.1.1 jedoch die konstituierende Bedingung (3.1), d.h. ein Anleger kann zu jedem Zeitpunkt allenfalls den eingesetzten Anlagebetrag verlieren. Somit gilt

$$0 = P(V_{t+1} \leq 0) = P(V_{t+1} \leq 0 | \mathcal{I}_t) = P(\Delta V_t \leq -V_t | \mathcal{I}_t) = F_{\Delta V_t | \mathcal{I}_t}(-V_t),$$

also  $F_{\Delta V_t | \mathcal{I}_t}(x) = 0$  für alle  $x \leq -V_t(\omega) \in \mathbb{R}$ , was aber im Widerspruch zur N-Hypothese steht.<sup>28</sup>

Oftmals wird auch versucht, die N-Hypothese durch den zentralen Grenzwertsatz zu rechtfertigen. Es gilt

$$(3.3) \quad P(V_t \leq x | \mathcal{I}_{t-n}) = P\left(\sum_{i=t-n}^{t-1} \Delta V_i \leq x - V_{t-n} | \mathcal{I}_{t-n}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

<sup>25</sup>Louis Bachelier führte im Jahre 1900 mit seinem Aufsatz *Théorie de la spéculation* die Normalverteilungsannahme für Renditen ein. Man kann ihn damit als Wegbereiter der modernen Finanzmarkttheorie bezeichnen.

<sup>26</sup>Damit sind implizit vor allem die sogenannten *Fat Tails* gemeint.

<sup>27</sup>Dies entspricht der üblichen Vorgehensweise in der klassischen VaR-Theorie. Vgl. Jorion [36], S. 88ff, Read [56], S. 49 und Zagst [66], S. 10, sofern die genannten Autoren von stochastisch unabhängigen Portefeuillewertveränderungen ausgehen.

<sup>28</sup>Vgl. Campbell/Lo/MacKinlay [12], S. 32.



Geht man von White-Noise-(WN-)Zuwächsen  $\Delta V_i \mid \mathcal{I}_{t-n}$  ( $i = t - n, \dots, t - 1$ ), d.h. von einem streng stationären Prozeß stochastisch unabhängiger absoluter Portfeuillewertveränderungen aus,<sup>29</sup> so gilt für alle  $i = t - n, \dots, t - 1$ :

$$\begin{aligned} E(\Delta V_i \mid \mathcal{I}_{t-n}) &= E(\Delta V_i) = \mu \in \mathbb{R}, \\ \text{Var}(\Delta V_i \mid \mathcal{I}_{t-n}) &= \text{Var}(\Delta V_i) = \sigma^2 > 0. \end{aligned}$$

Daraus resultiert für einen langen Zeithorizont (d.h.  $n$  groß) aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes nach LINDBERBERG-LÉVY<sup>30</sup>

$$P(V_t \leq x \mid \mathcal{I}_{t-n}) \approx \Phi\left(\frac{x - (V_{t-n} + n\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}\right), \quad n \text{ groß},$$

d.h. die bedingte Verteilung des Portfeuillewertes in einem fernen Zeitpunkt  $t$  ist approximativ normal, wenn über einen langen Zeitraum ein strenger Random-Walk der Portfeuillewerte unterstellt wird.<sup>31</sup>

### 3.3.2 Random-Walk-Hypothese bezüglich des Wertprozesses

Es stellt sich die Frage, wie sinnvoll die Annahme eines Random-Walks der Portfeuillewerte ist. Geht man von WN-Zuwächsen  $\Delta V_i \mid \mathcal{I}_{t-n}$  mit  $P(\Delta V_i < 0 \mid \mathcal{I}_{t-n}) = P(\Delta V_i < 0) > 0$ , m.a.W. von einem negativen linken Endpunkt  $x_L := \inf\{x \in \mathbb{R} : F_{\Delta V_i}(x) > 0\}$  der Verteilung der WN-Zuwächse aus, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen Durchbruch der Nullschranke nach  $\min\{m \in \mathbb{N} : m > |v_{t-n}/x_L|\}$  Zuwächsen positiv. Der Grund ist, daß die betrachteten WN-Zuwächse quasi „autistisch“ sind, d.h. sie nehmen keine Rücksicht auf den realisierten Portfeuillewert in  $t - n$ . Erfüllt  $(V_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  die konstituierende Bedingung (3.2), so kann  $V_{t-n}$  prinzipiell jeden positiven Wert  $v$  annehmen, also insbesondere  $|x_L|$ , unterschreiten, womit

$$(3.4) \quad P\left(V_{t-n} + \sum_{i=t-n}^{t-1} \Delta V_i < 0 \mid \mathcal{I}_{t-n}\right) = P(V_t < 0 \mid \mathcal{I}_{t-n}) \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$V_t$  kann jedoch nicht Bestandteil eines Wertprozesses sein, denn (3.4) steht im Widerspruch zu Satz 3.3.1, der für Wertprozesse seine Gültigkeit erhält.

Offenbar kann die N-Hypothese für absolute Wertveränderungen und folglich auch für diskrete Renditen nicht durch den zentralen Grenzwertsatz, der die RW-Hypothese im strengen Sinne voraussetzt, begründet werden. Beide Hypothesen stellen aus wahrnehmungstheoretischer Sicht zumindest für die linke Flanke der Verteilung der Portfeuillewertveränderung keine gute Wahl dar. Insbesondere wird gerade die für die Berechnung des VaR relevante linke Verteilungsperipherie mit der N-Hypothese immanent vernachlässigt.

<sup>29</sup>Es existieren auch schwächere Definitionen des White-Noise-Prozesses. Vgl. z.B. Fahrmeir/Kaufmann/Ost [21], S. 214 und Priestley [53], S. 114. Bei angenommener Unabhängigkeit der WN-Zuwächse (vgl. Schlittgen/Streitberg [60], S. 92) geht man zusätzlich davon aus, daß diese gleichfalls unabhängig von den bis zum jeweiligen Zeitpunkt realisierten Wertprozessen sind, formal:  $P(\Delta V_t \leq x \mid \mathcal{I}_{t-n}) = P(\Delta V_t \leq x)$  ( $n = 0, 1, \dots, \forall t \in \mathbb{Z}$ ).

<sup>30</sup>Vgl. Fisz [24], S. 234f.

<sup>31</sup>In der Literatur werden oft drei Formen des Random-Walks unterschieden (vgl. z.B. Campbell/Lo/MacKinlay [12], S. 31ff). Der strenge Random-Walk entspricht dann dem sogenannten *Random-Walk-1*.

### 3.3.3 Normalverteilungshypothese bezüglich bedingter Logrenditen

Geht man von multivariat lognormalverteilten Portefeuillewerten  $V_t$  aus,<sup>32</sup> so resultieren daraus multivariat normalverteilte Logwerte  $\log V_t$  und somit multivariat normalverteilte Logrenditen  $\mathfrak{R}_t$ . Die N-Hypothese für bedingte Logrenditen  $\mathfrak{R}_t \mid \mathcal{I}_t$  steht also zumindest im Einklang mit der finanzwirtschaftlichen Verlustgrenze.<sup>33</sup>

Bekanntlich besitzen empirische Verteilungen von Finanzzeitreihen eine leptokurtische Form, d.h. sie weisen eine schmale Wölbung und insbesondere Fat Tails auf.<sup>34</sup> Viele Autoren nahmen diese Erkenntnis zum Anlaß, alternative Verteilungshypothesen für Logrenditen zu entwickeln. Beispielhaft sei in diesem Zusammenhang auf einen Aufsatz von EBERLEIN und KELLER verwiesen.<sup>35</sup> Die genannten Autoren konnten die N-Hypothese für Logrenditen empirisch auf einem Signifikanzniveau von 1% widerlegen.<sup>36</sup> Dazu muß allerdings angemerkt werden, daß das verwendete statistische Instrumentarium per se unabhängige und identisch verteilte Logrenditen verlangt. Sind diese Voraussetzungen jedoch nicht erfüllt, so kann die durch eine Stichprobe ermittelte empirische Logrenditeverteilung (und mithin die theoretische Randverteilung der Logrenditen) durchaus leptokurtisch sein, obwohl die bedingten Logrenditen tatsächlich normalverteilt sind.<sup>37</sup> Dies ist etwa bei Annahme eines ARCH( $m$ )-Verlaufs der Logrenditen der Fall.<sup>38</sup>

$$\mathfrak{R}_t = \zeta_t \cdot \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \mathfrak{R}_{t-i}^2}, \quad \zeta_t \sim N(0, 1),$$

wobei für die ARCH-Parameter  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) gilt.<sup>39</sup> EBERLEIN und KELLER attestieren den Logrenditen sowie den quadrierten Logrenditen von Aktien generell eine vernachlässigbar kleine empirische Autokorrelation.<sup>40</sup> Bei Aktienindizes und Wechselkursen stellen diverse andere Autoren für die quadrierten Logrenditen jedoch durchaus signifikant hohe Autokorrelationen fest, während die empirisch beobachtete lineare Abhängigkeit der Logrenditen tatsächlich vernachlässigbar klein ist.<sup>41</sup> Darüber hinaus lassen sich in logarithmierten Finanzzeitreihen regelmäßig Volatilitätscluster beobachten.<sup>42</sup> Diese Eigenschaften können gerade durch geeignet adjustierte ARCH-Modelle wiedergegeben werden.<sup>43</sup>

Stellt man die über einem langen Zeitintervall  $[t - n, t]$  (d.h.  $n$  groß) resultierende Log-

<sup>32</sup>Womit beide konstituierenden Bedingungen für Wertprozesse erfüllt sind. Vgl. Abschnitt 3.1, S. 9.

<sup>33</sup>Vgl. Campbell/Lo/MacKinlay [12], S. 32.

<sup>34</sup>Vgl. Eberlein/Keller [14], S. 6ff, Emmer/Kluppelberg/Trüstedt [19], S. 4 und McNeil [46], S. 2.

<sup>35</sup>Vgl. Eberlein/Keller [14].

<sup>36</sup>Vgl. Eberlein/Keller [14], S. 7.

<sup>37</sup>Vgl. Bera/Higgins [4], S. 315. Bera/Higgins machen explizit darauf aufmerksam, daß die empirische Verteilungsfunktion lediglich ein Ausdruck der theoretischen Randverteilung der Logrendite ist.

<sup>38</sup>Vgl. Bera/Higgins [4], S. 315 und S. 318.

<sup>39</sup>Zur Definition des ARCH( $m$ )-Prozesses siehe z.B. Bera/Higgins [4], S. 309 und Schlittgen/Streitberg [60], S. 450. Man setzt außerdem  $P(\zeta_t \leq x \mid \mathcal{I}_t) = P(\zeta_t \leq x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{Z}$ ) voraus. Bei stationären ARCH-Zuwächsen gilt zusätzlich  $\sum_{i=1}^m \alpha_i < 1$  (vgl. Schlittgen/Streitberg [60], S. 451).

<sup>40</sup>Vgl. Eberlein/Keller [14], S. 9f.

<sup>41</sup>Vgl. Bera/Higgins [4], S. 317ff und Schlittgen/Streitberg [60], S. 453. Es empfiehlt sich somit, den Grad der Autokorrelation im Einzelfall selbst nachzuprüfen.

<sup>42</sup>Vgl. Bera/Higgins [4], S. 306f.

<sup>43</sup>Eine Verallgemeinerung des Engleschen ARCH-Ansatzes ist das GARCH-Modell von Bollerslev, bei dem bereits realisierte Volatilitäten als zusätzliche Regressoren künftiger Volatilitäten berücksichtigt werden. Vgl. Schlittgen/Streitberg [60], S. 454.

rendite

$$\log\left(\frac{V_t}{V_{t-n}}\right) = \log V_t - \log V_{t-n}$$

als Summe  $\sum_{i=t-n}^{t-1} \mathfrak{R}_i$  dar und geht man dabei von einem WN-Prozeß der  $\mathfrak{R}_i$  aus, so ist  $\log(V_t/V_{t-n}) \mid \mathcal{I}_{t-n} = \sum_{i=t-n}^{t-1} \mathfrak{R}_i \mid \mathcal{I}_{t-n}$  aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes approximativ normalverteilt.<sup>44</sup> Wird Gleichung (3.3) mittels

$$\begin{aligned} P(V_t \leq x \mid \mathcal{I}_{t-n}) &= P(\log V_t \leq \log x \mid \mathcal{I}_{t-n}) \\ &= P\left(\sum_{i=t-n}^{t-1} \mathfrak{R}_i \leq \log x - \log V_{t-n} \mid \mathcal{I}_{t-n}\right), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

modifiziert, resultiert daraus

$$P(V_t \leq x \mid \mathcal{I}_{t-n}) \approx \Phi\left(\frac{\log x - (\log V_{t-n} + n\mu)}{\sqrt{n\sigma^2}}\right), \quad n \text{ groß,}$$

mit  $\mu := E(\mathfrak{R}_i) \in \mathbb{R}$  und  $\sigma^2 := \text{Var}(\mathfrak{R}_i) > 0$ . Der bedingte Portefeuillewert in einem fernen Zeitpunkt ist also stets approximativ lognormalverteilt, wenn man von einem strengen Random Walk des Logwertprozesses ausgeht.<sup>45</sup> In diesem Fall kann der Anleger zur Ermittlung der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung einer langfristigen logarithmierten Portefeuillewertveränderung scheinbar unmittelbar auf die N-Hypothese zurückgreifen. Der zentrale Grenzwertsatz sagt jedoch nichts über die Konvergenzgeschwindigkeit aus. Es ist also unklar, wie lang die Haltedauer sein muß, damit eine hinreichend gute Approximation durch die Normalverteilung zustande kommt. Für die Ermittlung des VaR ist insbesondere das Konvergenzverhalten der linken Flanke der Logrenditeverteilung relevant und es ist zu vermuten, daß die klassischen Konvergenzsätze gerade für die Approximation der Verteilungsperipherie unzureichend sind.<sup>46</sup> Konvergenzsätze der Extremwerttheorie beschreiben hingegen gezielt das Konvergenzverhalten von extremen Realisationen. Es liegt somit auf der Hand, zur Ermittlung des VaR auf die Erkenntnisse der Extremwerttheorie zurückzugreifen. Außerdem interessiert sich ein Anleger in der Regel für den kurzfristigen VaR einer Finanzanlage.<sup>47</sup> In diesem Fall ist von der Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes abzuraten.

### 3.3.4 Random-Walk-Hypothese bezüglich des Logwertprozesses

Interessant ist auch die Frage, ob die Annahme eines Random-Walks bezüglich des Logwertprozesses gerechtfertigt ist oder nicht. Sie wird oft im Zusammenhang mit der sogenannten *Informationseffizienzhypothese* diskutiert:<sup>48</sup>

<sup>44</sup>Die N-Hypothese für Logrenditen kann somit - im Gegensatz zum Fall absoluter Wertveränderungen - durchaus mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes begründet werden.

<sup>45</sup>Unterstellt man normalverteilte Logrenditen, so erhält man die geometrische Brownsche Bewegung des Portefeuillewertes. Vgl. Campbell/Lo/MacKinlay [12], S. 32 i.V.m. S. 348.

<sup>46</sup>Ein Beispiel: Nach dem zentralen Grenzwertsatz konvergiert die Binomialverteilung gegen die Normalverteilung. Trotzdem kann die linke Flanke der Binomialverteilung prinzipiell nicht vollständig durch die Normalverteilung beschrieben werden, da die Normalverteilung negativen Realisationen stets eine positive Wahrscheinlichkeit konstatiert. Dieser „Approximationsfehler“ fällt jedoch erst dann ins Gewicht, wenn man sein Augenmerk speziell auf die Realisation linker Extremwerte richtet.

<sup>47</sup>Generell sollte jener Zeithorizont veranschlagt werden, der im äußersten Falle für eine vollständige Liquidation des Portefeuilles benötigt wird. Banken rechnen in der Regel mit dem Overnight-VaR (vgl. Jorion [36], S. 20). Nach der Basler Eigenkapitalvereinbarung beträgt die maximale Haltedauer 10 Tage (vgl. Read [55], S. 28 und S. 36).

<sup>48</sup>Vgl. Lo/MacKinlay [40], S. 4ff und Steiner/Bruns [64], S. 185.

*Ein Kapitalmarkt ist informationseffizient, wenn die Wertpapierkurse in jedem Zeitpunkt die jeweils aktuell vorhandenen bewertungsrelevanten Informationen einer bestimmten Kategorie widerspiegeln. In diesem Fall ist es für einen Anleger unmöglich, mit Hilfe der Informationen dieser Kategorie ein Portefeuille zu konstruieren, dessen erwartete Rendite über dem marktüblichen risikoäquivalenten Zinssatz liegt.*<sup>49</sup>

Das typische Argument von Befürwortern der RW-Hypothese lautet in etwa: „Wäre der nächste Kurszuwachs abhängig von zeitlich vorgelagerten Kurszuwachsen, so könnte ja jeder Anleger aus diesem Wissen einen über dem marktüblichen Satz liegenden Profit erzielen. Dies würde auf einem informationseffizienten Markt jedoch zur sofortigen Vernichtung der überprofitablen Gelegenheit führen. Die Kurse müssen also zwangsläufig einem Random Walk folgen.“<sup>50</sup> Diese Argumentationsweise beruht jedoch auf einem logischen Fehlschluß, denn aus der Negation der RW-Hypothese folgt nicht notwendig die Vorhersagbarkeit von Kurszuwachsen im Sinne der Erzielung überprofitabler erwarteter Kursgewinne. Damit folgt aus der Informationseffizienzhypothese, m.a.W. der Abstinenz überprofitabler erwarteter Kursgewinne, noch lange kein Random Walk. Dies wird besonders deutlich, wenn für die Logrenditen z.B. einen ARCH(1)-Prozeß angenommen wird. In diesem Fall sind der bedingte Erwartungswert

$$\begin{aligned} E(\mathfrak{R}_t | \mathcal{I}_t) &= E\left(\zeta_t \cdot \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mathfrak{R}_{t-1}^2} \mid \mathcal{I}_t\right) = E(\zeta_t \mid \mathcal{I}_t) \cdot \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mathfrak{R}_{t-1}^2} \\ &= E(\zeta_t) \cdot \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mathfrak{R}_{t-1}^2} = 0 \end{aligned}$$

und die bedingte Varianz

$$\begin{aligned} Var(\mathfrak{R}_t | \mathcal{I}_t) &= Var\left(\zeta_t \cdot \sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mathfrak{R}_{t-1}^2} \mid \mathcal{I}_t\right) = E(\zeta_t^2 (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mathfrak{R}_{t-1}^2) \mid \mathcal{I}_t) \\ &= E(\zeta_t^2 \mid \mathcal{I}_t) \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mathfrak{R}_{t-1}^2) = E(\zeta_t^2) \cdot (\alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mathfrak{R}_{t-1}^2) \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \mathfrak{R}_{t-1}^2. \end{aligned}$$

Vorhersagbarkeit ist hiermit offenbar nicht gegeben; der Anleger kann bestenfalls das akute Risiko der entsprechenden Finanzanlage bei Kenntnis der ARCH-Parameter auf der Grundlage der zuvor realisierten Logrendite quantifizieren.

Die Informationseffizienzhypothese ist weder notwendig noch hinreichend für die RW-Hypothese, wie LO und MACKINLEY feststellen.<sup>51</sup> Bei der Verknüpfung beider Hypothesen ist somit äußerste Vorsicht geboten.<sup>52</sup>

### 3.4 Wann ist Information irrelevant?

Im allgemeinen benötigt ein Anleger somit die Information  $\mathcal{I}_t$ , um die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $\mathfrak{R}_t$  zu quantifizieren. Nur im Fall

$$(3.5) \quad F_{\mathfrak{R}_t | \mathcal{I}_t}(x) := P(\mathfrak{R}_t \leq x \mid \mathcal{I}_t) = P(\mathfrak{R}_t \leq x) =: F_{\mathfrak{R}_t}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{Z}$$

<sup>49</sup>Vgl. Campbell/Lo/MacKinlay [12], S. 20f.

<sup>50</sup>Einen durchaus amüsanten Einblick in das „typische Streitgespräch“ zwischen Gegnern und Befürwortern der RW-Hypothese verschaffen LO und MACKINLEY in [40] auf S. 4.

<sup>51</sup>Vgl. Lo/MacKinlay [40], S. 5.

<sup>52</sup>Zur Kritik an der Random-Walk-Hypothese für Logrenditen vgl. BERA/HIGGINS [4] und LO/MACKINLEY [40] i.V.m. den Ausführungen auf S. 15.

benötigt der Anleger keine Information über den zurückliegenden Preisverlauf, die Logrenditen sind voneinander unabhängig:

**Satz 3.4.1** Wenn  $P(\mathfrak{R}_t \leq x \mid \mathcal{I}_t) = P(\mathfrak{R}_t \leq x)$ , dann  $P(\mathfrak{R}_t \leq x \mid \mathfrak{R}_{t-1}, \mathfrak{R}_{t-2}, \dots) = P(\mathfrak{R}_t \leq x)$ .  $\square$

**Beweisskizze:** Aus jeder realisierten Logwertzeitreihe  $\log v_t, \log v_{t-1}, \dots$  resultiert in eindeutiger Weise eine bestimmte Logrenditezeitreihe  $\mathfrak{r}_{t-1}, \mathfrak{r}_{t-2}, \dots$ . Umgekehrt kann der Anleger aus einer realisierten Logrenditezeitreihe jedoch nicht eindeutig auf den zugrundeliegenden Logwertverlauf schließen, d.h. alle Elementarereignisse aus  $\mathcal{I}_t$  sind echte Teilmengen eines Elementarereignisses aus  $\sigma(\mathfrak{R}_{t-1}, \mathfrak{R}_{t-2}, \dots)$ . Ein Logrenditeereignis aus  $\sigma(\mathfrak{R}_{t-1}, \mathfrak{R}_{t-2}, \dots)$  kann jedoch vollständig durch die Vereinigung bestimmter Logwertereignisse aus  $\mathcal{I}_t$  konstruiert werden, insbesondere wird also keine weitere Information aus  $\mathcal{I}_s$  ( $s > t$ ) benötigt. Aus der  $\sigma$ -Additivitätseigenschaft von  $\mathcal{I}_t$  folgt somit

$$\sigma(\mathfrak{R}_{t-1}, \mathfrak{R}_{t-2}, \dots) \subset \mathcal{I}_t.$$

Die Betrachtung der realisierten Logwertzeitreihe zum Zeitpunkt  $t$  führt also zu einer echten Verbesserung der durch die realisierten Logrenditen zum Zeitpunkt  $t$  gegebenen Information. Aus der Voraussetzung

$$P(\mathfrak{R}_t \leq x \cap I) = \int_I P(\mathfrak{R}_t \leq x) dP, \quad \forall I \in \mathcal{I}_t$$

folgt dann aber erst recht

$$P(\mathfrak{R}_t \leq x \cap \Delta I) = \int_{\Delta I} P(\mathfrak{R}_t \leq x) dP, \quad \forall \Delta I \in \sigma(\mathfrak{R}_{t-1}, \mathfrak{R}_{t-2}, \dots) \subset \mathcal{I}_t,$$

was zu beweisen war.  $\blacksquare$

Aus der Unabhängigkeit im Sinne von (3.5) resultiert also stets die Unabhängigkeit der Logrenditen. Darüber hinaus kann ein Anleger bei Stationarität der logarithmierten Wertveränderungen, d.h. im Falle

$$F_{\mathfrak{R}_t}(x) = F_{\mathfrak{R}}(x), \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

zur Ermittlung der bedingten Verteilung der Logrendite auf die „allgemeine“, d.h. zeitinvariante Randverteilung  $F_{\mathfrak{R}}$  der Logrendite zurückgreifen. Im nächsten Kapitel wird gezeigt, daß der VaR im Falle eines strengen Random Walks des Logwertprozesses als von Zeitpunkt und Informationsstand unabhängiges Portefeullerisikomaß interpretiert werden kann. Es bleibt also festzuhalten:

*Sind die Logrenditen vom zurückliegenden Wertverlauf unabhängig und darüber hinaus stationär, so kann ein Anleger zur Ermittlung der bedingten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Logrendite unmittelbar auf deren allgemeine Randverteilung zurückgreifen bzw. diese mit Hilfe statistischer Inferenz schätzen.*<sup>53</sup>

<sup>53</sup>Unabhängigkeit und Stationarität der Stichprobenvariablen sind grundlegende Voraussetzungen statistischer Inferenz. Vgl. z.B. Schlittgen [59], S. 144ff.

# Kapitel 4

## Portefeullerisikomaße

Für die folgenden Ausführungen seien stationäre (Log-)Renditen angenommen, d.h. es gilt  $F_{R_t} = F_R$  bzw.  $F_{\mathfrak{R}_t} = F_{\mathfrak{R}}$ .

### 4.1 Value-at-Risk

#### 4.1.1 Bedingter Value-at-Risk

Die durch  $\mathcal{I}_t$  bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portefeullewertveränderung  $\Delta V_t$  wird als bedingte *Profit-Loss-(P&L-) Verteilung* bezeichnet. Es empfiehlt sich jedoch, das Portefeullerisiko im ersten Schritt anhand der relativen Wertveränderung darzustellen, indem man die Rendite heranzieht.<sup>1</sup>

**Definition 4.1.1 (Bedingter Return-at-Risk)** Sei  $F_{R_t|\mathcal{I}_t}$  streng monoton auf  $\mathbb{R}$ . Der bedingte Return-at-Risk (CRaR) eines Portefeulles zum Zeitpunkt  $t$  ist das negativierte  $p$ -Quantil der Verteilung der durch  $\mathcal{I}_t$  bedingten Portefeullerendite:

$$\text{CRaR}_p(t) := -F_{R_t|\mathcal{I}_t}^{\leftarrow}(p) = F_{-R_t|\mathcal{I}_t}^{\leftarrow}(1-p) = \overline{F}_{-R_t|\mathcal{I}_t}^{\leftarrow}(p), \quad 0 < p < 1.$$

□

Es ist zu beachten, daß man sich zur Ermittlung des CRaR auf die Verteilung  $F_{-R_t|\mathcal{I}_t}$  konzentrieren kann, womit statt der linken Flanke die rechte Flanke zum Corpus delicti erklärt wird. Im zweiten Schritt folgt nun die Definition des bedingten VaR.

**Definition 4.1.2 (Bedingter Value-at-Risk)** Der bedingte Value-at-Risk (CVaR) eines Portefeulles zum Zeitpunkt  $t$  ist das negativierte  $p$ -Quantil der Verteilung der durch  $\mathcal{I}_t$  bedingten Portefeullewertveränderung:

$$\text{CVaR}_p(t) := V_t \cdot \text{CRaR}_p(t), \quad 0 < p < 1.$$

□

---

<sup>1</sup>Die Quantifizierung des Risikos kann damit unabhängig vom Anlagevolumen erfolgen. Der Renditeansatz ist grundlegend für die gesamte Portfoliotheorie (vgl. z.B. Markowitz [43] S. 6).

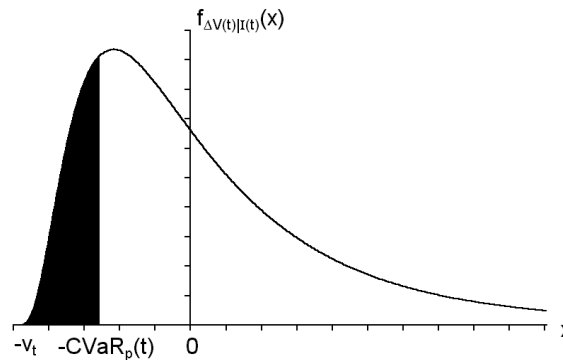


Abb. 1: Bedingte P&amp;L-Verteilung und bedingter Value-at-Risk.

Der CVaR ist also der Verlustbetrag, der mit Wahrscheinlichkeit  $p$  nach Ablauf des Zeitintervalls  $[t, t + 1]$  überschritten wird,<sup>2</sup> wenn man den bis  $t$  realisierten Wertverlauf berücksichtigt. Quantifiziert wird somit das akute Risiko des Portefeuilles. Im folgenden wird  $p$  als *Shortfall-Wahrscheinlichkeit* bezeichnet.

**Exkurs.** Die Ermittlung des bedingten VaR fällt nicht in die Domäne der Extremwerttheorie, wenn der Wertentwicklung auf den Finanzmärkten ein ARCH- oder noch allgemeiner ein GARCH-Prozeß unterstellt wird. Dies folgt aus der Tatsache, daß die bedingte Logrendite bei Zugrundelegung eines GARCH-Modells normalverteilt ist. Die Ermittlung des bedingten VaR beschränkt sich sodann auf die Schätzung der GARCH-Parameter.<sup>3</sup> Hierbei soll von fortgeschrittenen GARCH-Ansätzen, die für die bedingte Logrendite alternative Verteilungsmodelle und damit insbesondere Fat Tails zulassen, einmal abgesehen werden.<sup>4</sup> ○

Man geht ferner davon aus, daß die Portefeuillezusammensetzung während des betrachteten Zeitraums konstant bleibt. Der CVaR ist also ein statisches Risikomaß.<sup>5</sup> Hinzu kommt, daß der CVaR laut Definition 4.1.2 eine Zufallsvariable ist, die erst zum Zeitpunkt  $t$  realisiert wird.

Unter der Bedingung, daß der CVaR nach Ablauf des Zeitraums  $[t, t + 1]$  überschritten wird, spiegelt dieser lediglich den minimalen Wertverlust, d.h. die „günstigste“ Situation im Falle seines Durchbruchs, wider. Das eigentliche Verlustpotential bei Eintritt des Katastrophenszenarios - der sogenannte *Shortfall-Risk* - wird durch den CVaR jedoch nicht erklärt.

#### 4.1.2 Unbedingter Value-at-Risk

Mit dem obigen Ansatz wird also versucht, das akute Risiko unter Berücksichtigung des bisherigen Wertverlaufs zu quantifizieren. Interessiert sich ein Anleger jedoch für das chro-

<sup>2</sup>Wählt man als Zeiteinheit einen Handelstag, so bezieht sich der VaR also auf einen möglichen Wertverlust am nächsten Handelstag.

<sup>3</sup>Vgl. McNeil [46], S. 2. Zur methodischen Vorgehensweise siehe etwa Barone-Adesi/Giannopoulos [2].

<sup>4</sup>Vgl. z.B. Bera/Higgins [4], S. 335, Bollerslev/Chou/Kroner [8], S. 10ff, S. 23f und S. 39f sowie McNeil [46], S. 2 i.V.m. S. 10.

<sup>5</sup>Andernfalls müßte man neben der Ungewißheit über den künftigen Portefeuillewert zusätzlich die Ungewißheit künftiger Investitionsentscheidungen operationalisieren.

nische Risiko des Portefeuilles, d.h. möchte er wissen, welcher Verlustbetrag durchschnittlich in jedem  $p^{-1}$ -ten Zeitpunkt überschritten wird, so fragt er nach dem unbedingten VaR.

**Definition 4.1.3 (Unbedingter Return-at-Risk)** Sei  $F_R$  streng monoton auf  $\mathbb{R}$ . Der unbedingte Return-at-Risk (RaR) eines Portefeuilles ist das negativierte  $p$ -Quantil der Verteilung der unbedingten Portefeuillerendite:

$$\text{RaR}_p := -F_R^{\leftarrow}(p) = F_{-R}^{\leftarrow}(1-p) = \overline{F}_{-R}^{\leftarrow}(p), \quad 0 < p < 1.$$

**Definition 4.1.4 (Unbedingter Value-at-Risk)** Der unbedingte Value-at-Risk (VaR) eines Portefeuilles ist das negativierte  $p$ -Quantil der Verteilung der unbedingten Portefeuillewertveränderung eines Portefeuilles mit dem Wert  $v$ .<sup>6</sup>

$$\text{VaR}_p(v) := v \cdot \text{RaR}_p, \quad 0 < p < 1, \quad v > 0.$$

□

Der unbedingte VaR ist im Gegensatz zum bedingten VaR keine Zufallsvariable und für die Ermittlung des chronischen Risikos wird der Informationsgehalt des zurückliegenden Wertverlaufs nicht benötigt. In praxi wird man für  $v$  gerade den aktuellen Portefeuillewert einsetzen, um eine ökonomisch plausible Erklärung für das vorliegende chronische Portefeuillerisiko zu erhalten. Dieser Sachverhalt soll jedoch nicht darüber hinweg täuschen, daß der Informationsgehalt des VaR lediglich mit dem des RaR übereinstimmt.

Die Überschreitung des  $\text{RaR}_p$  kann als  $p^{-1}$ -Tage-Shortfall bezeichnet werden, wenn als Zeiteinheit ein Handelstag gewählt wird.<sup>7</sup> In der Regel wird  $p \leq 0.05$  gewählt, damit die Überschreitung des  $\text{RaR}_p$  als „seltenes Ereignis“ aufgefaßt werden kann. In der herkömmlichen VaR-Theorie, d.h. bei der parametrischen und nonparametrischen Ermittlung des VaR,<sup>8</sup> sollen andererseits lediglich „normale“ Crash-Situationen abgebildet werden.<sup>9</sup> Dabei wird maximal ein 100-Tage-Shortfall betrachtet, so daß zusätzlich  $p \geq 0.01$  vereinbart wird.<sup>10</sup> Bei Anwendung der Methoden der Extremwerttheorie werden allerdings die - im Vergleich zu den herkömmlichen Methoden - besten Ergebnisse für  $p \leq 0.001$  erzielt, also bei der Quantifizierung extremer Risikoszenarien.<sup>11</sup>

### 4.1.3 Logreturn-at-Risk

Motiviert durch die Abschnitte 3.3.3 und 3.3.4 kann man nun den bedingten und den unbedingten *Logreturn-at-Risk* definieren.

<sup>6</sup>Der VaR ist nicht einheitlich definiert. Einige Autoren weisen den VaR negativ aus:  $v \cdot F_R^{\leftarrow}(p)$  (vgl. z.B. Read [56], S. 12). Andere Autoren definieren den VaR wiederum als Abweichung vom erwarteten Portefeuillepreis:  $v(E(R_t) - F_R^{\leftarrow}(p)) = v(\text{RaR}_p + E(R_t))$  (vgl. z.B. Jorion [36], S. 87).

<sup>7</sup>Vgl. Bassi/Embrechts/Kafetzaki [3], S. 111. Z.B. tritt die Überschreitung des  $\text{RaR}_{0,001}$  im Durchschnitt alle vier (Handels-)Jahre ein.

<sup>8</sup>Die unterschiedlichen Ermittlungsansätze werden in Kapitel 6 thematisiert.

<sup>9</sup>Vgl. Read [56], S. 16.

<sup>10</sup>Der Basler Ausschuß für Bankenaufsicht gibt ein Konfidenzniveau von  $p = 0.01$  vor. Vgl. Jorion [36], S. 50 und Read [55], S. 28.

<sup>11</sup>Eine ausführliche Studie verschiedener VaR-Ermittlungsmethoden wird in Kapitel 11 präsentiert.



**Definition 4.1.5 (Bedingter Logreturn-at-Risk)** Sei  $F_{\mathfrak{R}_t|\mathcal{I}_t}$  streng monoton auf  $\mathbb{R}$ . Der bedingte Logreturn-at-Risk (CLogRaR) eines Portefeuilles zum Zeitpunkt  $t$  ist der bedingte Return-at-Risk, bezogen auf die Logrendite:

$$\text{CLogRaR}_p(t) := -F_{\mathfrak{R}_t|\mathcal{I}_t}^{\leftarrow}(p) = F_{-\mathfrak{R}_t|\mathcal{I}_t}^{\leftarrow}(1-p) = \overline{F}_{-\mathfrak{R}_t|\mathcal{I}_t}^{\leftarrow}(p), \quad 0 < p < 1.$$

**Definition 4.1.6 (Unbedingter Logreturn-at-Risk)** Sei  $F_{\mathfrak{R}}$  streng monoton auf  $\mathbb{R}$ . Der unbedingte Logreturn-at-Risk (LogRaR) eines Portefeuilles ist der unbedingte Return-at-Risk, bezogen auf die Logrendite:

$$\text{LogRaR}_p := -F_{\mathfrak{R}}^{\leftarrow}(p) = F_{-\mathfrak{R}}^{\leftarrow}(1-p) = \overline{F}_{-\mathfrak{R}}^{\leftarrow}(p), \quad 0 < p < 1.$$

□

Der  $\text{CLogRaR}_p(t)$  und der  $\text{LogRaR}_p$  sind im Falle unabhängiger Logrenditen identisch, da die Information  $\mathcal{I}_t$  unter dieser Voraussetzung irrelevant ist.<sup>12</sup>

**Satz 4.1.7** Es gilt

$$\text{CRaR}_p(t) = 1 - \exp(-\text{CLogRaR}_p(t))$$

bzw.

$$\text{RaR}_p = 1 - \exp(-\text{LogRaR}_p).$$

□

Der konventionelle (C)RaR resultiert also aus einer einfachen Transformation des (C)LogRaR.

**Beweis:** Aus der Definition des bedingten LogRaR resultiert

$$\begin{aligned} 1-p &= F_{-\mathfrak{R}_t|\mathcal{I}_t}(\text{LogRaR}_p(t)) = P(-\mathfrak{R}_t \leq \text{LogRaR}_p(t) \mid \mathcal{I}_t) \\ &= P\left(\log\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right) > -\text{LogRaR}_p(t) \mid \mathcal{I}_t\right) \\ &= P(R_t > \exp(-\text{LogRaR}_p(t)) - 1 \mid \mathcal{I}_t) \\ &= P(-R_t \leq 1 - \exp(-\text{LogRaR}_p(t)) \mid \mathcal{I}_t) \\ &= F_{-R_t|\mathcal{I}_t}(1 - \exp(-\text{LogRaR}_p(t))). \end{aligned}$$

Mit  $1 - \exp(-\text{LogRaR}_p(t))$  erhält man also das  $(1-p)$ -Quantil der Verteilung von  $-R_t \mid \mathcal{I}_t$ , m.a.W. den bedingten RaR des Portefeuilles. Der Beweis für den unbedingten RaR erfolgt analog und sei dem Leser überlassen. ■

Für den bedingten VaR gilt somit

$$(4.1) \quad \text{CVaR}_p(t) = V_t(1 - \exp(-\text{CLogRaR}_p(t))),$$

während der unbedingte VaR aus

$$(4.2) \quad \text{VaR}_p(v) = v(1 - \exp(-\text{LogRaR}_p))$$

resultiert.

Der  $\text{CVaR}_p(t)$  ergibt sich bei Unabhängigkeit der Logrenditen aus Formel (4.2), indem für  $v$  der zum Zeitpunkt  $t$  realisierte Portefeuillewert  $v_t$  eingesetzt wird. Die Unterscheidung zwischen bedingtem und unbedingtem VaR ist in diesem Falle also redundant.<sup>13</sup>

<sup>12</sup>Vgl. Abschnitt 3.4, S. 17f.

<sup>13</sup>Der gesamten klassischen VaR-Theorie liegt implizit die Unabhängigkeitsannahme zugrunde, weswegen eine Unterscheidung zwischen bedingtem und unbedingtem VaR dort überhaupt nicht vorgenommen wird.

## 4.2 Shortfall-Risk

### 4.2.1 Bedeutung

Anleger interessieren sich in der Regel nicht nur für den Verlustbetrag, der im Falle eines  $p^{-1}$ -Tage-Shortfalls überschritten wird, sondern auch für den zu erwartenden Wertverlust, falls das Katastrophenszenario eintritt. Es handelt sich sozusagen um das Risiko „jenseits des VaR“. Die Differenz zwischen dem realisierten Wertverlust und dem VaR wird dabei als *Shortfall* bezeichnet.<sup>14</sup> Unter dem *Shortfall-Risk* (SR) oder *Downside-Risk* wird somit das Risiko der Überschreitung des VaR verstanden. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Shortfalls wird als *Shortfallverteilung* über dem (C)VaR bezeichnet. Dieses Konzept besitzt im wesentlichen zwei Vorteile gegenüber dem ursprünglichen (C)VaR-Konzept:<sup>15</sup>

1. Das Shortfall-Risk-Konzept ermöglicht den Vergleich diverser P&L-Verteilungen. Der VaR alleine sagt nichts über das Risiko jenseits seiner selbst aus. Besitzt eine P&L-Verteilung etwa einen relativ hohen VaR, jedoch mittelstark ausgeprägte Flanken, so kann der SR unter Umständen geringer sein, als bei einer P&L-Verteilung mit einem relativ niedrigen VaR und breiten Flanken.
2. Während der (C)VaR lediglich eine Konfidenzgrenze darstellt, ist der SR ein Erwartungswert und eignet sich daher insbesondere für die praktische Erläuterung des Portefeullerisikos.

In Kapitel 5 wird gezeigt, daß der SR ein verallgemeinertes Äquivalent in der Extremwerttheorie besitzt, so daß man zu seiner Ermittlung unmittelbar auf Methoden der Extremwerttheorie zurückgreifen kann.

### 4.2.2 Definition

**Definition 4.2.1 (Bedingter Shortfall-Risk)** *Der bedingte Shortfall-Risk (CSR) ist der bei Zugrundelegung der Information  $\mathcal{I}_t$  zu erwartende Wertverlust unter der Bedingung, daß der bedingte VaR überschritten wird:*

$$\text{CSR}_p(t) := E[(-V_t R_t \mid -V_t R_t > \text{CVaR}_p(t)) \mid \mathcal{I}_t], \quad 0 < p < 1.$$

**Definition 4.2.2 (Unbedingter Shortfall-Risk)** *Der unbedingte Shortfall-Risk (SR) ist der Erwartungswert des Wertverlustes unter der Bedingung, daß der unbedingte VaR überschritten wird:*

$$\text{SR}_p(v) := E(-v R_t \mid -v R_t > \text{VaR}_p(v)), \quad 0 < p < 1, \quad v > 0.$$

□

<sup>14</sup>Vgl. Read [56], S. 11f. Monetäre Verluste werden im Rahmen dieser Arbeit jedoch in absoluter Form wiedergegeben und somit positiv ausgedrückt.

<sup>15</sup>Das im folgenden dargestellte Shortfall-Risk-Konzept basiert auf Anregungen von Paul Embrechts (ETHZ), der im Frühjahr 1999 einen Vortrag an der Universität zu Köln über die Methoden der Extremwerttheorie hielt. Daneben gibt es ein alternatives Shortfall-Risk-Konzept auf der Grundlage der sogenannten *Lower Partial Moments* (vgl. z.B. Matthes/Schröder [44], S. 148 und Read [56], S. 12), das im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch nicht weiter verfolgt werden soll.

An Abschnitt 4.1.3 anknüpfend, resultiert der unbedingte SR mittels

$$\begin{aligned}
\text{SR}_p(v) &= E(-vR_t \mid -vR_t > \text{VaR}_p(v)) \\
&= E(-vR_t \mid -vR_t > v(1 - \exp(-\text{LogRaR}_p))) \\
&= E(-vR_t \mid -\mathfrak{R}_t > \text{LogRaR}_p) \\
&= E(v(1 - \exp(-(-\mathfrak{R}_t))) \mid -\mathfrak{R}_t > \text{LogRaR}_p),
\end{aligned}$$

wenn  $\text{VaR}_p(v)$  durch  $v(1 - \exp(-\text{LogRaR}_p))$  und  $-R_t$  durch  $(1 - \exp(-(-\mathfrak{R}_t)))$  substituiert werden. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\text{SR}_p(v) &= v \cdot \int_{\text{LogRaR}_p}^{+\infty} (1 - \exp(-x)) d \frac{F_{-\mathfrak{R}}(x) - F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)}{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)} \\
&= v \cdot \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-(\text{LogRaR}_p + y))) d \frac{F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p + y) - F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)}{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)}.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\frac{F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p + y) - F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)}{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)} =: F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y), \quad y \geq 0$$

die Verteilung des auf den Logwertprozeß bezogenen Shortfalls  $Y$  über  $\text{LogRaR}_p$ .<sup>16</sup> Somit gilt

$$\begin{aligned}
\text{SR}_p(v) &= v \cdot \int_0^{+\infty} (1 - \exp(-(\text{LogRaR}_p + y))) dF_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y) \\
&= v \cdot \left( 1 - \int_0^{+\infty} \exp(-(\text{LogRaR}_p + y)) dF_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y) \right) \\
&= v \left( 1 - \exp(-\text{LogRaR}_p) \cdot \int_0^{+\infty} \exp(-y) dF_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y) \right) \\
(4.3) \quad &= v(1 - \exp(-\text{LogRaR}_p)) \cdot E(\exp(-Y)).
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende grundsätzliche Fragen:

1. Wie wird der  $\text{LogRaR}_p$  ermittelt?
2. Wie wird die Shortfallverteilung  $F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}$  ermittelt?
3. Existiert der Erwartungswert von  $\exp(-Y)$  auf der Grundlage der Shortfallverteilung  $F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}$ ? Wenn ja, wie wird dieser berechnet?

<sup>16</sup>Im folgenden wird der Hinweis auf den Logwertprozeß vernachlässigt, sofern dieser Sachverhalt klar aus dem Kontext hervorgeht.

Geht man davon aus, daß der LogRaR und die Shortfallverteilung weder nonparametrisch noch parametrisch geschätzt werden sollen, lassen sich diese Fragen lediglich mit Hilfe der Extremwerttheorie beantworten.<sup>17</sup> Bei Anwendung nonparametrischer, d.h. verteilungsfreier Verfahren, würde man die gesuchten Größen einfach empirisch ermitteln, während man im Rahmen eines parametrischen Modells sowohl alle Quantile als auch alle vorhandenen Erwartungswerte entweder analytisch oder numerisch bestimmen könnte.

Man kann versuchen, den Erwartungswert

$$E(\exp(-Y)) = \int_0^{+\infty} \exp(-y) dF_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y)$$

analytisch zu berechnen: Bekanntlich wird die Funktion

$$M_X(t) := E(\exp(Xt)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(xt) dF_X(x)$$

als *Momenterzeugende Funktion* bezeichnet.<sup>18</sup> Nach dem Satz von TAYLOR gilt

$$\exp(xt) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot x^i.$$

Angenommen  $M_Y$  existiere in einer  $\varepsilon$ -Umgebung um Null.<sup>19</sup> Es läßt sich zeigen,<sup>20</sup> daß in diesem Fall

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot x^i dF_X(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^i dF_X(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \cdot E(X^i).$$

Insbesondere sind dann alle Momente  $E(X^i)$  endlich definiert. Bezogen auf den Shortfall  $Y$  erhält man somit

$$(4.4) \quad E(\exp(-Y)) = M_Y(-1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \cdot E(Y^i),$$

womit die Berechnung von  $E(\exp(-Y))$  möglich ist, sofern alle Momente der Shortfallverteilung endlich sind. Im nächsten Kapitel wird jedoch gezeigt, daß zumindest die empirisch nachgewiesene Randverteilung von Logrenditen nicht alle Momente der Shortfallverteilung zuläßt. Damit ist Gleichung (4.4) nicht applikabel. Ein alternativer Lösungsweg wird daher in Kapitel 8 vorgestellt.

<sup>17</sup>Die benötigte theoretische Basis wird im nächsten Kapitel gelegt.

<sup>18</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 285.

<sup>19</sup>Manche Autoren setzen die Existenz innerhalb einer  $\varepsilon$ -Umgebung um Null bereits bei der Definition der Momenterzeugenden Funktion voraus (z.B. Schlittgen [59], S. 71).

<sup>20</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 285 i.V.m. 214 und Schlittgen [59], S. 72.

## Kapitel 5

# Grundlagen der Extremwerttheorie

### 5.1 Konvergenz des Stichprobenmaximums

Im folgenden wird eine einfache Zufallsstichprobe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  angenommen und  $F := F_{X_i}$  gesetzt. Im Zentrum der Extremwerttheorie steht das Konvergenzverhalten des Stichprobenmaximums  $M_n := \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ .

**Satz 5.1.1 (Satz von Fisher-Tippett)** *Wenn zwei reelle Folgen  $a_n > 0$  und  $b_n \in \mathbb{R}$  mit*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow{d} H(x)$$

*existieren, wobei  $H$  eine nicht-degenerierte Verteilungsfunktion ist, dann existieren zwei Parameter  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$ , so daß<sup>1</sup>*

$$H(x) = H_\xi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \cdot \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right), & \xi = 0 \end{cases}, \quad \sigma > 0,$$

*mit dem Träger*

$$\mathbb{D}_{\xi, \mu, \sigma}^{GEV} := \begin{cases} x > \mu - \frac{\sigma}{\xi}, & \xi > 0 \\ x \in \mathbb{R}, & \xi = 0 \\ x < \mu - \frac{\sigma}{\xi}, & \xi < 0 \end{cases}.$$

□

**Beweisskizze:** Der vollständige Beweis kann z.B. bei Resnick [58] nachgelesen werden. Im folgenden soll lediglich eine Beweisskizze die Grundidee der Beweisführung wiedergeben.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 121 i.V.m. S. 152.

<sup>2</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 122.

Laut Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} F^{[tn]}(c_n x + d_n) &\equiv (F(c_n x + d_n))^{[tn]} \\ &= (F^n(c_n x + d_n))^{\frac{[tn]}{n}} \rightarrow H^t(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei  $F^{[tn]}(c_n x + d_n)$  die Verteilungsfunktion des standardisierten Stichprobenmaximums  $(M_{[tn]} - d_n)/c_n$  ist. Außerdem gilt ebenfalls laut Voraussetzung

$$F^{[tn]}(c_{[tn]}x + d_{[tn]}) \rightarrow H(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$F^{[tn]}(c_{[tn]}x + d_{[tn]})$  ist die Verteilungsfunktion des standardisierten Stichprobenmaximums  $(M_{[tn]} - d_{[tn]})/c_{[tn]}$ .

Allgemein folgt aus  $(A_n - a_n)/b_n \xrightarrow{d} A$  und  $(A_n - a'_n)/b'_n \xrightarrow{d} A'$  ( $b_n, b'_n > 0$ ) die Existenz von zwei reellen Zahlen  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\beta > 0$  mit den Eigenschaften

$$\frac{b_n}{b'_n} \rightarrow \beta, \quad \frac{a_n - a'_n}{b'_n} \rightarrow \alpha, \quad n \rightarrow \infty$$

und es gilt  $A' \stackrel{d}{=} \alpha + \beta A$ .<sup>3</sup>

Bezogen auf die beiden Zufallsvariablen  $(M_{[tn]} - d_n)/c_n$  und  $(M_{[tn]} - d_{[tn]})/c_{[tn]}$  folgt daraus die Existenz von zwei reellen Funktionen  $\delta(t) \in \mathbb{R}$  und  $\gamma(t) > 0$  mit den Eigenschaften

$$\frac{c_n}{c_{[tn]}} \rightarrow \gamma(t), \quad \frac{d_n - d_{[tn]}}{c_{[tn]}} \rightarrow \delta(t), \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall t > 0$$

und

$$(5.1) \quad H(x) = H^t\left(\frac{x - \delta(t)}{\gamma(t)}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Aus (5.1) folgt für alle  $s, t > 0$

$$(5.2) \quad \gamma(st) = \gamma(s) \cdot \gamma(t), \quad \delta(st) = \gamma(t) \cdot \delta(s) + \delta(t).$$

Das Gleichungssystem (5.1) und (5.2) determiniert nun auf eindeutige Weise die in Satz 5.1.1 dargelegte Grenzverteilung  $H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ . ■

$H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  wird als *verallgemeinerte Extremwertverteilung*<sup>4</sup> bezeichnet und man sagt „ $F$  befindet sich im *Maximum-Anziehungsbereich*<sup>5</sup> der Extremwertverteilung  $H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ “, formal:

$$F \in \text{MDA}\left(H_\xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right).$$

Existieren zwei Folgen  $a_n$  und  $b_n$  laut Satz 5.1.1, so existieren auch zwei Folgen  $c_n = \sigma a_n > 0$  und  $d_n = \mu a_n + b_n \in \mathbb{R}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) &= P\left(\frac{M_n - (\mu a_n + b_n)}{\sigma a_n} \leq x\right) = P\left(\frac{M_n - b_n - \mu a_n}{\sigma a_n} \leq x\right) \\ &= P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq \sigma x + \mu\right) \xrightarrow{d} H(\sigma x + \mu) = H_\xi(x). \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Dieser Satz wird als *Convergence-to-Types-Theorem* bezeichnet. Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 554.

<sup>4</sup>Engl.: Generalized Extreme Value Distribution (GEV).

<sup>5</sup>Engl.: Maximum Domain of Attraction (MDA).

Aus diesem Grund kann man auf die explizite Angabe von Lage- und Skalenparameter verzichten und lediglich  $F \in \text{MDA}(H_\xi(x))$  oder kurz

$$F \in \text{MDA}(H_\xi)$$

schreiben. Für die weiteren Überlegungen ist das folgende Lemma hilfreich.

**Lemma 5.1.2** *Für beliebige  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$  gilt*

$$F \in \text{MDA}\left(H_\xi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)\right) \iff F \in \text{MDA}\left(H_\xi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right).$$

□

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, daß

$$F \in \text{MDA}\left(H_\xi\left(\frac{x - \mu_1}{\sigma_1}\right)\right) \implies F \in \text{MDA}\left(H_\xi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right).$$

Man konstruiere die Folgen  $c_n = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cdot a_n > 0$  und  $d_n = \left(\mu_1 - \mu_2 \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) a_n + b_n \in \mathbb{R}$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right) &= P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq \sigma_1 \left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \mu_1\right) \\ \xrightarrow{d} H\left(\sigma_1 \left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \mu_1\right) &= H_\xi\left(\frac{x - \mu_2}{\sigma_2}\right), \end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

$\xi$  bestimmt die Gestalt der Extremwertverteilung und wird daher als *Gestaltparameter*<sup>6</sup> bezeichnet, während  $\mu$  und  $\sigma$  Lage- bzw. Skalenparameter im üblichen Sinne sind. Die Verteilungsfunktion  $H_\xi(x)$  repräsentiert also den Standardfall  $\mu = 0$  und  $\sigma = 1$ .<sup>7</sup> Weiterhin wird das Reziprok  $1/\xi$  als *Flankenindex*<sup>8</sup> oder als *Extremwertindex*<sup>9</sup> bezeichnet.<sup>10</sup>

Es werden grundsätzlich drei Fälle unterschieden:<sup>11</sup>

$\xi > 0$	Fréchet-Fall,
$\xi = 0$	Gumbel-Fall,
$\xi < 0$	Weibull-Fall.

<sup>6</sup>Engl.: Shape Parameter.

<sup>7</sup>Vgl. Bassi/Embrechts/Kafetzaki [3], S. 123.

<sup>8</sup>Engl.: Tail Index.

<sup>9</sup>Engl.: Extremal Value Index.

<sup>10</sup>Vgl. McNeil/Saladin [48], S. 5.

<sup>11</sup>Vgl. Embrechts/Kluppelberg/Mikosch [16], S. 152.

## 5.2 Konvergenz der Exzeßverteilung

**Definition 5.2.1 (Exzeßverteilung)** Für ein fixes  $v < x_F := \sup \{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\} \leq \infty$ <sup>12</sup> ist

$$F^{v \rightarrow}(y) := F_{X-v|X>v}(y) = P(X - v \leq y \mid X > v) = \frac{P(v < X \leq v + y)}{P(X > v)}$$

die Exzeßverteilung der Zufallsvariablen  $X$  (bzw. der Verteilungsfunktion  $F$ ) über der Schwelle<sup>13</sup>  $v$ .<sup>14</sup>  $\square$

Die Exzeßverteilung<sup>15</sup> beschreibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Differenz  $X - v$  unter der Bedingung, daß  $X$  überhaupt ein Exzedent von  $v$  ist. Genau dann wird  $X - v$  als *Exzeß* bezeichnet und mit

$$Y = X - v \mid X > v$$

symbolisiert.<sup>16</sup>

**Definition 5.2.2 (Verallgemeinerte Pareto-Verteilung)** Die Verteilungsfunktion

$$G_\xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \cdot \frac{x - \mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x - \mu}{\sigma}), & \xi = 0 \end{cases}, \quad \sigma > 0$$

mit dem Träger

$$\mathcal{D}_{\xi, \mu, \sigma}^{GPD} := \begin{cases} x \geq \mu, & \xi \geq 0 \\ \mu \leq x < \mu - \frac{\sigma}{\xi}, & \xi < 0 \end{cases}$$

wird als verallgemeinerte Pareto-Verteilung<sup>17</sup> bezeichnet.<sup>18</sup>

**Satz 5.2.3 (Satz von Pickands-Balkema-de-Haan)**  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  ist genau dann erfüllt, wenn eine positive Lebesgue-messbare Funktion  $\sigma$  mit

$$(5.3) \quad \lim_{v \uparrow x_F} \sup_{0 \leq y < x_F - v} \left| F^{v \rightarrow}(y) - G_\xi \left( \frac{y}{\sigma(v)} \right) \right| = 0$$

existiert.<sup>19</sup>  $\square$

<sup>12</sup> $x_F$  ist also der rechte Endpunkt von  $F$ . Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 114 und McNeil/Saladin [48], S. 3.

<sup>13</sup>Engl.: Threshold.

<sup>14</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 160, Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 5 und McNeil/Saladin [48], S. 3.

<sup>15</sup>Engl.: Excess Distribution Function.

<sup>16</sup>Vgl. Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 5.

<sup>17</sup>Engl.: Generalized Pareto Distribution (GPD).

<sup>18</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 162.

<sup>19</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 165 und McNeil/Saladin [48], S. 3.



**Beweisskizze:** Auch hier soll lediglich eine Beweisskizze angebracht werden. Den vollständigen Beweis entnehme man z.B. de Haan [28].

Es kann gezeigt werden, daß aus  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  die Existenz einer positiven Lebesgue-meßbaren Funktion  $\sigma$  mit

$$(5.4) \quad \lim_{v \uparrow x_F} \frac{\overline{F}(\sigma(v) \cdot x + v)}{\overline{F}(v)} = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ \exp(-x), & \xi = 0 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_{\xi,0,1}^{GPD}$$

folgt.<sup>20</sup> Da

$$\frac{\overline{F}(\sigma(v) \cdot x + v)}{\overline{F}(v)} = P\left(\frac{X - v}{\sigma(v)} > x \mid X > v\right) = \overline{F}^{v \rightarrow}(\sigma(v) \cdot x),$$

ist die Konvergenzaussage (5.4) gleichbedeutend mit

$$\lim_{v \uparrow x_F} \overline{F}^{v \rightarrow}(\sigma(v) \cdot x) = \begin{cases} (1 + \xi x)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ \exp(-x), & \xi = 0 \end{cases}, \quad \forall x \in \mathcal{D}_{\xi,0,1}^{GPD}.$$

Wird  $\sigma(v) \cdot x$  durch  $y$  substituiert, so resultiert für  $\xi \neq 0$

$$\lim_{v \uparrow x_F} \left| \overline{F}^{v \rightarrow}(y) - \left(1 + \xi \cdot \frac{y}{\sigma(v)}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \right| = 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}_{\xi,0,\sigma(v)}^{GPD}$$

und für  $\xi = 0$

$$\lim_{v \uparrow x_F} \left| \overline{F}^{v \rightarrow}(y) - \exp\left(-\frac{y}{\sigma(v)}\right) \right| = 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}_{\xi,0,\sigma(v)}^{GPD}.$$

Allgemein gilt also

$$\lim_{v \uparrow x_F} \left| \overline{F}^{v \rightarrow}(y) - \overline{G}_\xi\left(\frac{y}{\sigma(v)}\right) \right| = \lim_{v \uparrow x_F} \left| F^{v \rightarrow}(y) - G_\xi\left(\frac{y}{\sigma(v)}\right) \right| = 0, \quad \forall y \in \mathcal{D}_{\xi,0,\sigma(v)}^{GPD}.$$

Da die verallgemeinerte Pareto-Verteilung absolut stetig ist, folgt daraus unmittelbar<sup>21</sup>

$$\lim_{v \uparrow x_F} \sup_{0 \leq y < x_F - v} \left| F^{v \rightarrow}(y) - G_\xi\left(\frac{y}{\sigma(v)}\right) \right| = 0,$$

was zu beweisen war. ■

Die Exzeßverteilung  $F^{v \rightarrow}$  konvergiert somit gegen die verallgemeinerte Pareto-Verteilung, wenn die Schwelle  $v$  gegen den rechten Endpunkt der Verteilung strebt und dabei der Skalenparameter  $\sigma$  in geeigneter Weise adjustiert wird.<sup>22</sup> Praktisch gesehen läßt sich somit die Exzeßverteilung  $F^{v \rightarrow}$  ab einer hinreichend hohen Schwelle  $u$  mit Hilfe eines geeigneten Skalenwerts  $\sigma(u)$  gut durch  $G_\xi(y/\sigma(u))$  approximieren:

$$(5.5) \quad F^{u \rightarrow}(y) \approx G_\xi\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right), \quad 0 \leq y < x_F - u, \quad u \text{ groß.}$$

<sup>20</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 159. Der Beweis ist recht anspruchsvoll. Man benötigt dabei bestimmte mathematische Methoden, die erst in den nachfolgenden Abschnitten erläutert werden.

<sup>21</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 552.

<sup>22</sup>Streng genommen handelt es sich jedoch nicht um eine schwache Konvergenz, denn die Grenzverteilung  $G_\xi(y/\sigma(v))$  in Formel (5.3) ist im Gegensatz zur Definition der schwachen Konvergenz (vgl. z.B. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 551f) nicht fix, sondern hängt vielmehr von  $v$  ab.

### 5.3 Exzeßmittelwertfunktion

#### 5.3.1 Definition und Bedeutung

**Definition 5.3.1 (Exzeßmittelwertfunktion)** Die Funktion

$$\mathcal{E}(v) = E(X - v \mid X > v), \quad v < x_F$$

wird als *Exzeßmittelwertfunktion*<sup>23</sup> (EMF) von  $X$  (bzw. von  $F$ ) bezeichnet.<sup>24</sup> □

$\mathcal{E}$  ordnet somit jeder Schwelle  $v$  den entsprechenden Exzeßmittelwert zu. Man spricht deswegen auch vom *Exzeßmittelwert über der Schwelle  $v$* . Dabei gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - v) \, dP(X \leq x \mid X > v) = \int_v^{+\infty} (x - v) \, d \frac{F(x) - F(v)}{\bar{F}(v)} \\ (5.6) \quad &= \int_0^{+\infty} y \, d \frac{F(v + y) - F(v)}{\bar{F}(v)} = \int_{-\infty}^{+\infty} y \, dF^{v \rightarrow}(y). \end{aligned}$$

Zur Ermittlung des Exzeßmittelwerts kann man also unmittelbar auf die Exzeßverteilung  $F^{v \rightarrow}$  zurückgreifen.

Das Grenzverhalten der EMF kann zu der folgenden Klassifikation von Verteilungsfamilien herangezogen werden:<sup>25</sup>

$\mathcal{E}(v) \rightarrow \infty, v \rightarrow x_F = \infty$	<i>heavy-/fat-/long-tailed</i> (z.B. Pareto-, Burr-, Loggamma-, Cauchy- und $t$ -Verteilung),
$\mathcal{E}(v) \rightarrow r \geq 0, \frac{d\mathcal{E}(v)}{dv} \rightarrow 0, v \rightarrow x_F \leq \infty$	<i>light-/thin-/medium-tailed</i> (z.B. Normal-, Exponential-, Gamma- und Lognormalverteilung),
$\mathcal{E}(v) \rightarrow 0, v \rightarrow x_F < \infty$	<i>light-/thin-/short-tailed</i> (z.B. Rechteck- und Betaverteilung).

Verteilungen mit stark ausgeprägten rechten Flanken weisen also einen Exzeßmittelwert auf, der mit fortschreitender Schwelle über alle Grenzen steigt, d.h. das Zentrum der Exzeßverteilung verlagert sich bildlich gesprochen immer weiter nach rechts. Für breitflankige Verteilungen gilt insbesondere  $x_F = \infty$ .<sup>26</sup>

Verteilungen, deren rechte Flanken nur schwach ausgeprägt sind, weisen hingegen einen Exzeßmittelwert auf, der mit fortschreitender Schwelle gegen Null strebt, denn alle Verteilungen dieser Kategorie besitzen einen endlichen rechten Endpunkt  $x_F$ .<sup>27</sup>

<sup>23</sup> Engl.: Mean Excess Function.

<sup>24</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 160 und 294 sowie Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 3.

<sup>25</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 138, Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 3f i.V.m. McNeil [46], S. 6 und McNeil/Saladin [48], S. 4f.

<sup>26</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 131.

<sup>27</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 134.

Der Exzeßmittelwert von Verteilungen mit mittelstark ausgeprägten rechten Flanken strebt gegen eine nichtnegative Konstante.<sup>28</sup> Dabei kann der rechte Endpunkt  $x_F$  endlich sein und der Exzeßmittelwert gegen Null konvergieren.<sup>29</sup> Im Gegensatz zum Fall schmaler Flanken konvergiert er dann jedoch asymptotisch gegen Null, denn  $d\mathcal{E}(v)/dv \rightarrow 0, v \rightarrow x_F$ .<sup>30</sup>

**Exkurs.** In Verbindung mit breiten Flanken tritt oft der Begriff der *Leptokurtosis* auf. Eine Verteilung ist leptokurtisch, d.h. sie besitzt eine schmale/spitze Wölbung<sup>31</sup> in der Umgebung des Mittelwerts, wenn ihre Kurtosis

$$\gamma := \frac{E\left((X - \mu)^4\right)}{\left(E\left((X - \mu)^2\right)\right)^2}$$

den Wert 3 übersteigt. In diesem Fall ist ihre Wölbung schmäler als die einer Normalverteilung.<sup>32</sup> Leptokurtische Verteilungen zeichnen sich in der Regel nicht nur dadurch aus, daß sie im Vergleich zur Normalverteilung mehr Wahrscheinlichkeitsmasse in der unmittelbaren Umgebung des Lagezentrums besitzen, sondern daß die Flanken dieser Verteilungen darüber hinaus übermäßig stark ausgeprägt sind.<sup>33</sup> Deswegen wird der Begriff *Leptokurtosis* oft benutzt, um insbesondere Fat Tails zu umschreiben.<sup>34</sup> Aber nicht jede leptokurtische Verteilung ist zugleich fat-tailed im Sinne der Extremwerttheorie.

Leider ist die Kurtosis einer Verteilung nicht immer endlich definiert. Darüber hinaus können sich bei der praktischen Ermittlung der Kurtosis Schwierigkeiten ergeben, denn der entsprechende Schätzer

$$\hat{\gamma} := \frac{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^4}{\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right)^2}$$

reagiert sehr sensibel auf Ausreißer.<sup>35</sup> Aus diesem Grunde sind Wölbungsmaße, die auf Quantilen basieren, etwas aussagekräftiger.<sup>36</sup>

$$(5.7) \quad \gamma' := \frac{F^{\leftarrow}(p_4) - F^{\leftarrow}(p_1)}{F^{\leftarrow}(p_3) - F^{\leftarrow}(p_2)},$$

mit

$$\begin{aligned} 0 < p_1 < p_2 < 0.5 < p_3 < p_4 < 1, \\ |p_2 - 0.5| &= |p_3 - 0.5|, \\ |p_1 - 0.5| &= |p_4 - 0.5|. \end{aligned}$$

○

<sup>28</sup>Der Spezialfall, in dem der Exzeßmittelwert selbst konstant ist (z.B. bei der Exponentialverteilung), wird also implizit berücksichtigt.

<sup>29</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 138.

<sup>30</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 142f.

<sup>31</sup>Griech.: „Lepto“ = schmal, „Kurtosis“ = Wölbung.

<sup>32</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 407. Leptokurtische Verteilungen besitzen also einen positiven Exzeß  $\gamma - 3$  (nicht zu verwechseln mit den Exzeßen über einer bestimmten Schwelle).

<sup>33</sup>Vgl. Eberlein/Keller [14], S. 6.

<sup>34</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 407.

<sup>35</sup>Vgl. Schmid/Trede [62], S. 24.

<sup>36</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 407 und Schmid/Trede [62], S. 24.

### 5.3.2 Beziehung zwischen der EMF und dem MDA

**Proposition 5.3.2** *Sei  $X$  verallgemeinert Pareto-verteilt mit den Parametern  $\xi < 1$ ,  $\mu = 0$  und  $\sigma > 0$ . Dann gilt<sup>37</sup>*

$$E(X) = \frac{\sigma}{1 - \xi}.$$

□

**Beweis:** Siehe die Beweisführung zu Satz 9.4.1. ■

**Satz 5.3.3** *Sei  $X$  verallgemeinert Pareto-verteilt mit den Parametern  $\xi < 1$ ,  $\mu = 0$  und  $\sigma > 0$ . Für die EMF von  $X$  gilt<sup>38</sup>*

$$\mathcal{E}(v) = \frac{\xi \cdot v + \sigma}{1 - \xi}, \quad v \in \mathbb{D}_{\xi,0,\sigma}^{GPD}.$$

□

**Beweis:** Es ist lediglich die Exzeßverteilung über der Schwelle  $v$  herzuleiten:

$$\begin{aligned} F^{v \rightarrow}(y) &= \frac{G_{\xi}\left(\frac{v+y}{\sigma}\right) - G_{\xi}\left(\frac{v}{\sigma}\right)}{\overline{G}_{\xi}\left(\frac{v}{\sigma}\right)} = \frac{\left(1 - \left(1 + \xi \cdot \frac{v+y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) - \left(1 - \left(1 + \xi \cdot \frac{v}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)}{\left(1 + \xi \cdot \frac{v}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} \\ &= \frac{\left(1 + \xi \cdot \frac{v}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} - \left(1 + \xi \cdot \frac{v+y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}}{\left(1 + \xi \cdot \frac{v}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}} = 1 - \left(\frac{1 + \xi \cdot \frac{v+y}{\sigma}}{1 + \xi \cdot \frac{v}{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{\left(1 + \xi \cdot \frac{v+y}{\sigma}\right) - \left(1 + \xi \cdot \frac{v}{\sigma}\right)}{1 + \xi \cdot \frac{v}{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = 1 - \left(1 + \frac{\xi \cdot \frac{y}{\sigma}}{1 + \xi \cdot \frac{v}{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}} \\ &= 1 - \left(1 + \xi \cdot \frac{y}{\xi \cdot v + \sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}} = G_{\xi}\left(\frac{y}{\xi \cdot v + \sigma}\right). \end{aligned}$$

Für den Fall  $\xi = 0$  gilt analog

$$\begin{aligned} F^{v \rightarrow}(y) &= \frac{G_{\xi}\left(\frac{v+y}{\sigma}\right) - G_{\xi}\left(\frac{v}{\sigma}\right)}{\overline{G}_{\xi}\left(\frac{v}{\sigma}\right)} = \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{v+y}{\sigma}\right)\right) - \left(1 - \exp\left(-\frac{v}{\sigma}\right)\right)}{\exp\left(-\frac{v}{\sigma}\right)} \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{v}{\sigma}\right) - \exp\left(-\frac{v+y}{\sigma}\right)}{\exp\left(-\frac{v}{\sigma}\right)} = 1 - \frac{\exp\left(-\frac{v+y}{\sigma}\right)}{\exp\left(-\frac{v}{\sigma}\right)} = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right) = G_{\xi}\left(\frac{y}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Die Exzeßverteilung einer verallgemeinert Pareto-verteilten Zufallsvariablen mit den Parametern  $\xi < 1$ ,  $\mu = 0$  und  $\sigma > 0$  ist somit wieder eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit den Parametern  $\xi$  (Gestalt),  $\mu$  (Lage) und  $\xi \cdot v + \sigma$  (Skala). In Verbindung mit Proposition 5.3.2 resultiert daraus unmittelbar Satz 5.3.3. ■

Es stellt sich anschließend die Frage, wie sich der Exzeßmittelwert nicht verallgemeinert Pareto-verteilter Zufallsvariablen entwickelt. Dazu folgende Definition.

<sup>37</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 165.

<sup>38</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 165.

**Definition 5.3.4** Die Funktion

$$(5.8) \quad \mathcal{E}_u(v) = E(Y - v \mid Y > v), \quad v < x_F - u,$$

mit

$$Y = X - u \mid X > u,$$

wird als EMF der Exzeße über  $u$  bezeichnet.  $\square$

Die EMF der Exzeße über  $u$  beschreibt also den mittleren Exzeß der Exzedenten von  $u$  über  $v$ .

**Satz 5.3.5** Es gilt

$$\mathcal{E}_u(v) = \mathcal{E}(u + v), \quad u < x_F, \quad v < x_F - u.$$

$\square$

**Beweis:** Aufgrund von

$$F_Y(y) = F_{X-u \mid X > u}(y) = F^{u \rightarrow}(y),$$

gilt für die EMF der Exzeße über  $u$

$$\mathcal{E}_u(v) = \int_v^{+\infty} (y - v) d \frac{F^{u \rightarrow}(y) - F^{u \rightarrow}(v)}{\overline{F}^{u \rightarrow}(v)} = \int_0^{+\infty} z d \frac{F^{u \rightarrow}(v + z) - F^{u \rightarrow}(v)}{\overline{F}^{u \rightarrow}(v)}.$$

Da laut Definition 5.2.1

$$\frac{F^{u \rightarrow}(v + z) - F^{u \rightarrow}(v)}{\overline{F}^{u \rightarrow}(v)} = \frac{\frac{F(u+v+z) - F(u)}{\overline{F}(u)} - \frac{F(u+v) - F(u)}{\overline{F}(u)}}{\frac{\overline{F}(u+v)}{\overline{F}(u)}} = \frac{F(u + v + z) - F(u + v)}{\overline{F}(u + v)}$$

gilt, ist

$$\mathcal{E}_u(v) = \int_0^{+\infty} z d \frac{F(u + v + z) - F(u + v)}{\overline{F}(u + v)} = \int_{-\infty}^{+\infty} z dF^{(u+v) \rightarrow}(z) = \mathcal{E}(u + v). \quad \blacksquare$$

Nun besagt aber der Satz von PICKANDS-BALKEMA-DE-HAAN, daß die Exzeßverteilung  $F^{u \rightarrow}(y)$  einer Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  ab einer hinreichend hohen Schwelle  $u$  durch die verallgemeinerte Pareto-Verteilung  $G_\xi(y/\sigma(u))$  approximiert werden kann. Der Exzeßmittelwert der Exzeße über  $u$  - also  $\mathcal{E}_u(v)$  - muß dann laut Satz 5.3.3 approximativ affiner Natur sein:

$$\mathcal{E}_u(v) \approx \frac{\xi \cdot v + \sigma(u)}{1 - \xi}, \quad v \in \mathbb{D}_{\xi, 0, \sigma(u)}^{GPD}.$$

In Verbindung mit Satz 5.3.5 erhält man

$$(5.9) \quad \mathcal{E}(u+v) \approx \frac{\xi \cdot v + \sigma(u)}{1-\xi}, \quad v \in \mathcal{D}_{\xi,0,\sigma(u)}^{GPD}.$$

Der Exzeßmittelwert einer Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  steigt also ab einer hinreichend hohen Schwelle  $u$  approximativ linear an, wobei die Approximation umso genauer ist, je höher die Schwelle  $u$  ist. Dieses wichtige Erkenntnis ist bei der praktischen Ermittlung des VaR von elementarer Bedeutung.

Ist  $\xi > 0$  (FRÉCHET-Fall), so gilt  $\mathcal{E}(u+v) \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow x_F - u = \infty$ . Der FRÉCHET-Fall vereinigt somit alle Verteilungsfamilien mit breiten rechten Flanken.

Für  $\xi < 0$  (WEIBULL-Fall) gilt hingegen  $\mathcal{E}(u+v) \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow x_F - u < \infty$ . Der Weibull-Fall steht also für alle Verteilungsfamilien mit schmalen rechten Flanken.

Für  $\xi = 0$  (GUMBEL-Fall) gilt schließlich  $\mathcal{E}(u+v) \approx \sigma(u) > 0$  ( $\forall v \geq 0$ ), wobei die Approximation umso genauer ist, je höher die Schwelle  $u$ . Der Exzeßmittelwert strebt in diesem Fall flach gegen eine nichtnegative Konstante.<sup>39</sup> Man erhält somit alle Verteilungsfamilien mit moderaten rechten Flanken.

## 5.4 Analytische Ermittlung des MDA

### 5.4.1 Fréchet-Fall

Die verallgemeinerte Extremwertverteilung  $H_\xi$  ( $\xi > 0$ ) mit Lageparameter 1 und Skalensparameter  $\xi$ , also

$$H_\xi\left(\frac{x-1}{\xi}\right) = \exp\left(-\left(1 + \xi \cdot \frac{x-1}{\xi}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) = \exp\left(-x^{-\frac{1}{\xi}}\right), \quad \xi > 0, \forall x > 0$$

wird gemeinhin als *Fréchet-Verteilung* bezeichnet.<sup>40</sup> Es wird jedoch  $\alpha := 1/\xi$  gesetzt und die Fréchet-Verteilung in Form von

$$\Phi_\alpha(x) = \exp(-x^{-\alpha}), \quad \alpha > 0, \forall x > 0$$

geschrieben.  $\alpha$  ist somit der Flankenindex von  $\Phi_\alpha$ .<sup>41</sup> Wenn  $\alpha > 0$  und

$$F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha) \equiv \text{MDA}\left(H_\xi\left(\frac{x-1}{\xi}\right)\right),$$

folgt aus Lemma 5.1.2  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  mit  $\xi > 0$ , indem man  $\mu_1 = 1$ ,  $\sigma_1 = \xi$ ,  $\mu_2 = 0$  und  $\sigma_2 = 1$  setzt. Damit gilt umgekehrt auch  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  ( $\xi > 0$ )  $\Rightarrow F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ). Folglich ist die Aussage  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) äquivalent mit der Aussage  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  ( $\xi > 0$ ), wobei  $\xi = 1/\alpha$ .

Es kann oft nachgewiesen werden, daß sich Randverteilungen von Logrenditen im MDA der Fréchet-Verteilung befinden.<sup>42</sup> Damit kommen für die Modellierung dieser Logrenditeverteilungen streng genommen lediglich Verteilungsfunktionen mit einem positiven Flankenindex  $1/\xi$  in Frage. Die Frage, welche theoretischen Eigenschaften Verteilungen dieses

<sup>39</sup>Dies schließt den Fall ein, daß der Exzeßmittelwert selbst konstant ist. Ist die Konstante gleich Null, so strebt der Exzeßmittelwert asymptotisch gegen Null.

<sup>40</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 121 und 130ff.

<sup>41</sup>Vgl. Abschnitt 5.1, S. 28.

<sup>42</sup>Siehe Anhang C.

Typs besitzen, kann auf der Grundlage einer Theorie beantwortet werden, die als *Regular Variation* bezeichnet wird und die in ihren Grundzügen im folgenden vorgestellt wird.<sup>43</sup>

**Definition 5.4.1 (Langsame Variation)** Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion  $L : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  variiert langsam auf  $\infty$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1, \quad \forall t > 0.$$

Man symbolisiert diesen Sachverhalt mit  $L \in \mathcal{R}_0$ .<sup>44</sup> □

Insbesondere variiert also jede konstante Funktion auf  $\mathbb{R}_+$  langsam auf  $\infty$ .

**Definition 5.4.2 (Gleichmäßige Variation)** Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  variiert gleichmäßig auf  $\infty$  mit dem Index  $\psi \in \mathbb{R}$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = t^\psi, \quad \forall t > 0.$$

Man symbolisiert diesen Sachverhalt mit  $h \in \mathcal{R}_\psi$ .<sup>45</sup> □

Eine langsam auf  $\infty$  variierende Funktion  $L$  variiert damit auch gleichmäßig auf  $\infty$  mit dem Index  $\psi = 0$ . Typische Beispiele für eine gleichmäßig mit dem Index  $\psi$  variierende Funktion sind alle Potenzfunktionen  $h(x) = x^\psi$  ( $\psi \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x > 0$ ).

**Definition 5.4.3 (Schnelle Variation)** Eine positive, Lebesgue-messbare Funktion  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  variiert schnell auf  $\infty$  mit dem Index  $-\infty$ , wenn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = \begin{cases} 0, & t > 1 \\ \infty, & 0 < t < 1 \end{cases}.$$

Man symbolisiert diesen Sachverhalt mit  $h \in \mathcal{R}_{-\infty}$ .<sup>46</sup> □

Charakteristischerweise konvergiert eine schnell (auf  $\infty$ )<sup>47</sup> variierende Funktion mit wachsender Geschwindigkeit gegen die Abszisse. Das betrifft etwa alle Exponentialfunktionen  $h(x) = a^{-x}$  ( $a > 0$ ) und insbesondere die EULERSCHE Exponentialfunktion  $\exp(-x)$ .

**Satz 5.4.4 (MDA der Fréchet-Verteilung)** Die Verteilungsfunktion  $F$  befindet sich genau dann im MDA der Fréchet-Verteilung  $\Phi_\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), wenn eine langsam variierende Funktion  $L$  existiert, womit<sup>48</sup>

$$\overline{F}(x) = x^{-\alpha} \cdot L(x), \quad x > 0.$$

In diesem Fall gilt

$$\frac{M_n}{F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})} \xrightarrow{d} \Phi_\alpha.$$

□

<sup>43</sup>Eine gute Einführung in diese Theorie findet man bei Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 564ff. Für ein profundes Studium eignet sich Bingham/Goldie/Teugels [6].

<sup>44</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 564.

<sup>45</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 564.

<sup>46</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 570.

<sup>47</sup>Im folgenden wird der Zusatz „auf  $\infty$ “ unterdrückt und stillschweigend vorausgesetzt.

<sup>48</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 131.

**Beweis:** Siehe Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 131f. ■

Eine Verteilungsfunktion befindet sich also genau dann im MDA der Fréchet-Verteilung, m.a.W. sie ist fat-tailed, wenn ihre Flanke mit wachsender Schwelle gegen das Potenzgesetz  $x^{-\alpha}$  <sup>49</sup> konvergiert.<sup>50</sup> Dies bekräftigt noch einmal, daß jede Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  einen unendlichen rechten Endpunkt  $x_F$  besitzt,<sup>51</sup> da laut Satz 5.4.4 notwendigerweise  $\bar{F}(x) > 0$  für alle  $x > 0$  gilt.

**Beispiel 5.4.1 (Pareto-Verteilung)** Seien  $\alpha, \kappa > 0$ . Die Flanke der Pareto-Verteilung lautet

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\kappa}{x}\right)^\alpha = \left(\frac{x}{\kappa}\right)^{-\alpha} = x^{-\alpha} \cdot \kappa^\alpha, \quad \forall x \geq \kappa.$$

Da  $\kappa^\alpha = \text{const.}$ , gilt  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow F \in \text{MDA}(H_{1/\alpha})$  ( $\alpha > 0$ ). ○

Die Funktion  $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} \cdot L(x)$  variiert im übrigen gleichmäßig mit dem Index  $-\alpha$ ,<sup>52</sup> denn

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{-\alpha} \cdot L(tx)}{x^{-\alpha} \cdot L(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(tx)^{-\alpha}}{x^{-\alpha}} = t^{-\alpha}.$$

Da  $x^\alpha \cdot \bar{F}(x) \in \mathcal{R}_0$ , wenn  $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ , gilt ebenfalls der Umkehrschluß, so daß sich feststellen läßt.<sup>53</sup>

$$F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha) \iff \bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}.$$

**Satz 5.4.5** Genau dann, wenn  $h \in \mathcal{R}_\psi$  ( $\psi \in \mathbb{R}$ ), existieren ein  $z > 0$  und zwei Lebesgue-messbare Funktionen  $\gamma$  und  $\delta$  mit den Eigenschaften  $\gamma(x) \rightarrow \gamma_0 > 0$  und  $\delta(x) \rightarrow \psi$ , womit für alle  $x \geq z$  gilt:<sup>54</sup>

$$h(x) = \gamma(x) \cdot \exp\left(\int_z^x \frac{\delta(u)}{u} du\right).$$

□

**Beweis:** Siehe Bingham/Goldie/Teugels [6]. ■

Allgemein hilfreich ist dabei das folgende Korollar.

**Korollar 5.4.6** Eine Funktion  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) \rightarrow r > 0$  variiert langsam auf  $\infty$ . □

**Beweis:** Man setze  $\gamma_0 \equiv r$ ,  $\gamma(x) \equiv f(x)$ ,  $\delta(x) = \psi = 0$  und wähle ein beliebiges  $z > 0$ . Aus Satz 5.4.5 folgt sofort  $f \in \mathcal{R}_0$ . ■

Gilt  $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} (r + o(1)) \cdot L(x)$  ( $r > 0$ ), so ist  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ , denn laut Korollar 5.4.6 gilt  $(r + o(1)) \in \mathcal{R}_0$  und damit auch  $(r + o(1)) \cdot L(x) \in \mathcal{R}_0$ .

<sup>49</sup> Engl.: Power Law.

<sup>50</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 131 und McNeil/Saladin [48], S. 4.

<sup>51</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 131.

<sup>52</sup> Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 132.

<sup>53</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 132.

<sup>54</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 566.



**Beispiel 5.4.2** Die von MANDELBROT und FAMA eingeführte Familie der  $\alpha$ -stabilen Verteilungen<sup>55</sup> erfüllt im Falle  $\alpha < 2$  die erwähnte Kondition.<sup>56</sup>

$$\overline{F}(x) = x^{-\alpha} (r + o(1)) \cdot L(x), \quad r > 0.$$

Somit ist  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  ( $\alpha \in ]0, 2[$ ).

**Satz 5.4.7** Seien  $\alpha, k > 0$  und eine Flanke  $\overline{F}$  mit der Eigenschaft

$$\overline{F}(x) \sim x^{-\alpha k} \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x)}{x^{-\alpha k}} = 1$$

gegeben. Dann gilt  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ . □

**Beweis:** Laut Korollar 5.4.6 gilt

$$L(x) := \frac{\overline{F}(x)}{x^{-\alpha k}} \in \mathcal{R}_0$$

und per definitionem  $\overline{F}(x) = x^{-\alpha k} \cdot L(x)$ . Da  $k \cdot L(x) \in \mathcal{R}_0$ , folgt aus Satz 5.4.4 unmittelbar  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ . ■

**Beispiel 5.4.3 (Studentsche  $t$ -Verteilung)** Sei  $n \in \mathbb{N}$  der Freiheitsgrad der  $t$ -Verteilung. Die Dichte der  $t$ -Verteilung ist

$$f(x) = \gamma_n \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

mit

$$\gamma_n := \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{n\pi}}.$$

Nach der Regel von DE L'HOSPITAL gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x)}{\gamma_n n^{\frac{n-1}{2}} x^{-n}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\gamma_n n^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{-(n+1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n+1}{2}} \cdot x^{-(n+1)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{n+1}{2}} x^{n+1}}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{n+1}{2}} x^{n+1}}{\left(\frac{x^2}{n} \left(\frac{n}{x^2} + 1\right)\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^{-\frac{n+1}{2}} x^{n+1}}{n^{-\frac{n+1}{2}} x^{n+1} \left(\frac{n}{x^2} + 1\right)^{\frac{n+1}{2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n}{x^2} + 1\right)^{\frac{n+1}{2}}} = 1. \end{aligned}$$

Es resultiert also  $\overline{F}(x) \sim x^{-n} \cdot \gamma_n n^{\frac{n-1}{2}}$ . Da  $n > 0$  und  $\gamma_n n^{\frac{n-1}{2}} > 0$ , folgt damit  $F \in \text{MDA}(\Phi_n) \Leftrightarrow F \in \text{MDA}(H_{1/n})$ . ○

<sup>55</sup>Eine detaillierte Erläuterung der stabilen Verteilungsfamilie erfolgt in Abschnitt 11.2.

<sup>56</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 75 i.V.m. S. 133. Man beachte, daß sich eine stabile Zufallsvariable per definitionem im  $\alpha$ -stabilen Anziehungsbereich befindet.

### 5.4.2 Gumbel-Fall

Die verallgemeinerte Extremwertverteilung  $H_\xi$  ( $\xi = 0$ ) mit Lageparameter 0 und Skalenparameter 1 ergibt die *Gumbel-Verteilung*

$$H_0(x) = \exp(-\exp(-x)) =: \Lambda(x).$$

Es gilt also per definitionem

$$F \in \text{MDA}(\Lambda) \quad :\Leftrightarrow \quad F \in \text{MDA}(H_0).$$

Die Gumbel-Verteilung kann als Grenzverteilung von  $H_\xi(x)$  für  $\xi \rightarrow 0$  interpretiert werden,<sup>57</sup> denn

$$\begin{aligned} H_\xi(x) &= \exp\left(-\left(1 + \xi x\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \\ &= \exp\left(-\underbrace{\left(\left(1 + \frac{x}{\xi^{-1}}\right)^{\xi^{-1}}\right)^{-1}}_{\rightarrow \exp(x)}\right) \rightarrow \exp(-\exp(-x)), \quad \xi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Der Gumbel-Fall erfaßt sehr viele bekannte Verteilungsfunktionen, z.B. die Normal-, Lognormal-, Gamma- und die Exponentialverteilung. Darüber hinaus gehören auch diverse Mischungsmodelle, etwa die gemischte Normalverteilung, dieser Kategorie an. Charakteristisch für alle  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$  ist, daß deren rechte Flanken gegen das EULERSCHE Exponentialgesetz konvergieren:<sup>58</sup>

**Definition 5.4.8 (Von-Mises-Funktion)** Sei  $F$  eine absolut stetige Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt  $x_F \leq \infty$ . Es existiere ein  $z < x_F$ , so daß

$$\bar{F}(x) = \gamma \cdot \exp\left(-\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt\right), \quad z < x < x_F,$$

wobei  $\gamma > 0$  und  $a$  eine positive, absolut stetige, Lebesgue-meßbare Funktion ist. Weiterhin sei  $a'$  die Ableitungsfunktion von  $a$  und es gelte  $a'(x) \rightarrow 0$ ,  $x \uparrow x_F$ . Die Verteilungsfunktion  $F$  wird als „Von-Mises-Funktion“ und  $a$  als „Hilfsfunktion“<sup>59</sup> bezeichnet.<sup>60</sup>

**Satz 5.4.9 (MDA der Gumbel-Verteilung)** Sei  $F$  eine Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt  $x_F \leq \infty$ .  $F$  befindet sich genau dann im MDA der Gumbel-Verteilung, wenn ein  $z < x_F$  existiert, womit<sup>61</sup>

$$\bar{F}(x) = \gamma(x) \cdot \exp\left(-\int_z^x \frac{1}{a(t)} dt\right), \quad z < x < x_F,$$

<sup>57</sup>Vgl. Bassi/Embrechts/Kafetzaki [3] S. 123 und Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 158.

<sup>58</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 138 i.V.m. S. 141.

<sup>59</sup>Engl.: Auxiliary Function.

<sup>60</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 138.

<sup>61</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 143.

wobei  $\gamma$  eine Lebesgue-meßbare Funktion mit  $\gamma(x) \rightarrow r > 0$ ,  $x \uparrow x_F$  ist. Für die Hilfsfunktion  $a$  und deren Ableitung  $a'$  gelten die Konditionen aus Definition 5.4.8. Als Hilfsfunktion kann dann die EMF

$$\mathcal{E}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\overline{F}(z)}{\overline{F}(x)} dz$$

verwendet werden und es gilt

$$\frac{M_n - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})}{a(F^{\leftarrow}(1 - n^{-1}))} \xrightarrow{d} \Lambda.$$

□

**Beweis:** Siehe Resnick [58]. ■

Der rechte Endpunkt  $x_F$  kann endlich oder unendlich sein.<sup>62</sup> Man erkennt, daß jede Von-Mises-Funktion  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ .<sup>63</sup> Zu der in Satz 5.4.9 verwendeten Version der EMF läßt sich folgendes anmerken:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x) &= \int_x^{+\infty} (z-x) d \frac{F(z) - F(x)}{\overline{F}(x)} = \frac{1}{\overline{F}(x)} \cdot \int_x^{+\infty} (x-z) d\overline{F}(z) \\ &= \frac{1}{\overline{F}(x)} \left( (x-z)\overline{F}(z) \Big|_x^{+\infty} + \int_x^{+\infty} \overline{F}(z) dz \right). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, daß für  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$  alle Momente der Zufallsvariablen endlich definiert sind, sofern sich die linke Flanke ebenfalls im MDA der Gumbel-Verteilung befindet.<sup>64</sup> Somit ist  $(x-z)\overline{F}(z) \Big|_x^{+\infty} = 0$  und folglich

$$\mathcal{E}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\overline{F}(z)}{\overline{F}(x)} dz.$$

**Beispiel 5.4.4 (Exponentialverteilung)** Die rechte Flanke der Exponentialverteilung ist

$$\overline{F}(x) = \exp(-\lambda x), \quad \lambda > 0, \forall x > 0.$$

Man erhält  $\overline{F}$ , indem man in Definition 5.4.8  $z = 0$ ,  $\gamma = 1$  und  $a(x) = 1/\lambda$  setzt.<sup>65</sup>  $F$  ist also eine Von-Mises-Funktion und somit gilt  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ . ○

Nun folgt ein sehr hilfreiches Kriterium für  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ .

<sup>62</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 138.

<sup>63</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 141.

<sup>64</sup> Siehe Abschnitt 5.5, S. 44. Der Grundgedanke ist, daß  $\overline{F}(z)$  schnell variiert ( $\overline{F} \in R_{-\infty}$ ), d.h. mit „wachsender Geschwindigkeit“ gegen Null konvergiert, während  $z$  gleichmäßig mit dem Index 1 variiert, also mit „konstanter Geschwindigkeit“ von Null divergiert.

<sup>65</sup>  $1/\lambda$  ist sowohl der Mittelwert der Exponentialverteilung, als auch der konstante Exzeßmittelwert.

**Satz 5.4.10** Sei  $F$  eine Verteilungsfunktion mit rechtem Endpunkt  $x_F \leq \infty$ . Es existiere ein  $z < x_F$ , so daß  $F$  zweimal differenzierbar auf  $]z, x_F[$  ist. Ferner gelte  $\forall x \in ]z, x_F[: f(x) := F'(x) > 0$  und  $f'(x) := F''(x) < 0$ . In diesem Fall ist  $F$  genau dann eine Von-Mises-Funktion mit Hilfsfunktion  $a = \overline{F}/f$ , wenn<sup>66</sup>

$$\lim_{x \uparrow x_F} \frac{\overline{F}(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = -1.$$

**Beispiel 5.4.5 (Normalverteilung)** Die Normalverteilung  $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$  besitzt einen unendlichen rechten Endpunkt  $x_F$ , ist zweimal differenzierbar auf  $]\mu, +\infty[$  und es gilt

$$\frac{d\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{dx} = \frac{\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\sigma} := \varphi(x \parallel \mu, \sigma) > 0,$$

sowie

$$\frac{d^2\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{dx^2} = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot \varphi(x \parallel \mu, \sigma) < 0$$

für alle  $x > \mu$ . Da

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{\Phi}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2} \cdot \varphi(x \parallel \mu, \sigma)\right)}{\varphi^2(x \parallel \mu, \sigma)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\overline{\Phi}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}{\frac{\sigma^2}{x-\mu} \cdot \varphi(x \parallel \mu, \sigma)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{-\varphi(x \parallel \mu, \sigma)}{-\left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)^2 \cdot \varphi(x \parallel \mu, \sigma) + \frac{\sigma^2}{x-\mu} \cdot \left(-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) \cdot \varphi(x \parallel \mu, \sigma)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\varphi(x \parallel \mu, \sigma)}{\left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)^2 \cdot \varphi(x \parallel \mu, \sigma) + \varphi(x \parallel \mu, \sigma)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{\left(\left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)^2 + 1\right) \cdot \varphi(x \parallel \mu, \sigma)}{\varphi(x \parallel \mu, \sigma)} \right)^{-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\left( \left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)^2 + 1 \right)^{-1} = -1, \end{aligned}$$

befindet sich die Normalverteilung im MDA der Gumbel-Verteilung, d.h.  $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \in \text{MDA}(\Lambda)$ . ○

### 5.4.3 Weibull-Fall

Für den Fall  $\xi < 0$  wird die verallgemeinerte Extremwertverteilung mit Lageparameter  $-1$  und Skalenparameter  $-\xi$ , also

$$\begin{aligned} H_\xi\left(\frac{x-(-1)}{-\xi}\right) &= \exp\left(-\left(1 + \xi \cdot \frac{x-(-1)}{-\xi}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right) \\ &= \exp\left(-(-x)^{-\frac{1}{\xi}}\right), \quad \xi < 0, \forall x < 0, \end{aligned}$$

<sup>66</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 140.

als *Weibull-Verteilung* bezeichnet, wobei nun  $-1/\xi$  durch den Parameter  $\alpha > 0$  substituiert wird:

$$\Psi_\alpha(x) = \exp(-(-x)^\alpha), \quad \alpha > 0, \quad \forall x < 0.$$

Für alle Verteilungen  $F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha)$  gilt  $x_F < \infty$ .<sup>67</sup> Diese theoretische Restriktion schließt den Weibull-Fall für logarithmierte Wertprozeße a priori aus, wenn freie Finanzmärkte unterstellt werden. In der Versicherungsmathematik werden Verlustverteilungen<sup>68</sup> ebenfalls ohne endlichen rechten Endpunkt modelliert, obwohl praktisch als obere Schranke der Gesamtwert aller versicherten Objekte eines Versicherungsunternehmens in Frage käme. Solche „imaginären“ Begrenzungen werden jedoch in der Regel ausgeblendet.<sup>69</sup>

**Satz 5.4.11 (MDA der Weibull-Verteilung)** Die Verteilungsfunktion  $F$  befindet sich genau dann im MDA der Weibull-Verteilung  $\Psi_\alpha$  ( $\alpha > 0$ ), wenn  $x_F < \infty$  und eine langsam variierende Funktion  $L$  existiert, womit<sup>70</sup>

$$\overline{F}(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha} \cdot L(x).$$

In diesem Fall gilt

$$\frac{M_n - x_F}{x_F - F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})} \xrightarrow{d} \Psi_\alpha.$$

□

**Beweis:** Siehe Resnick [58].

■

Folglich gilt<sup>71</sup>

$$F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha) \iff x_F < \infty \quad \wedge \quad \overline{F}(x_F - x^{-1}) \in \mathcal{R}_{-\alpha}.$$

**Beispiel 5.4.6 (Rechteckverteilung)** Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  die Grenzen einer Rechteckverteilung

$$F(x) = \frac{x - a}{b - a}, \quad a < b, \quad \forall x \in [a, b].$$

Damit gilt  $x_F = b < \infty$  und

$$\overline{F}(x_F - x^{-1}) = \frac{b - (b - x^{-1})}{b - a} = x^{-1} \cdot \frac{1}{b - a} \in \mathcal{R}_{-1}$$

und folglich  $F \in \text{MDA}(\Psi_1)$ .

○

<sup>67</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 134.

<sup>68</sup> Engl.: Loss Distributions.

<sup>69</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 136.

<sup>70</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 135.

<sup>71</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 136.

### 5.5 Existenz und Endlichkeit der Momente

**Definition 5.5.1 (Erwartungswert)** Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen  $X$  mit der Verteilungsfunktion  $F$  ist <sup>72</sup>

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF(x).$$

Der Erwartungswert „existiert“ oder „ist definiert“, wenn  $E(X^+)$  oder  $E(X^-)$  konvergiert. In diesem Fall gilt

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-).$$

Konvergieren gar  $E(X^+)$  und  $E(X^-)$ , d.h. konvergiert  $E(X)$  absolut, ist auch  $E(X)$  endlich definiert, formal:  $E(X) < \infty$ .<sup>73</sup> Divergiert hingegen sowohl  $E(X^+)$  als auch  $E(X^-)$ , so ist der Erwartungswert nicht definiert, d.h. man spricht ihm seine Existenz ab.<sup>74</sup>

**Definition 5.5.2 (Moment)** Das  $r$ -te (gewöhnliche) Moment einer Zufallsvariablen  $X$  mit der Verteilungsfunktion  $F$  ist

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r \, dF(x), \quad r \in \mathbb{N}.$$

**Proposition 5.5.3** Sei  $X$  eine nichtnegative Zufallsvariable mit der Flanke  $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ). Dann gilt <sup>75</sup>

$$\begin{aligned} E(X^r) &< \infty, & \forall r < \alpha, \\ E(X^r) &= \infty, & \forall r > \alpha. \end{aligned}$$

□

**Beweis:** Siehe Bingham/Goldie/Teugels [6]. ■

**Satz 5.5.4** Eine Zufallsvariable  $X$  mit der Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  besitzt kein endliches Moment der Ordnung  $r > \alpha$ . □

**Beweis:** Das  $r$ -te Moment ist laut Definition 5.5.2

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^0 x^r \, dF(x) + \int_0^{+\infty} x^r \, dF(x) = \int_{-\infty}^0 x^r \, dF(x) + \bar{F}(0) \cdot \int_0^{+\infty} y^r \, d \frac{F(y) - F(0)}{\bar{F}(0)}.$$

<sup>72</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 280.

<sup>73</sup>Manche Autoren machen die Existenz von  $E(X)$  bereits von seiner absoluten Konvergenz abhängig (z.B. Fisz [24], S. 87 und Schlittgen [59], S. 56). Die hier vorgestellte Definition ist etwas schwächer und läßt auch die Situation  $E(X) = \infty$  zu. Dieser Spezialfall ist ein ständiger Wegbegleiter der Wahrscheinlichkeits- und Extremwerttheorie.

<sup>74</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 280 und Fristedt/Gray [26], S. 45.

<sup>75</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 568. Man beachte, daß der Erwartungswert einer nichtnegativen Zufallsvariablen laut Definition 5.5.1 stets existiert. Vgl. Billingsley [5], S. 280.

Man beachte, daß  $\overline{F}(0) > 0$ , da  $x_F = \infty$ .  $(F(y) - F(0)) / \overline{F}(0)$  ( $y \geq 0$ ) ist die Exzeßverteilung über der Schwelle 0, also  $F^{0\rightarrow}(y)$ . Dementsprechend ist  $Y$  der Exzeß über 0 und damit eine nichtnegative Zufallsvariable. Damit gilt

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^0 x^r dF(x) + \overline{F}(0) \cdot \int_0^{+\infty} y^r dF^{0\rightarrow}(y) = \int_{-\infty}^0 x^r dF(x) + \overline{F}(0) \cdot E(Y^r).$$

Aus  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  und damit  $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$  folgt  $\overline{F}^{0\rightarrow} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ , denn

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}^{0\rightarrow}(ty)}{\overline{F}^{0\rightarrow}(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(ty) / \overline{F}(0)}{\overline{F}(y) / \overline{F}(0)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(ty)}{\overline{F}(y)} = t^{-\alpha}.$$

In Verbindung mit Proposition 5.5.3 resultiert daraus  $E(Y^r) = \infty$  für alle  $r > \alpha$ . Daraus folgt  $E(X^r) = \infty$  ( $\forall r > \alpha$ ), was zu beweisen war. ■

Es stellt sich die Frage nach der Endlichkeit der Momente von Verteilungsfunktionen  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ . Dazu folgende Proposition.<sup>76</sup>

**Proposition 5.5.5** *Sei  $x_F = \infty$ . Ist  $\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\infty}$ , so sind alle Momente  $E[(X^+)^r]$  der Ordnung  $r > 0$  endlich definiert.* □

**Beweis:** Siehe de Haan [27]. ■

Es kann gezeigt werden, daß  $F \in \text{MDA}(\Lambda) \Rightarrow \overline{F} \in \mathcal{R}_{-\infty}$  gilt.<sup>77</sup> Betrachtet man die Beweisführung zu Satz 5.5.4 i.V.m.

$$\overline{F} \in \mathcal{R}_{-\infty} \quad \Rightarrow \quad \overline{F}^{0\rightarrow} \in \mathcal{R}_{-\infty},$$

folgt aus Proposition 5.5.5 unmittelbar die Endlichkeit aller  $r$ -ten Momente  $E(Y^r)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ), falls man von  $x_F = \infty$  ausgeht. Damit hängt die Endlichkeit des Erwartungswertes  $E(X^r)$  nur noch vom asymptotischen Verhalten der linken Flanke der Verteilung ab. Konvergiert diese ebenfalls gegen das Eulersche Exponentialgesetz oder besitzt sie einen endlichen linken Endpunkt, so kann endgültig die Existenz und Endlichkeit aller  $r$ -ten Momente konstatiert werden.

Am Rande sei noch der Trivialfall  $x_F < \infty$  erwähnt. Es ist evident, daß in diesem Fall (falls die gerade erwähnten Konditionen bezüglich der linken Flanke erfüllt sind) alle  $r$ -ten Momente endlich sind.

<sup>76</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 148 i.V.m. S. 570.

<sup>77</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 148 i.V.m. S. 129.

## Kapitel 6

# Ansätze zur Ermittlung des Value-at-Risk

Das Ziel der VaR-Theorie ist die Ermittlung des bedingten VaR, also die Quantifizierung des akuten Marktrisikos eines Portefeuilles.<sup>1</sup> Dabei wird in der Regel von unabhängigen Logrenditen ausgegangen, womit der bedingte VaR mit dem unbedingten VaR übereinstimmt. Dies hat den entscheidenden Vorteil, daß der bedingte VaR somit anhand der empirischen Randverteilung der Logrendite, m.a.W. ihrer realisierten Zeitreihe, geschätzt werden kann.

Prinzipiell existieren drei Ansätze zur Ermittlung des VaR:

1. nonparametrische Methoden,
2. parametrische Methoden,
3. semiparametrische Methoden (Methoden der Extremwerttheorie).

Innerhalb eines jeden Ansatzes wird zusätzlich danach unterschieden, ob die Portefeuillewertveränderung als mittelbares Ergebnis einer multivariaten Veränderung bestimmter Risikofaktoren interpretiert wird, oder ob direkt die P&L-Verteilung betrachtet wird.

### 6.1 Nonparametrischer Ansatz

Die empirische Methode zur Ermittlung des VaR wird in der VaR-Literatur gemeinhin als *historische Simulation* bezeichnet.<sup>2</sup> Typischerweise wird dabei der vergangene Wertverlauf eines Portefeuilles simuliert, indem die in der Vergangenheit realisierten Verläufe der  $m$  Risikofaktoren  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  in die Wertfunktion

$$(6.1) \quad V = \sum_{k=1}^K a_k P_k(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$$

---

<sup>1</sup>Vgl. McNeil [46], S. 2.

<sup>2</sup>Vgl. Huschens [33] und Read [54].



eingesetzt werden.<sup>3</sup> Werden als Risikofaktoren lediglich die Wertpapierpreise selbst berücksichtigt, so vereinfacht sich Gleichung (6.1) zu

$$V = \sum_{k=1}^K a_k P_k,$$

d.h. betrachtet wird unmittelbar der in der Vergangenheit realisierte Wertverlauf des Portefeuilles.<sup>4</sup>

Der empirischen Methode liegt der fundamentale Satz von GLIVENKO-CANTELLI zugrunde.<sup>5</sup>

**Satz 6.1.1 (Satz von Glivenko-Cantelli)** Sei  $X_1, X_2, \dots, X_n$  eine einfache Zufallsstichprobe aus einer Zufallsvariablen  $X$  und  $\widehat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1_{X_i \leq x}$  deren empirische Verteilungsfunktion. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_n(x) - F(x) \right| \leq \varepsilon \right) = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

□

**Beweis:** Siehe Billingsley [5], S. 275f. ■

Der Satz von Glivenko-Cantelli besagt, daß sich die empirische Verteilungsfunktion mit wachsendem Stichprobenumfang immer mehr ihrem theoretischen Äquivalent anpaßt. Auf der Grundlage der empirischen Realisation einer theoretischen Verteilung läßt sich daher eine Quantilschätzung anhand der Ordnungsgrößen

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)} \equiv M_n$$

vornehmen.<sup>6</sup> Den  $\text{LogRaR}_p$  schätzt man z.B. durch:<sup>7</sup>

$$\widehat{\text{LogRaR}}_p := \widehat{F}_n^{\leftarrow}(1-p) = \begin{cases} X_{((1-p)n)}, & (1-p)n \in \mathbb{N}, \\ X_{\lceil (1-p)n \rceil + 1}, & \text{sonst.} \end{cases}, \quad 0 < p < 1.$$

Der VaR-Schätzer resultiert dann aus

$$\widehat{\text{VaR}}_p(v) = v \left( 1 - \exp \left( -\widehat{\text{LogRaR}}_p \right) \right), \quad v > 0.$$

Exakte verteilungsfreie Konfidenzintervalle für das  $(1-p)$ -Quantil lassen sich mittels der folgenden Wahrscheinlichkeitsformel für Ordnungsgrößen konstruieren:<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} P(X_{(j)} \leq F^{\leftarrow}(1-p) < X_{(k)}) &= \sum_{i=j}^{k-1} \binom{n}{i} (F(F^{\leftarrow}(1-p)))^i (1 - F(F^{\leftarrow}(1-p)))^{n-i} \\ &= \sum_{i=j}^{k-1} \binom{n}{i} (1-p)^i p^{n-i}, \quad 1 \leq j < k \leq n. \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Siehe Abschnitt 2.2, S. 8.

<sup>4</sup>Vgl. Huschens [33], S. 3.

<sup>5</sup>Vgl. Billingsley [5], S. 275 und Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 62 i.V.m. S. 553, die den Satz von Glivenko/Cantelli allerdings in seiner „starken Form“  $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \widehat{F}_n(x) - F(x) \right| \xrightarrow{a.s.} 0$  präsentieren. Daraus kann jedoch die obige „schwache Form“ abgeleitet werden.

<sup>6</sup>Manche Autoren bevorzugen eine umgekehrte Definition der Ordnungsgrößen:  $X_{(n)} \leq X_{(n-1)} \leq \dots \leq X_{(1)} \equiv M_n$  (z.B. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 182).

<sup>7</sup>Man beachte, daß die Stichprobenvariablen negativierte Logrenditen repräsentieren.

<sup>8</sup>Vgl. Bassi/Embrechts/Kafetzaki [3], S. 117.

Soll lediglich ein einseitiges Konfidenzintervall für den  $\text{LogRaR}_p$  ermittelt werden, so genügen schon die Formeln

$$\begin{aligned} P(X_{(j)} \leq F^{\leftarrow}(1-p)) &= \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} (F(F^{\leftarrow}(1-p)))^i (1 - F(F^{\leftarrow}(1-p)))^{n-i} \\ &= \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} (1-p)^i p^{n-i}, \quad 1 \leq j \leq n, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} P(X_{(k)} > F^{\leftarrow}(1-p)) &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (F(F^{\leftarrow}(1-p)))^i (1 - F(F^{\leftarrow}(1-p)))^{n-i} \\ (6.2) \quad &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (1-p)^i p^{n-i}, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned}$$

**Beispiel 6.1.1** Angenommen man möchte eine einseitige 0.95-Konfidenzobergrenze für den  $\text{LogRaR}_{0.05}$  ermitteln und man besitzt eine Stichprobe vom Umfang  $n = 1000$ . Der  $\text{LogRaR}$ -Schätzer ist somit  $\widehat{\text{LogRaR}}_{0.05} = X_{(950)}$  und es gilt

$$P(X_{(962)} > F^{\leftarrow}(0.95)) = \sum_{i=0}^{961} \binom{1000}{i} \cdot 0.95^i \cdot 0.05^{1000-i} = 0.95665.$$

Für  $X_{(961)}$  gilt lediglich

$$P(X_{(961)} > F^{\leftarrow}(0.95)) = \sum_{i=0}^{960} \binom{1000}{i} \cdot 0.95^i \cdot 0.05^{1000-i} = 0.94019,$$

so daß man die Ordnungsgröße  $X_{(962)}$  als Obergrenze für das 0.95-Quantil wählen wird, womit man ein Konfidenzniveau von 0.95665 realisiert. Das bedeutet, der tatsächliche  $\text{VaR}_{0.05}$  liegt mit „95%-Sicherheit“ unter dem Betrag

$$v(1 - \exp(-X_{(962)})), \quad v > 0,$$

wobei man für  $v$  den aktuellen Portefeuillewert einsetzt. ○

Es kann gezeigt werden, daß für eine stetige Dichtefunktion  $F' = f$  mit  $f(F^{\leftarrow}(1-p)) > 0$  gilt:<sup>9</sup>

$$(6.3) \quad \widehat{F}_n^{\leftarrow}(1-p) \rightsquigarrow N\left(F^{\leftarrow}(1-p), \frac{p(1-p)}{n \cdot f^2(F^{\leftarrow}(1-p))}\right), \quad n \text{ groß},$$

d.h. der  $\text{LogRaR}$ -Schätzer ist asymptotisch normalverteilt, wobei die Varianz mit steigendem Stichprobenumfang abnimmt. Dies hat zur Konsequenz, daß der  $\text{LogRaR}_p$  ab einem hinreichend hohen Stichprobenumfang gut mit der empirischen Methode geschätzt werden kann. Jedoch hängt die Varianz des Schätzers augenscheinlich von der Verteilungsdichte an der Stelle  $F^{\leftarrow}(1-p)$  ab. Je kleiner die Dichte (bei vorgegebenem Stichprobenumfang), desto größer ist die Varianz und somit das Risiko einer Fehleinschätzung des  $\text{LogRaR}_p$ . Dies soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden:

<sup>9</sup>Vgl. Bassi/Embrechts/Kafetzaki [3], S. 117.

**Beispiel 6.1.2** Man gehe von einem großen Stichprobenumfang aus. Angenommen die negativierte Logrendite ist normalverteilt mit den Parametern  $\mu = 0$  und  $\sigma = 0.01216$ . Das theoretische 0.95-Quantil beträgt damit  $0.01216 \cdot \Phi^{\leftarrow}(0.95) = 0.02$  und der LogRaR-Schätzer besitzt eine approximative Varianz von

$$\frac{0.05 \cdot 0.95}{n \cdot \varphi^2(0.2)} = \frac{0.0475}{n \cdot 8.48318^2} = \frac{0.00066}{n}.$$

Ist die negativierte Logrendite allerdings gemischt-normalverteilt

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \pi_i \Phi\left(\frac{x - \mu_i}{\sigma_i}\right), \quad \sigma_i, \pi_i > 0, \quad \sum_{i=1}^m \pi_i = 1, \quad m \in \mathbb{N},$$

mit den Parametern  $m = 2$ ,  $\pi_1 = 0.1$ ,  $\pi_2 = 0.9$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = 0.1$  und  $\sigma_2 = 0.00843$ , so beträgt das 0.95-Quantil ebenfalls 0.02, jedoch ist die Varianz des empirischen LogRaR-Schätzers nun mit

$$\frac{0.05 \cdot 0.95}{n \cdot f^2(0.2)} = \frac{0.0475}{n \cdot 2.94420^2} = \frac{0.00548}{n}$$

mehr als 8 mal so hoch, wie im Falle der einfachen Normalverteilung. Der Effekt kommt dadurch zustande, daß leptokurtische Verteilungen, wie z.B. die gemischte Normalverteilung, zwischen dem Zentrum und der Peripherie generell eine geringere Dichte aufweisen:

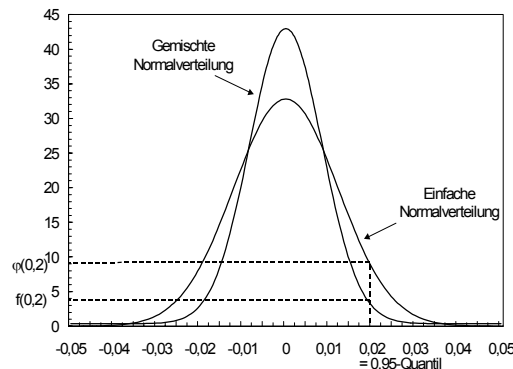


Abb. 2: Dichtevergleich einer einfachen mit einer gemischten Normalverteilung.

Um den Einfluß des Dichteeffektes auf die Schätzgüte zu überprüfen, kann z.B. die Frage gestellt werden, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Quantilschätzer eine Realisation im Bereich  $[0.019, 0.021]$  erfährt, d.h. daß das theoretische Quantil um maximal 0.1%-Punkte verfehlt wird,<sup>10</sup> wenn  $n = 1000$  ist. Im Fall der einfachen Normalverteilung beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit laut Formel (6.3):

$$P\left(0.019 \leq \widehat{F}_n^{\leftarrow}(1 - 0.05) \leq 0.021\right) \approx \Phi\left(\frac{0.021 - 0.02}{\sqrt{\frac{0.00066}{1000}}}\right) - \Phi\left(\frac{0.019 - 0.02}{\sqrt{\frac{0.00066}{1000}}}\right) = 0.78164.$$

<sup>10</sup>Man bedenke, daß es sich um Tagesrenditen handelt. Eine Realisation außerhalb des skizzierten Bereichs kann somit als „starke Fehleinschätzung“ interpretiert werden.

Die Wahrscheinlichkeit einer starken Fehleinschätzung ist approximativ  $1 - 0.78164 = 0.21836$  und damit relativ klein. Wird jedoch die gemischte Normalverteilung zugrundegelegt, so gilt

$$P\left(0.019 \leq \widehat{F}_n^{\leftarrow}(1 - 0.05) \leq 0.021\right) \approx \Phi\left(\frac{0.021 - 0.02}{\sqrt{\frac{0.00548}{1000}}}\right) - \Phi\left(\frac{0.019 - 0.02}{\sqrt{\frac{0.00548}{1000}}}\right) = 0.33075.$$

Die Wahrscheinlichkeit einer starken Fehleinschätzung ist nun approximativ  $1 - 0.33075 = 0.66925$  und damit relativ groß.  $\circ$

Die Wirkung der Verteilungsdichte an der Stelle des gesuchten Quantils wird durch das Quadrat im Nenner überproportional betont: Eine hypothetische Halbierung der Verteilungsdichte muß c.p. durch eine Vervierfachung des Stichprobenumfangs kompensiert werden. Die Flanke einer Zufallsvariablen  $X$  hat also einen maßgeblichen Einfluß auf die Schätzgüte, wobei gilt: Je breiter die Flanke, desto schlechter erfolgt die empirische Ermittlung der Quantile. Außerdem besteht bei der nonparametrischen Ermittlung extremer Quantile - womit alle  $(1 - p)$ -Quantile mit  $p < n^{-1}$  gemeint sind -<sup>11</sup> folgendes Problem:

**Beispiel 6.1.3** Der Stichprobenumfang sei  $n = 100$ . Es mögen der  $\text{LogRaR}_{0.001}$  und eine entsprechende einseitige Obergrenze auf einem möglichst hohen Konfidenzniveau geschätzt werden. Für die Schätzung des  $\text{LogRaR}_{0.001}$  wird also das Stichprobenmaximum  $M_{100}$  herangezogen. Mithin dient  $M_{100}$  gewißermaßen als „Universalschätzer“ für alle  $\text{LogRaR}_p$  mit  $p < 1/100$ . Für die Ermittlung der Obergrenze muß ebenfalls auf das Stichprobenmaximum zurückgegriffen werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß der  $\text{LogRaR}$  unter dem realisierten Stichprobenmaximum liegt, beträgt aber lediglich

$$P(M_{100} > F^{\leftarrow}(0.999)) = \sum_{i=0}^{99} \binom{100}{i} \cdot 0.999^i \cdot 0.001^{100-i} = 0.09521.$$

Diese ist damit inakzeptabel gering und es ist zu vermuten, daß sich das 0.999-Quantil über dem realisierten Stichprobenmaximum befindet.  $\circ$

Die empirische Methode produziert bei einem hinreichend großen Stichprobenumfang gute Quantilschätzungen. Es stellt sich jedoch die Frage, wie klein  $p$  bei vorgegebenem  $n$  sein darf, damit die empirische Schätzung noch erfolgreich ist. Geht man von dem Stichprobenumfang  $n = 100$  aus, so nimmt Formel (6.2) die folgenden Werte an:

$n = 100$	$p = 0.01$	$p = 0.02$	$p = 0.03$	$p = 0.04$	$p = 0.05$
$M_{100}$	.63397	.86738	.95245	.98313	.99408
$X_{(99)}$	.26424	.59673	.80538	.91284	.96292
$X_{(98)}$	.07937	.32331	.58022	.76786	.88174
$X_{(97)}$	.01837	.14104	.35275	.57052	.74216
$X_{(96)}$	.00343	.05083	.18215	.37114	.56402
$X_{(95)}$	.00053	.01548	.08084	.21163	.38400

Tab. 1: Wahrscheinlichkeiten für die Überschreitung des  $\text{LogRaR}_p$  ( $n = 100$ ).

<sup>11</sup>Vgl. Bassi/Embrechts/Kafetzaki [3], S. 118.

Das Stichprobenmaximum  $M_{100}$  stellt also keine gute Obergrenze für den  $\text{LogRaR}_{0.01}$  dar, denn die Wahrscheinlichkeit einer Fehleinschätzung beträgt immerhin  $1 - 0.63397 = 0.36603$ . Dafür stellt  $M_{100}$  aber eine gute Obergrenze für den  $\text{LogRaR}_{0.03}$  dar, die Wahrscheinlichkeit einer Fehleinschätzung ist lediglich  $1 - .95245 = 0.04755$ . Soll der  $\text{LogRaR}_{0.05}$  geschätzt werden, genügt als Obergrenze schon die zweithöchste Ordnungsgröße  $X_{(99)}$  und es wird ein Konfidenzniveau von 0.96292 realisiert. Darüber hinaus erhält man mit  $[X_{(91)}, M_{100}]$  ein 0.96589-Konfidenzintervall für den  $\text{LogRaR}_{0.05}$ , denn

$$P(X_{(91)} \leq F^{\leftarrow}(1 - \alpha) < M_{100}) = \sum_{i=91}^{99} \binom{100}{i} \cdot 0.95^i \cdot 0.05^{100-i} = 0.96589.$$

In praxi verfügt man im Bereich der empirischen Kapitalmarktforschung über ein beachtliches Datenvolumen; in der Regel gilt  $n > 100$ . In anderen Fachbereichen kann sich jedoch durchaus die Situation  $n \leq 100$  ergeben. In der Hydrologie z.B. wird versucht, das Risiko einer Hochwasserkatastrophe mit Hilfe extremwerttheoretischer Methoden zu quantifizieren.<sup>12</sup> Um nicht jahreszeitlichen Schwankungen und seriellen Korrelationen Rechnung tragen zu müssen, wird auf die in der Vergangenheit realisierten Jahreshöchststände zurückgegriffen. Daraus läßt sich das mögliche Ausmaß der nächsten Hochwasserkatastrophe ableiten. Die Datenbestände sind somit aber naturgemäß gering und erreichen bei weitem nicht die in der empirischen Kapitalmarktforschung gewohnten Volumina.

Geht man darum von einem Stichprobenumfang  $n = 1000$  aus, so ergeben sich die folgenden Werte:

$n = 1000$	$p = 0.01$	$p = 0.02$	$p = 0.03$	$p = 0.04$	$p = 0.05$
$M_{1000}$	.99996	1	1	1	1
$X_{(999)}$	.99952	1	1	1	1
$X_{(998)}$	.99732	1	1	1	1
$X_{(997)}$	.98993	1	1	1	1
$X_{(996)}$	.97131	.99999	1	1	1
$X_{(995)}$	.93386	.99994	1	1	1

$n = 1000$	$p = 0.01$	$p = 0.02$	$p = 0.03$	$p = 0.04$	$p = 0.05$
$X_{(965)}$	0	.00070	.15392	.76255	.98578
$X_{(964)}$	0	.00036	.11618	.70808	.97885
$X_{(963)}$	0	.00018	.08576	.64894	.96934
$X_{(962)}$	0	.00009	.06192	.58650	.95665
$X_{(961)}$	0	.00003	.04373	.52232	.94019
$X_{(960)}$	0	.00002	.03022	.45807	.91936

Tab. 2: Wahrscheinlichkeiten für die Überschreitung des  $\text{LogRaR}_p$  ( $n = 1000$ ).

Das Stichprobenmaximum  $M_{1000}$  ist in diesem Fall eine „sichere“ Obergrenze für den  $\text{LogRaR}_{0.01}$ , denn das Konfidenzniveau beträgt 0.99996. Um jedoch nicht allzu viel empirische Information zu ignorieren, sollte eher  $X_{(996)}$  oder gar  $X_{(995)}$  als 0.97131- bzw. 0.93386-Konfidenzobergrenze gewählt werden. Ein adäquates 0.94492-Konfidenzintervall ist mit  $[X_{(984)}, X_{(996)}]$  gegeben:

$$P(X_{(984)} \leq F^{\leftarrow}(0.99) < X_{(996)}) = \sum_{i=984}^{995} \binom{1000}{i} \cdot 0.99^i \cdot 0.01^{1000-i} = 0.94492.$$

<sup>12</sup>Vgl. Reiss/Thomas [57], S. 97 i.V.m. S. 223.

Soll der  $\text{LogRaR}_{0.05}$  geschätzt werden, so genügt als Obergrenze schon  $X_{(962)}$  und es wird ein Konfidenzniveau von 0.95665 realisiert.<sup>13</sup> Außerdem erhält man mit  $[X_{(937)}, X_{(963)}]$  ein 0.94091-Konfidenzintervall für den  $\text{LogRaR}_{0.05}$ :

$$P(X_{(937)} \leq F^{\leftarrow}(0.95) < X_{(963)}) = \sum_{i=937}^{962} \binom{1000}{i} \cdot 0.95^i \cdot 0.05^{1000-i} = 0.94091.$$

Der  $\text{LogRaR}_{0.05}$  läßt sich auf nonparametrische Weise also schon sehr genau lokalisieren, wenn man sich vor Augen hält, daß bei  $n = 1000$  im Durchschnitt 10-mal mehr Stichprobenrealisationen innerhalb eines beliebigen reellen Zahlenintervalls eintreffen, als bei  $n = 100$ . Das Konfidenzintervall  $[X_{(937)}, X_{(963)}]$  für  $n = 1000$  ist somit vergleichbar mit dem Konfidenzintervall  $[X_{(937/10)}, X_{(963/10)}] = [X_{(94)}, X_{(96)}]$  für  $n = 100$ . Zu bedenken ist jedoch, daß die realisierte Konfidenzintervallbreite in den Flanken tendenziell umso höher ist, je leptokurtischer die zugrundeliegende Verteilung ist, da laut Formel (6.3) die Varianz der Ordnungsgrößen mit steigender Kurtosis zunimmt. Somit führen Konfidenzintervalle mit extremen Ober- und Untergrenzen im Falle leptokurtischer Verteilungen unter Umständen zu keinem großen Erkenntnisgewinn.

Zusammenfassend läßt sich festhalten: Die empirische Methode führt lediglich zu guten Ergebnissen, wenn

1. ein hinreichend großer Stichprobenumfang  $n \geq 1000$  vorliegt,<sup>14</sup>
2. ein moderates  $(1 - p)$ -Quantil gesucht wird,<sup>15</sup> d.h.  $0.01 \leq p \leq 0.05$
3. und die zugrundeliegende Verteilung nicht leptokurtisch ist, wobei als Kriterium etwa der Wölbungsschätzer<sup>16</sup>

$$\widehat{\gamma}_n := \frac{\widehat{F}_n^{\leftarrow}(p_4) - \widehat{F}_n^{\leftarrow}(p_1)}{\widehat{F}_n^{\leftarrow}(p_3) - \widehat{F}_n^{\leftarrow}(p_2)}$$

verwendet werden kann. Ist die Wölbung z.B. stärker als die einer Normalverteilung, so ist zu prüfen, wie exakt sich das gesuchte  $(1 - p)$ -Quantil im konkreten Fall eingrenzen läßt.

Selbstredend stellen die aufgezählten Kriterien lediglich Faustregeln dar. Generell gilt: Je höher der Stichprobenumfang, desto kleiner darf  $p$  und desto leptokurtischer darf die zugrundeliegende Verteilung sein. Umgekehrt gilt jedoch: Je geringer der Stichprobenumfang, desto größer muß  $p$  und desto kleiner muß die Kurtosis der Verteilung sein.

## 6.2 Parametrischer Ansatz

Mit dem parametrischen Ansatz werden in der Regel bestimmte Risikofaktoren  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$  betrachtet und es wird grundsätzlich davon ausgegangen, daß diese multivariat normalverteilt sind.<sup>17</sup> Wenn die in Abschnitt 2.2 angesprochenen Konditionen bezüglich der

<sup>13</sup>Vgl. Beispiel 6.1.1 auf S. 47.

<sup>14</sup>Vorsicht ist also bei einem Portefeuille mit Neuemissionen oder vergleichbar jungen Wertpapieren geboten.

<sup>15</sup>Es handelt sich damit um den in Abschnitt 4.1.2 auf S. 21 zitierten „Normalfall“.

<sup>16</sup>Vgl. Formel (5.7) auf S. 32.

<sup>17</sup>Vgl. Jorion [36], S. 186 und Read [56], S. 46. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *Faktor-Normal-Methode* (vgl. Zagst [66], S. 12).

Portfeuillekomponenten erfüllt sind,<sup>18</sup> ist die Berücksichtigung von Risikofaktoren allerdings überflüssig. In diesem Fall genügt bereits eine Fokussierung auf den (logarithmierten) Portfeuillewert.<sup>19</sup> Dabei wird oft von normalverteilten absoluten Portfeuillewertveränderungen ausgegangen. Diese vereinfachende Annahme muß jedoch angesichts der in Abschnitt 3.3.1 gewonnenen Erkenntnisse abgelehnt werden. Werden hingegen normalverteilte Logrenditen angenommen, so steht dies im Widerspruch zu den bereits erwähnten Stylized Facts. Dies läßt sich besonders gut mit einem *QQ-Plot* überprüfen, wobei als theoretische Verteilung die Normalverteilung herangezogen wird.

**Exkurs.** Der *QQ-Plot* trägt die empirischen Quantile gegen die Quantile einer theoretisch vorgegebenen Verteilungsfunktion auf.<sup>20</sup> Wenn das gewählte Modell mit dem empirischen Befund übereinstimmt, so streuen die Datenpunkte der empirischen Verteilungsfunktion bei einem hinreichend großen Stichprobenumfang um die Winkelhalbierende. Falls man sich lediglich hinsichtlich der Lage- und Skalenparameter geirrt hat, streuen die Datenpunkte immer noch um eine Gerade, wobei sich die LS-Parameter durch Ordinatenabschnitt und Steigungskoeffizient der Geraden grob abschätzen lassen. Die Schätzwerte sind in der Regel gute Anfangswerte für numerische Näherungsverfahren, etwa im Rahmen der ML-Schätzung. ○

**Beispiel 6.2.1** Eine Analyse des US-Börsenbarometers Dow Jones Industrial Index (Dow-Jones) ergab für die logarithmierte handelstägliche Wertveränderung folgenden *QQ-Plot*:<sup>21</sup>

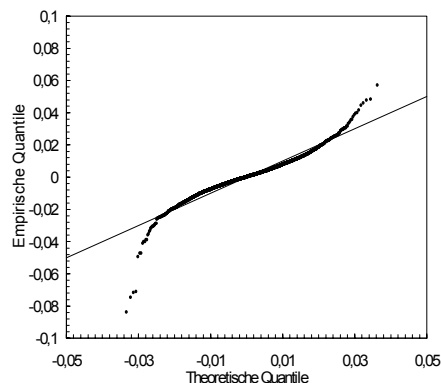


Abb. 3: Dow-Jones-*QQ-Plot* auf Basis der Normalverteilung.

Hierbei wurden die theoretischen Quantile durch eine Normalverteilung mit den Parametern  $\hat{\mu}_{ML} = 0.0005$  und  $\hat{\sigma}_{ML} = 0.01$  abgebildet, wobei  $\hat{\mu}_{ML}$  und  $\hat{\sigma}_{ML}$  die realisierten ML-Schätzwerte für Lage und Skala der Verteilung repräsentieren. Es ist deutlich zu erkennen, daß die *N-Hypothese* mit der wirklichen Randverteilung von Logrenditen unvereinbar ist, wenn der Markt für US-amerikanische Blue Chips zugrundelegt wird. ○

Eine alternative Verteilungsannahme für die kurzfristige Logrendite ist z.B. die gemischte

<sup>18</sup> Insbesondere dürfen die Portfeuillekomponenten keinen Verfalltag und keinen Referenzwert aufweisen.

<sup>19</sup> Vgl. Huschens [33], S. 3 und S. 46 der vorliegenden Arbeit. Diese Vorgehensweise bezeichnet man als *Portfolio-Normal-Methode* (vgl. Zagst [66], S. 10).

<sup>20</sup> Vgl. Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 3.

<sup>21</sup> Erhebungszeitraum: 02.01.1980 bis 02.07.1998, Stichprobenumfang: 4678 Logrenditen. Man beachte, daß der Dow-Jones ein Performanceindex ist.

Normalverteilung<sup>22</sup>

$$\Phi_m(x \parallel \mu, \sigma, \pi) := \sum_{j=1}^m \pi_j \Phi\left(\frac{x - \mu_j}{\sigma_j}\right), \quad \sigma_j, \pi_j > 0, \quad \sum_{j=1}^m \pi_j = 1, \quad m \in \mathbb{N},$$

welche im Vergleich zur einfachen Normalverteilung die Stylized Facts gut wiedergibt.<sup>23</sup> Für die Schätzung der Parameter  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)'$ ,  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)'$ ,  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_{m-1})'$  gibt es verschiedene Methoden.<sup>24</sup> Eine mit Hilfe gängiger numerischer Algorithmen besonders einfache Schätzmethode ist die Kleinste-Quadrate-(KQ-)Methode:

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{i}{n} - \Phi_m(x_{(i)} \parallel \mu, \sigma, \pi) \right)^2 \longrightarrow \min_{\mu, \sigma, \pi}!$$

**Beispiel 6.2.2** Eine Anpassung der gemischten Normalverteilung mit  $m = 3$  Komponenten an die Daten aus Beispiel 6.2.1 führte zu folgendem QQ-Plot:

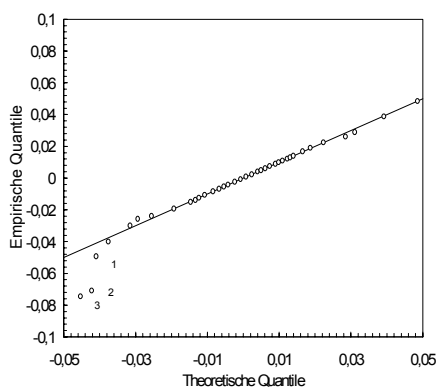


Abb. 4: Dow-Jones-QQ-Plot auf Basis einer gemischten Normalverteilung.

Dabei wurden mit der KQ-Methode folgende Schätzwerte ermittelt:  $\hat{\pi}_1 = 0.752$ ,  $\hat{\pi}_2 = 0.144$ , ( $\hat{\pi}_3 = 0.104$ ),  $\hat{\mu}_1 = 0.00063$ ,  $\hat{\mu}_2 = 0.00045$ ,  $\hat{\mu}_3 = 0.00035$ ,  $\hat{\sigma}_1 = 0.00745$ ,  $\hat{\sigma}_2 = 0.01750$  und  $\hat{\sigma}_3 = 0.00295$ . Die gemischte Normalverteilung lässt sich deutlich besser an die empirische Verteilung der Logrenditen anpassen, als die einfache Normalverteilung.<sup>25</sup> Sie ist somit besser geeignet, die erwähnten Stylized Facts wiederzugeben. Es existieren allerdings immer noch wenige Ausreißer (Punkte 1, 2 und 3), die mit dem gemischten Normalverteilungsmodell nicht erklärt werden können. ○

Wird der  $\text{LogRaR}_{0.05}$  anhand der in Beispiel 6.2.2 ermittelten Schätzwerte geschätzt, so resultiert<sup>26</sup>

$$\widehat{\text{LogRaR}}_{0.05} = -\Phi_3^{\leftarrow}(0.05 \parallel \hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\pi}) = 0.01377.$$

Für den  $\text{LogRaR}_{0.01}$  resultiert hingegen den Schätzwert

$$\widehat{\text{LogRaR}}_{0.01} = -\Phi_3^{\leftarrow}(0.01 \parallel \hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\pi}) = 0.02560.$$

<sup>22</sup>Vgl. Abschnitt 6.1, S. 48.

<sup>23</sup>Vgl. Schmid/Stich [61], S. 280.

<sup>24</sup>Für gemischte Verteilungen ist generell der Expectation-Maximization-(EM-)Algorithmus weit verbreitet. Vgl. McLachlan/Basford [45], S. 13ff i.V.m. S. 37ff und Schmid/Stich [61], S. 274.

<sup>25</sup>Für die 30 DAX-Aktien fanden Schmid und Stich ähnliche Resultate. Vgl. Schmid/Stich [61], S. 278ff.

<sup>26</sup>Die Quantile müssen numerisch ermittelt werden.



Andererseits kommt man mit der empirischen Methode zu den Schätzwerten

$$\widehat{\text{LogRaR}}_{0.05} = \widehat{F}_{4678}^{\leftarrow} (1 - 0.05) = x_{(4445)} = 0.01412$$

und

$$\widehat{\text{LogRaR}}_{0.01} = \widehat{F}_{4678}^{\leftarrow} (1 - 0.01) = x_{(4632)} = 0.02384.$$

Das asymptotische 0.95583-Konfidenzintervall für den  $\text{LogRaR}_{0.05}$  ist  $[X_{(4415)}, X_{(4475)}]$ , denn laut dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\begin{aligned} P(X_{(4415)} \leq F^{\leftarrow}(0.95) < X_{(4475)}) &= \sum_{i=4415}^{4474} \binom{4678}{i} \cdot 0.95^i \cdot 0.05^{4678-i} \\ &= \sum_{i=0}^{4474} \binom{4678}{i} \cdot 0.95^i \cdot 0.05^{4678-i} - \sum_{i=0}^{4414} \binom{4678}{i} \cdot 0.95^i \cdot 0.05^{4678-i} \\ &\approx \Phi\left(\frac{4474 - 4678 \cdot 0.95}{\sqrt{4678 \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) - \Phi\left(\frac{4414 - 4678 \cdot 0.95}{\sqrt{4678 \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) = 0.95583. \end{aligned}$$

Die vorliegende Realisation des Konfidenzintervalls

$$[x_{(4415)}, x_{(4475)}] = [0.01338, 0.01492]$$

grenzt den tatsächlichen  $\text{LogRaR}_{0.05}$  also schon sehr genau ein. Für den  $\text{LogRaR}_{0.01}$  erhält man analog das 0.95148-Konfidenzintervall  $[X_{(4618)}, X_{(4645)}]$  und seine Realisation

$$[x_{(4618)}, x_{(4645)}] = [0.02245, 0.02506].$$

Interessant ist die Frage, ob die gemischte Normalverteilung ein geeignetes Modell für kurzfristige Logrenditen ist.<sup>27</sup> Intuitiv würde man zweifelsohne die gemischte Normalverteilung gegenüber der einfachen Normalverteilung bevorzugen. Aus Sicht der Extremwerttheorie muß man jedoch feststellen, daß die gemischte Normalverteilung ebenso wie die einfache Normalverteilung gar keine Fat Tails besitzt, sondern lediglich medium-tailed ist, denn die rechte Flanke der gemischten Normalverteilung konvergiert mit steigender Schwelle gegen das EULERSCHE Exponentialgesetz.<sup>28</sup> Somit gilt  $\Phi_m(x \parallel \mu, \sigma, \pi) \in \text{MDA}(\Lambda)$  und nach der Approximationsformel (5.9) müßte somit eine hinreichend hohe Schwelle existieren, ab der der Exzeßmittelwert der gemischten Normalverteilung ein konstantes Niveau annimmt. Dies kann anhand des folgenden simulierten ME-Plots der gemischten Normalverteilung belegt werden:<sup>29</sup>

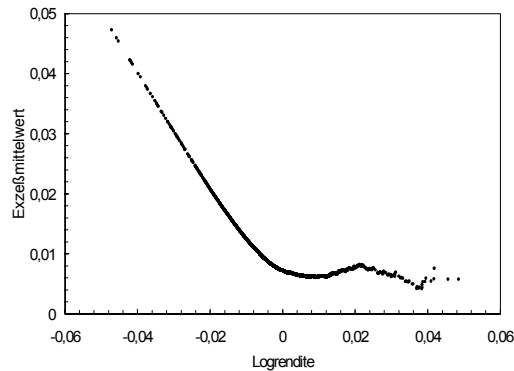


Abb. 5: Simulierter ME-Plot einer gemischten Normalverteilung.

<sup>27</sup> Vgl. Fielitz/Rozelle [23] und Schmid/Stich [61].

<sup>28</sup> Vgl. Abschnitt 5.4.2, S. 39.

<sup>29</sup> Bezüglich der partiellen Volatilitäten wurden die Parameterdaten aus Beispiel 6.2.2 verwendet. Die partiellen Mittelwerte wurden hingegen gleich Null gesetzt.

### 6.3 Semiparametrischer Ansatz

Der Vorteil nonparametrischer, also verteilungsfreier Methoden ist, daß man bezüglich des Verteilungsgesetzes der Logrendite keine Informationen besitzen muß. Somit sind die so erzeugten Schätzungen robust hinsichtlich einer Fehleinschätzung des „wirklichen“ Bildungsgesetzes von Logrenditen. Dieser Vorteil wird allerdings mit dem Nachteil erkauft, daß verteilungsfreie Schätzungen den gesuchten VaR relativ ungenau eingrenzen. Glaubt man jedoch, die Verteilungsfamilie von Logrenditen zu kennen, wird man diesen Informationsgewinn nutzen, indem man spezielle, auf die vorgegebene Verteilungsfamilie zugeschnittene, statistische Inferenzverfahren verwendet. Wenn das gewählte Verteilungsmodell allerdings nicht (annähernd) zutrifft, können die ermittelten Ergebnisse nur als provisorische Richtwerte angesehen werden. Je stärker das gewählte Verteilungsmodell dabei von der „Wirklichkeit“ abweicht, desto verzerrter ist die Schätzung des VaR, was zu einer ernsthaften Unterschätzung des Marktrisikos führen kann.

Um einerseits die Gefahr einer starken Unterschätzung des Marktrisikos zu minimieren und andererseits nicht gänzlich auf Informationen über das Bildungsgesetz von Logrenditen zu verzichten, bietet sich ein semiparametrischer Mittelweg an: Man akzeptiert die so oft zitierten Stylized Facts der empirischen Kapitalmarktforschung, also unter anderem die Tatsache, daß kurzfristige Logrenditen eine leptokurtische Randverteilung und Fat Tails aufweisen und sucht im Rahmen dieser Erkenntnis nach geeigneten Methoden, den VaR zu ermitteln. Mit Hilfe der Extremwerttheorie lassen sich jene Verteilungsfamilien selektieren, die für die Belange des finanzwirtschaftlichen Risikomanagements überhaupt in Frage kommen. Namentlich handelt es sich um alle Verteilungen  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  mit  $\xi > 0$ , also um den FRÉCHET-Fall. Mit dem semiparametrischen Ansatz wird - im Gegensatz zum parametrischen Ansatz - nicht das Ziel verfolgt, die gesamte Verteilung der Logrendite zu bestimmen, sondern lediglich die Verteilung extremer Realisationen.<sup>30</sup> Somit konzentriert man sich nur und gerade auf den für die Ermittlung des VaR wesentlichen Bereich. Das folgende Zitat von D'AGOSTINO/STEPHENS bringt diesen Sachverhalt auf den Punkt:<sup>31</sup>

*„Sometimes it is more important to understand the behavior of the upper tail of the distribution than it is to fit the entire distribution. Although a particular model may adequately describe most of the distribution, it would be useless for predicting maximum or extreme values if the model broke down for the upper percentiles. Also, a model that is not accurate for a large portion of the data may still be useful for predicting upper values if it adequately describes the behavior of the upper percentiles.“*

Um die theoretische Verteilung von Extremwerten aus einem vorgegebenen Bestand realisierter Ausreißer abzuleiten, bietet sich die sogenannte *Peaks-Over-Threshold*-(POT-) Methode an. Die POT-Methode beruht auf den in Kapitel 5 dargelegten Erkenntnissen der Extremwerttheorie und hat sich allgemein durchgesetzt.<sup>32</sup>

---

<sup>30</sup> Vgl. McNeil/Saladin [48], S. 2.

<sup>31</sup> Vgl. D'Agostino/Stephens [13], S. 18.

<sup>32</sup> Die POT-Methode wird seit den 70'er Jahren insbesondere zur Lösung hydrologischer Problemstellungen verwendet. Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 355, McNeil/Saladin [48], S. 2 und Abschnitt 6.1, S. 50.

# Kapitel 7

## Ermittlung des VaR mit der POT-Methode

### 7.1 Motivation

Die Stylized Facts der empirischen Kapitalmarktforschung legen die Vermutung nahe, daß Finanzzeitreihen long-tailed sind. Der MDA muß empirisch überprüft werden, da die theoretische Verteilungsfunktion von Logrenditen im Gegensatz zur Situation in Abschnitt 5.4 nicht bekannt ist.<sup>1</sup> Ein hervorragendes Werkzeug für die Zuordnung des empirischen Befundes in eine der drei Kategorien *long-tailed*, *medium-tailed* oder *short-tailed* ist der sogenannte *Mean-Excess-(ME-)Plot*:<sup>2</sup>

$$\left\{ \left( x_{(j)}, \widehat{\mathcal{E}}(x_{(j)}) \right) : j = 1, \dots, n \right\}.$$

Dabei repräsentiert  $\widehat{\mathcal{E}}$  die *empirische EMF*<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{E}}(v) &= \frac{\int_v^{+\infty} (x-v) d\widehat{F}_n(x)}{\widehat{F}_n(v)} = \frac{\int_v^{+\infty} (x-v) d\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i \leq x}}{K_n(v)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_{(i)} - v)^+}{K_n(v)} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - v)^+}{K_n(v)}, \quad v \geq 0, \end{aligned}$$

wobei

$$K_n(v) := \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > v}$$

die Anzahl der Exzedenten von  $v$  darstellt.  $\widehat{\mathcal{E}}$  ist also das empirische Äquivalent der theoretischen EMF

$$\mathcal{E}(v) = \int_v^{+\infty} (x-v) d \frac{F(x) - F(v)}{\overline{F}(v)} = \frac{\int_v^{+\infty} (x-v) dF(x)}{\overline{F}(v)}.$$

---

<sup>1</sup>Anhang C beinhaltet die Ergebnisse des Hypothesentests  $H_0 : F \in \text{MDA}(\lambda)$  auf Basis der 30 DAX-Aktien. Zur Vorgehensweise siehe Abschnitt 9.4.1.3, S. 72.

<sup>2</sup>Vgl. Bassi/Embrechts/Kafetzaki [3], S. 118, Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 296 und McNeil/Saladin [48], S. 6.

<sup>3</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 296, Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 3 und McNeil/Saladin [48], S. 5. Man vereinbart  $0/0 := 0$ , da ab einer bestimmten Schwelle keine realisierten Exzedenten mehr existieren.

Laut der Approximationsformel (5.9) muß eine kritische Schwelle  $u$  existieren, ab der die Punktwolke der empirischen Exzeßmittelwerte ein affines Bildungsgesetz widerspiegelt. Je nachdem, ob die rechte Flanke long-, medium- oder short-tailed ist, werden die Exzeßmittelwerte ab  $u$  gegen unendlich streben ( $\text{MDA}(\Phi_\alpha)$ ), ein konstantes Niveau annehmen ( $\text{MDA}(\Lambda)$ ) oder gegen Null gehen ( $\text{MDA}(\Psi_\alpha)$ ).

**Beispiel 7.1.1** Exemplarisch seien die ME-Plots der negierten Logrenditen des Dow-Jones und des DAX dargestellt.<sup>4</sup>

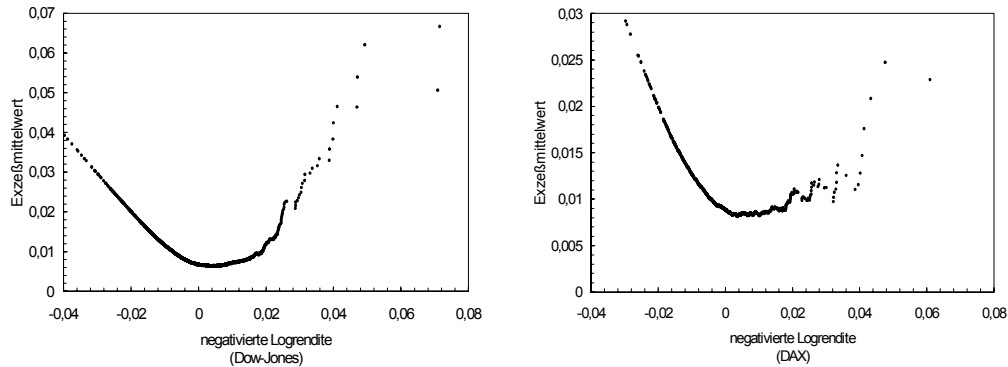


Abb. 6: ME-Plots negierter Logrenditen (links: Dow-Jones, rechts: DAX).

Es ist ersichtlich, daß der empirische Exzeßmittelwert in beiden Fällen ab einer hinreichend hohen Schwelle linear gegen unendlich strebt.<sup>5</sup> Damit wird die Vermutung  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  durch die ermittelten ME-Plots bekräftigt.<sup>6</sup> ○

Die empirisch ermittelten ME-Plots des Dow-Jones und des DAX können mit den im Anhang A abgebildeten simulierten ME-Plots einfach normalverteilter ( $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ ), gemischt normalverteilter ( $F \in \text{MDA}(\Lambda)$ ) und  $\alpha$ -stabiler ( $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ ) Logrenditen verglichen werden. Dabei wurden lediglich symmetrisch um Null verteilte Logrenditen simuliert, da einerseits das Grenzverhalten des Exzeßmittelwertes a priori nicht vom Symmetriezentrum abhängt und andererseits die empirisch zu beobachtende leichte Schiefe von Logrenditen bei der Betrachtung eines ME-Plots vernachlässigt werden kann.

Die ME-Plots der Verteilungen  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$  unterscheiden sich sowohl bei „realitätsnaher“ Wahl der Verteilungsparameter (linke Spalte)<sup>7</sup> als auch bei „extensiver“ Ausnutzung der Skalenparameter im Sinne einer höheren Varianz (rechte Spalte)<sup>8</sup> deutlich von dem empirisch festgestellten Verlauf der Exzeßmittelwerte von Logrenditen. Im Gumbel-Fall

<sup>4</sup>Erhebungszeiträume: 02.01.1980 bis 02.07.1998 (Dow-Jones), 20.08.1993 bis 09.09.1998 (DAX), Stichprobenumfänge: 4678 (Dow-Jones), 1271 (DAX) Logrenditen. Man beachte, daß Dow-Jones und DAX Performanceindizes sind.

<sup>5</sup>Dieser Effekt ist insbesondere beim Dow-Jones-Index erkennbar. Man beachte, daß das Datenvolumen in diesem Fall ca. 4-mal so hoch ist, wie beim DAX.

<sup>6</sup>Die Rolle des ME-Plots zur Ermittlung des MDA kann durchaus mit der des QQ-Plots zur Verifikation der Anpassungsgüte im Rahmen eines parametrischen Fits verglichen werden.

<sup>7</sup>Bei Annahme normalverteilter Logrenditen beträgt die beim Dow-Jones-Index gemessene Tagesvolatilität  $\sigma = 0.01$ . Für gemischt-normalverteilte Logrenditen lassen sich hingegen folgende partielle Tagesvolatilitäten mit Hilfe der KQ-Methode feststellen:  $\sigma_1 = 0.008$ ,  $\sigma_2 = 0.018$  und  $\sigma_3 = 0.003$ . Siehe Anhang A.

<sup>8</sup>Für normalverteilte Logrenditen wurde eine fiktive Tagesvolatilität von  $\sigma = 0.02$  unterstellt. Bei den gemischt-normalverteilten Logrenditen wurden fiktive partielle Tagesvolatilitäten von  $\sigma_1 = 0.01$ ,  $\sigma_2 = 0.03$  und  $\sigma_3 = 0.005$  zugrundegelegt. Siehe Anhang A.

können extreme Exzeßmittelwerte unter Umständen relativ stark nach oben oder nach unten ausreißen, was mit der - bezogen auf die Schwelle  $v$  - kontinuierlich wachsenden Varianz der empirischen EMF begründet werden kann. In keinem Fall läßt sich jedoch ein linearer Trend gegen unendlich feststellen. Dagegen läßt sich anhand des simulierten ME-Plots einer stabilverteilten Logrendite mit einem „realitätsnahen“ charakteristischen Exponenten<sup>9</sup> von  $\alpha = 1.8$  ( $\Rightarrow F \in \text{MDA}(\Phi_{1.8})$ ) ein deutlicher linearer Trend gegen unendlich konstatieren (linke Spalte). Diese Tendenz verstärkt sich, wenn man  $\alpha = 1.5$  ( $\Rightarrow F \in \text{MDA}(\Phi_{1.5})$ ) setzt (rechte Spalte).

## 7.2 Schätzung der Flanke einer Verteilungsfunktion

Der Satz von PICKANDS-BALKEMA-DE-HAAN besagt, daß sich die Exzeßverteilung  $F^{v \rightarrow}$  ab einer hinreichend hohen Schwelle  $u$  mit Hilfe eines geeigneten Skalenwerts  $\sigma(u)$  durch  $G_\xi(y/\sigma(u))$  approximieren läßt:

$$F^{u \rightarrow}(y) \approx G_\xi\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right), \quad 0 \leq y < x_F - u, \quad u \text{ groß.}$$

Im Hinblick auf die Approximation der Flanke der Exzeßverteilung ergibt sich daraus unmittelbar:

$$(7.1) \quad \bar{F}^{u \rightarrow}(y) \approx \bar{G}_\xi\left(\frac{y}{\sigma(u)}\right), \quad 0 \leq y < x_F - u, \quad u \text{ groß.}$$

Mit der Substitution  $y = x - u$  resultiert die *verlagerte Exzeßverteilungsfunktion*:<sup>10</sup>

$$(7.2) \quad \bar{F}^{u \rightarrow}(x - u) \approx \bar{G}_\xi\left(\frac{x - u}{\sigma(u)}\right), \quad u \leq x < x_F, \quad u \text{ groß.}$$

Die verlagerte Exzeßverteilungsfunktion ist die Verteilungsfunktion der Exzedenten von  $u$ .<sup>11</sup>

Mit<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(u)} &= \frac{P(X > x)}{P(X > u)} = \frac{P(X > u + (x - u))}{P(X > u)} = P(X - u > x - u \mid X > u) \\ &= \bar{F}^{u \rightarrow}(x - u) \approx \bar{G}_\xi\left(\frac{x - u}{\sigma(u)}\right), \quad u \leq x < x_F, \quad u \text{ groß,} \end{aligned}$$

erhält man

$$(7.3) \quad \bar{F}(x) = \bar{F}(u) \cdot \bar{F}^{u \rightarrow}(x - u) \approx \bar{F}(u) \cdot \bar{G}_\xi\left(\frac{x - u}{\sigma(u)}\right), \quad u \leq x < x_F, \quad u \text{ groß.}$$

Man beachte, daß sich die Approximation lediglich auf den Bereich  $[u, x_F[$  bezieht, d.h. nur für Exzedenten von  $u$  gültig ist.

Formel (7.3) suggeriert nun eine plausible Schätzmethode für die Flanke von  $F$ :<sup>13</sup>

<sup>9</sup>Der beim Dow-Jones gemeßene charakteristische Exponent beträgt  $\alpha = 1.785$ .

<sup>10</sup>Engl.: Shifted Excess Distribution Function. Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 359.

<sup>11</sup>Wenn  $Y$  der Exzeß über  $u$  ist, so ist  $u + Y$  der Exzedent von  $u$ .

<sup>12</sup>Vgl. Definition 5.2.1.

<sup>13</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 353f, Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 5f. und McNeil/Saladin [48], S. 8.

1. Man schätze  $\overline{F}(u)$ , also das Flankenvolumen an der Stelle  $u$ .
2. Man schätze die Flanke der verlagerten Exzeßverteilungsfunktion  $\overline{F}^{u \rightarrow}(x - u)$  für alle  $x \in [u, x_F[$ .
3. Man schätze  $\overline{F}(x)$ , also die Flanke von  $F$  an der Stelle  $x$ , durch Multiplikation der in den beiden vorangegangenen Schritten gewonnenen Schätzer.

### 7.2.1 Schätzung des Flankenvolumens

Das Flankenvolumen wird in der Regel mittels der empirischen Verteilungsfunktion geschätzt:<sup>14</sup>

$$\widehat{F}_n(u) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > u}.$$

Die Anzahl der Exzedenten von  $u$  ist binomialverteilt:

$$K_n(u) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i > u} \sim B(n, \overline{F}(u)).$$

Somit gilt

$$E\left(\widehat{F}_n(u)\right) = E\left(\frac{K_n(u)}{n}\right) = \overline{F}(u)$$

und

$$\text{Var}\left(\widehat{F}_n(u)\right) = \text{Var}\left(\frac{K_n(u)}{n}\right) = \frac{\overline{F}(u)(1 - \overline{F}(u))}{n}.$$

$\widehat{F}_n(u)$  ist somit ein erwartungstreuer Schätzer. Weiterhin ist  $\widehat{F}_n(u)$  nach dem zentralen Grenzwertsatz asymptotisch normalverteilt:

$$\widehat{F}_n(u) \rightsquigarrow N\left(\overline{F}(u), \frac{\overline{F}(u)(1 - \overline{F}(u))}{n}\right), \quad n \text{ groß.}$$

### 7.2.2 Schätzung der Flanke der verlagerten Exzeßverteilungsfunktion

Für die Schätzung der verlagerten Exzeßverteilungsfunktion bietet sich Formel (7.2) als geeignete Ausgangsbasis an:

$$\begin{aligned} \widehat{F}_n^{u \rightarrow}(x - u) &= \overline{G}_{\widehat{\xi}}\left(\frac{x - u}{\widehat{\sigma}}\right), \quad u \leq x < x_F, \quad u \text{ groß,} \\ &= \left(1 + \widehat{\xi} \cdot \frac{x - u}{\widehat{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}}, \quad \widehat{\xi} \neq 0, \quad \widehat{\sigma} > 0, \quad u \leq x < x_F, \quad u \text{ groß.} \end{aligned}$$

Es werden also zuerst geeignete Schätzer  $\widehat{\xi}$  und  $\widehat{\sigma}$  für den Gestaltparameter  $\xi$  und den Skalenparameter  $\sigma$  konstruiert, um sodann die realisierten Schätzwerte in die Flanke der verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Lageparameter  $u$  einzusetzen.<sup>15</sup>

<sup>14</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 354 und Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 6.

<sup>15</sup>In die Schätzung fließen - wie noch gezeigt wird - lediglich die Exzedenten von  $u$  ein.

### 7.2.3 Schätzung der Flanke

Der Flankenschätzer  $\widehat{F}_n(x)$  ergibt sich schließlich als Produkt beider Teilschätzungen:

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}_n(x) &= \widehat{F}_n(u) \cdot \widehat{G}_{\widehat{\xi}}\left(\frac{x-u}{\widehat{\sigma}}\right) \\
 (7.4) \quad &= \frac{K_n(u)}{n} \cdot \left(1 + \widehat{\xi} \cdot \frac{x-u}{\widehat{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}}, \quad \widehat{\xi} \neq 0, \widehat{\sigma} > 0, u \leq x < x_F, u \text{ groß.}
 \end{aligned}$$

Werden  $\widehat{\xi}$  und  $\widehat{\sigma}$  als Schätzwerte und  $k$  als realisierte Anzahl der Exzedenten von  $u$  interpretiert, so ist  $\widehat{F}_n(x)$  eine verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit dem Gestaltparameter  $\widehat{\xi}$ , dem Lageparameter

$$u + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \left( \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\xi}} - 1 \right)$$

und dem Skalenparameter

$$\widehat{\sigma} \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\xi}},$$

denn

$$\begin{aligned}
 \widehat{F}_n(x) &= \frac{k}{n} \cdot \left(1 + \widehat{\xi} \cdot \frac{x-u}{\widehat{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}} = \frac{k}{n} \cdot \left(\frac{\widehat{\xi}(x-u) + \widehat{\sigma}}{\widehat{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}} \\
 &= \left( \left( \frac{k}{n} \right)^{-\widehat{\xi}} \cdot \widehat{\xi} \cdot \frac{(x-u) + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}}}{\widehat{\sigma}} \right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}} = \left( \widehat{\xi} \cdot \frac{(x-u) + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}}}{\widehat{\sigma} \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\xi}}} \right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}} \\
 &= \left( 1 + \widehat{\xi} \cdot \left( \frac{(x-u) + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}}}{\widehat{\sigma} \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\xi}}} - \frac{1}{\widehat{\xi}} \right) \right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}} \\
 &= \left( 1 + \widehat{\xi} \cdot \left( \frac{(x-u) + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} - \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\xi}}}{\widehat{\sigma} \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\xi}}} \right) \right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}} \\
 &= \left( 1 + \widehat{\xi} \cdot \left( \frac{x - \left( u + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \left( \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\xi}} - 1 \right) \right)}{\widehat{\sigma} \left( \frac{k}{n} \right)^{\widehat{\xi}}} \right) \right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}}.
 \end{aligned}$$

Ist die Schwelle  $u$  zu niedrig, so erhält man einen stark verzerrten Flankenschätzer, d.h. der Bias

$$\text{Bias} \left( \widehat{F}_n(x) \parallel \overline{F}(x) \right) = E \left( \widehat{F}_n(x) \parallel \overline{F}(x) \right) - \overline{F}(x), \quad u \leq x < x_F$$

weicht stark von Null ab, da die Konvergenz der Exzeßverteilung nach dem Satz von PICKANDS-BALKEMA-DE-HAAN noch nicht weit genug vorangeschritten ist. Ist die Schwelle allerdings zu hoch, so ist die Anzahl der Exzedenten von  $u$  zu klein und damit fließt in

die Schätzung von  $\xi$  und  $\sigma$  nur eine geringe Datenmenge ein. Dies führt zu einer hohen Varianz des Flankenschätzers. Es existiert also offenbar ein Trade Off zwischen Bias und Varianz,<sup>16</sup> wobei der Zusammenhang besonders gut am Mean-Squared-Error

$$\underbrace{\text{MSE} \left( \widehat{F}_n(x) \parallel \overline{F}(x) \right)}_{\text{Mean-Squared-Error}} = E \left[ \left( \widehat{F}_n(x) - \overline{F}(x) \right)^2 \parallel \overline{F}(x) \right]$$

$$= \underbrace{\text{Var} \left( \widehat{F}_n(x) \parallel \overline{F}(x) \right)}_{\text{Varianz}} + \underbrace{\left( E \left( \widehat{F}_n(x) - \overline{F}(x) \parallel \overline{F}(x) \right) \right)^2}_{\text{Bias}}$$

gezeigt werden kann. Die theoretisch optimale Kombination von Bias und Varianz ist gerade dann erreicht, wenn der Mean-Squared-Error minimal ist.

### 7.3 Ermittlung der kritischen Schwelle

Von zentraler Bedeutung ist die richtige Wahl der Schwelle  $u$ . Formel (5.9) auf S. 35 besagt, daß der Exzeßmittelwert einer Verteilungsfunktion  $F \in \text{MDA}(H_\xi)$  ab einer hinreichend hohen Schwelle  $u$  approximativ linear ansteigt. Diese Erkenntnis wird genutzt, um anhand der empirischen EMF jene Stelle ausfindig zu machen, ab der  $\widehat{\mathcal{E}}(v)$  quasi-linear ansteigt. Die betreffende Stelle wird im folgenden als *kritische Schwelle* bezeichnet. Zu diesem Zweck wird ein ME-Plot erzeugt und jene realisierte Ordnungsgröße  $x_{(j^*)}$  gesucht, ab der die Punktwolke der empirischen Exzeßmittelwerte das lineare Bildungsgesetz widerspiegelt.<sup>17</sup> Man hat in  $x_{(j^*)}$  dann jene kritische Schwelle gefunden, ab der eine Approximation von  $\overline{F}^{u \rightarrow}(x - u)$  durch  $\overline{G}_\xi((x - u) / \widehat{\sigma})$  in statistischer Hinsicht zu rechtfertigen ist.

**Beispiel 7.3.1** *Betrachtet werden die Daten aus Beispiel 6.2.1. Es resultiert der folgende ME-Plot der negativen Logrendite:*

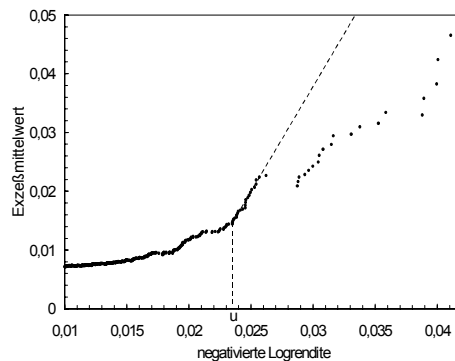


Abb. 7: Explorative Ermittlung der kritischen Schwelle.

Es läßt sich also eine kritische Schwelle  $u$  identifizieren. Im vorliegenden Fall wurde  $u = x_{(4629)} = 0.023554$  gewählt. Die Punktwolke wird allerdings immer diffuser, je weiter man sein Augenmerk nach rechts richtet. Dadurch fällt es zunehmend schwerer, den theoretischen Verlauf der EMF anhand der empirischen Daten nachzuvollziehen.  $\circ$

<sup>16</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 341 und S. 355.

<sup>17</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 355, Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 6 und McNeil/Saladin [48], S. 6.



Oftmals besteht die Schwierigkeit darin, die kritische Schwelle „rechtzeitig“ zu finden, bevor der mit fortschreitender Schwelle immer diffuser werdende Verlauf der empirischen EMF das Auffinden des affinen Bildungsgesetzes unmöglich macht.<sup>18</sup> Insbesondere sei betont, daß es keine objektive kritische Schwelle gibt. Vielmehr ist die hier dargestellte explorative Methode sehr stark von der subjektiven Wahrnehmung des Betrachters abhängig.<sup>19</sup>

## 7.4 Schätzung des Value-at-Risk

Zum Zwecke der VaR-Schätzung benötigt man einen geeigneten Schätzer für das  $(1 - p)$ -Quantil der Logrenditeverteilung. Durch die Festlegung

$$p \stackrel{!}{=} \widehat{F}_n(\widehat{\text{LogRaR}}_p) = \frac{K_n(u)}{n} \cdot \left(1 + \widehat{\xi} \cdot \frac{\widehat{\text{LogRaR}}_p - u}{\widehat{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}}, \quad p < \widehat{F}_n(u) = \frac{K_n(u)}{n}$$

und einfaches Umformen des Flankenschätzers (7.4) ergibt sich:<sup>20</sup>

$$\widehat{\text{LogRaR}}_\alpha := u + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \cdot \left( \left( \frac{p \cdot n}{K_n(u)} \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right), \quad p < \widehat{F}_n(u) = \frac{K_n(u)}{n}.$$

Nach Anwendung der Formel (4.2) auf S. 22 folgt unmittelbar der gesuchte VaR-Schätzer:

$$\begin{aligned} \widehat{\text{VaR}}_p(v) &= v \left(1 - \exp\left(-\widehat{\text{LogRaR}}_p\right)\right) \\ (7.5) \quad &= v \left(1 - \exp\left(-\left(u + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \cdot \left(\left(\frac{p \cdot n}{K_n(u)}\right)^{-\widehat{\xi}} - 1\right)\right)\right)\right), \quad p < \frac{K_n(u)}{n}, v > 0, \end{aligned}$$

wobei für  $v$  der aktuelle Portefeuillewert eingesetzt wird.

<sup>18</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 296 und 355f.

<sup>19</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 356.

<sup>20</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 354, Emmer/Klüppelberg/Trüstedt [19], S. 6. und McNeil/Saladin [48], S. 10.

## Kapitel 8

# Ermittlung des SR mit der POT-Methode

### 8.1 MDA einer Shortfall-Verteilung

In Abschnitt 4.2.2 wurde gezeigt, wie der SR prinzipiell ermittelt werden könnte, wenn alle Momente der Shortfall-Verteilung

$$F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y) = \frac{F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p + y) - F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)}{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)}, \quad y \geq 0$$

endlich definiert wären. Es ist jedoch davon auszugehen, daß sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen negativer Logrenditen im MDA der Fréchet-Verteilung befinden, wie in Beispiel 7.1.1 gezeigt wurde.<sup>1</sup> Aus  $\overline{F}_{-\mathfrak{R}} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ) folgt  $F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ , denn

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(ty)}{F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y)} &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p + ty) / \overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)}{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p + y) / \overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)} \\ &= \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p + ty)}{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p + y)} = t^{-\alpha}. \end{aligned}$$

In Verbindung mit Proposition 5.5.3 erhält man damit die Erkenntnis, daß für  $F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}$  nicht alle Momente existieren. Somit muß für die Berechnung des SR auf die TAYLOR-Approximation laut Formel (4.4) auf S. 25 verzichtet werden, d.h. der Erwartungswert  $E(\exp(-Y))$  als Bestandteil des SR muß ohne Rückgriff auf die Momente hergeleitet werden.

---

<sup>1</sup>Vgl. außerdem Anhang C.

## 8.2 Approximation einer Shortfall-Verteilung

Durch Rückgriff auf die Exzeßverteilung  $F^{u \rightarrow}$  läßt sich die Shortfall-Verteilung  $F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}$  folgendermaßen herleiten:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y) &= \frac{F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p + y) - F_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)}{\overline{F}_{-\mathfrak{R}}(\text{LogRaR}_p)} \\ &= \frac{F_{-\mathfrak{R}}(u + (\text{LogRaR}_p - u) + y) - F_{-\mathfrak{R}}(u + (\text{LogRaR}_p - u))}{\overline{F}_{-L}(u + (\text{LogRaR}_p - u))} \\ &= \frac{F^{u \rightarrow}((\text{LogRaR}_p - u) + y) - F^{u \rightarrow}(\text{LogRaR}_p - u)}{\overline{F}^{u \rightarrow}(\text{LogRaR}_p - u)}, \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Approximationsformel (5.5) auf S. 30 resultiert daraus:<sup>3</sup>

$$F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y) \approx \frac{G_\xi\left(\frac{(\text{LogRaR}_p - u) + y}{\sigma(u)}\right) - G_\xi\left(\frac{\text{LogRaR}_p - u}{\sigma(u)}\right)}{\overline{G}_\xi\left(\frac{\text{LogRaR}_p - u}{\sigma(u)}\right)}, \quad y \geq 0.$$

In der Beweisführung zu Satz 5.3.3 wurde gezeigt, daß die Exzeßverteilung einer verallgemeinert Pareto-verteilten Zufallsvariablen mit den Parametern  $\xi < 1$ ,  $\mu = 0$  und  $\sigma > 0$  wiederum eine Pareto-Verteilung ist und zwar mit den Parametern  $\xi$ ,  $\mu$  und  $\xi \cdot v + \sigma$ , wobei  $v$  die Exzeßschwelle symbolisiert.<sup>4</sup> Damit gilt

$$F_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y) \approx G_\xi\left(\frac{y}{\xi(\text{LogRaR}_p - u) + \sigma(u)}\right), \quad y \geq 0.$$

## 8.3 Approximation des Erwartungswertes von $\exp(-Y)$

Die Formel für den unbedingten SR lautet:<sup>5</sup>

$$\text{SR}_p(v) = v(1 - \exp(-\text{LogRaR}_p) \cdot E(\exp(-Y))).$$

Es wird also der Erwartungswert von  $\exp(-Y)$  benötigt:

$$\begin{aligned} E(\exp(-Y)) &= \int_0^{+\infty} \exp(-y) dF_{-\mathfrak{R}}^{\text{LogRaR}_p \rightarrow}(y) \\ &\approx \int_0^{+\infty} \exp(-y) dG_\xi\left(\frac{y}{\xi(\text{LogRaR}_p - u) + \sigma(u)}\right). \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Vgl. die Beweisführung zu Satz 5.3.5.

<sup>3</sup>Man geht hierbei implizit von  $\text{LogRaR}_p > u$  aus, womit die Anwendung der Approximationsformel (5.5) zulässig ist.

<sup>4</sup>Vgl. Abschnitt 5.3.2, S. 33.

<sup>5</sup>Vgl. Formel (4.3) auf S. 24.

Es empfiehlt sich,  $\xi (\text{LogRaR}_\alpha - u) + \sigma(u)$  durch  $\sigma'$  zu substituieren. In der Riemannschen Version des obigen Integrals ergibt sich somit

$$E(\exp(-Y)) = \int_0^{+\infty} \exp(-y) \cdot \frac{1}{\sigma'} \left(1 + \xi \cdot \frac{y}{\sigma'}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} dy.$$

Substitution von  $1 + \xi \cdot \frac{y}{\sigma'}$  durch  $x$  ergibt

$$(8.1) \quad E(\exp(-Y)) = \frac{1}{\xi} \cdot \int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma'}{\xi}(x-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{\xi}-1} dx.$$

Die zentrale Frage ist, ob das Integral (8.1) konvergiert, m.a.W. ob der SR im analytischen Sinne existiert. Dazu betrachte man den folgenden Satz.<sup>6</sup>

**Satz 8.3.1** *Seien zwei positive Funktionen  $f$  und  $g$  gegeben, welche beide auf dem Intervall  $[a, +\infty[$  definiert sind. Gilt*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow r > 0, \quad x \rightarrow \infty,$$

*dann konvergiert  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  genau dann, wenn  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  konvergiert. Im Falle*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \infty$$

*konvergiert  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , wenn  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  konvergiert.* □

**Beweis:** Siehe Heuser [29], S. 482.<sup>7</sup> ■

Da

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(-\frac{\sigma'}{\xi}(x-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{\xi}-1}}{x^{-2}} = \exp\left(-\frac{\sigma'}{\xi}(x-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{\xi}+1} = 0, \quad \forall \xi < 1, \xi \neq 0$$

und

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} = 1,$$

folgt aus Satz 8.3.1 die Konvergenz von

$$\int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma'}{\xi}(x-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{\xi}-1} dx$$

und damit auch die Konvergenz von  $E(\exp(-Y))$ . Der Shortfall-Risk kann numerisch ermittelt werden.

<sup>6</sup>Vgl. Heuser [29], S. 482.

<sup>7</sup>Der Beweis stützt sich auf das Majorantenkriterium (vgl. Heuser [29], S. 482) und erfolgt analog zum Beweis des Grenzwertkriteriums für Folgen (vgl. Heuser [29], S. 205).

## 8.4 Schätzung des Shortfall-Risk

Die vollständige Formel für den SR lautet:

$$\begin{aligned}
\text{SR}_p(v) &= v \left( 1 - \frac{\exp(-\text{LogRaR}_p)}{\xi} \cdot \int_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma'}{\xi}(x-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{\xi}-1} dx \right) \\
&= v \left( 1 - \frac{\exp(-\text{LogRaR}_p)}{\xi} \right. \\
&\quad \cdot \int_1^{+\infty} \exp\left(-\left((\text{LogRaR}_p - u) + \frac{\sigma(u)}{\xi}\right)(x-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{\xi}-1} dx \left. \right) \\
&= v \left( 1 - \frac{1 - \text{RaR}_p}{\xi} \right. \\
&\quad \cdot \int_1^{+\infty} \exp\left(\left(u + \log(1 - \text{RaR}_p) - \frac{\sigma(u)}{\xi}\right)(x-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{\xi}-1} dx \left. \right)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der SR-Schätzer:

$$\begin{aligned}
\widehat{\text{SR}}_p(v) &= v \left( 1 - \frac{1 - \widehat{\text{RaR}}_p}{\widehat{\xi}} \right. \\
(8.2) \quad &\cdot \int_1^{+\infty} \exp\left(\left(u + \log(1 - \widehat{\text{RaR}}_p) - \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}}\right)(x-1)\right) \cdot x^{-\frac{1}{\widehat{\xi}}-1} dx \left. \right), \quad v > 0,
\end{aligned}$$

wobei

$$\widehat{\text{RaR}}_p = 1 - \exp\left(-\left(u + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \cdot \left(\left(\frac{p \cdot n}{K_n(u)}\right)^{-\widehat{\xi}} - 1\right)\right)\right), \quad p < \frac{K_n(u)}{n}.$$

# Kapitel 9

## Schätzung des Gestaltparameters

### 9.1 Überblick

In diesem Kapitel wird auf die Ermittlung des Gestaltparameters  $\xi$  und des Skalenparameters  $\sigma$  eingegangen.<sup>1</sup> Es lassen sich drei Ermittlungsansätze unterscheiden:

1. Semiparametrische Ermittlung von  $\xi$  auf der Grundlage von *Upper-Order-Statistics*
  - (a) Pickands-Schätzer
  - (b) Hill-Schätzer
  - (c) Deckers-Einmahl-de-Haan-Schätzer
2. Parametrische Ermittlung von  $\xi$  auf der Grundlage der GEV (Blockmaxima-Ansatz)
  - (a) Maximum-Likelihood-Methode
  - (b) Methode der wahrscheinlichkeitengewichteten Momente
3. Parametrische Ermittlung von  $\xi$  und  $\sigma$  auf der Grundlage der GPD (POT-Ansatz)
  - (a) Maximum-Likelihood-Methode
  - (b) Methode der wahrscheinlichkeitengewichteten Momente

Der semiparametrische sowie der Blockmaxima-Ansatz werden nur kurz erläutert. Interessanter ist die Frage, wie  $\xi$  im Rahmen des POT-Ansatzes, also auf Basis der verallgemeinerten Pareto-Verteilung, ermittelt werden kann. Damit läßt sich nämlich unmittelbar auf die in Kapitel 7 gewonnenen Ergebnisse zurückgreifen. Daher werden zwei grundlegende Methoden zur simultanen Ermittlung des Gestalt- und des Skalenparameters der verallgemeinerten Pareto-Verteilung, die *Maximum-Likelihood-(ML-)Methode* und die *Methode der wahrscheinlichkeitengewichteten Momente*<sup>2</sup>, ausführlich vorgestellt und diskutiert.

---

<sup>1</sup>In der Literatur genießt die Ermittlung von  $\xi$  ein vorrangiges Interesse, denn der Gestaltparameter bestimmt den MDA der Verteilung.

<sup>2</sup>Engl.: Method of Probability Weighted Moments.

## 9.2 Upper-Order-Statistics-Ansatz

Mit dem Upper-Order-Statistics-Ansatz werden die  $k$  höchsten Ordnungsgrößen betrachtet.<sup>3</sup> Theoretisch wird dabei eine große Zahl  $k$ , jedoch ein kleiner Anteil  $k/n$  vorausgesetzt:<sup>4</sup>

$$k(n) \rightarrow \infty, \quad \frac{k(n)}{n} \rightarrow 0.$$

Mit der Bedingung  $k(n) \rightarrow \infty$  wird das Ziel verfolgt, die Varianz des  $\xi$ -Schätzers zu minimieren. Andererseits muß  $k(n)$  jedoch im Verhältnis zu  $n$  klein sein, damit lediglich die realisierten Extremwerte in den Kalkül einfließen.<sup>5</sup> Eine bestimmte Methode produziert also keinen einheitlichen Schätzer  $\hat{\xi}$ , sondern vielmehr eine Schätzerfolge  $\hat{\xi}_k$ . Man kann zeigen, daß mit überproportional steigendem  $k$  zwar die Schätzervarianz abnimmt, jedoch der Schätzer zunehmend an Bias gewinnt. Das ist plausibel, wenn man bedenkt, daß alle Upper-Order-Statistics-Methoden durchweg auf Schlußfolgerungen der Extremwerttheorie basieren. Je mehr man sich jedoch den „gewöhnlichen“ Ordnungsgrößen widmet, desto mehr verschwinden die typischen asymptotischen Eigenschaften extremer Ordnungsgrößen und dies führt zu immer stärker verzerrten Schätzungen von  $\xi$ .<sup>6</sup>

### 9.2.1 Pickands-Schätzer

Es wird lediglich  $\xi \in \mathbb{R}$  vorausgesetzt. Der Pickands-Schätzer lautet:<sup>7</sup>

$$\hat{\xi}_k^{\text{Pickands}} := \frac{\log(X_{(n+1-k)} - X_{(n+1-2k)}) - \log(X_{(n+1-2k)} - X_{(n+1-4k)})}{\log(2)}, \quad k \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

Die kleinste Ordnungsgröße, die beim Pickands-Schätzer noch berücksichtigt wird, ist also die  $4k$ -größte Ordnungsgröße.

### 9.2.2 Hill-Schätzer

Der Hill-Schätzer geht von  $\xi > 0$  aus. Es wird also der Fréchet-Fall  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  vorausgesetzt. Er lautet:<sup>8</sup>

$$\hat{\xi}_k^{\text{Hill}} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \log(X_{(n+1-i)}) - \log(X_{(n+1-k)}).$$

<sup>3</sup>Engl.: Upper Order Statistics.

<sup>4</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 326 und Pickands, S. 121.

<sup>5</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 326.

<sup>6</sup>Diesen für die gesamte Extremwerttheorie grundlegenden Bias-Varianz-Trade-Off diskutieren Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16] auf S. 341ff.

<sup>7</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 328.

<sup>8</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 330.

### 9.2.3 Deckers-Einmahl-de-Haan-Schätzer

Es wird wie beim Pickands-Schätzer lediglich  $\xi \in \mathbb{R}$  vorausgesetzt. Der Deckers-Einmahl-de-Haan-(DEdH-)Schätzer lautet:<sup>9</sup>

$$\hat{\xi}_k^{\text{DEdH}} = 1 + H_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{H_1^2}{H_2} - 1 \right)^{-1},$$

mit

$$H_1 := \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k (\log(X_{(n+1-i)}) - \log(X_{(n-k)}))$$

und

$$H_2 := \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k (\log(X_{(n+1-i)}) - \log(X_{(n-k)}))^2.$$

## 9.3 Blockmaxima-Ansatz

Im Gegensatz zum Upper-Order-Statistics-Ansatz konzentriert man sich bei der Blockmaxima-Methode lediglich auf das Stichprobenmaximum. Die Blockmaxima-Methode stammt aus der Hydrologie<sup>10</sup> und stützt sich auf den Satz von FISHER-TIPPETT. Dabei wird versucht die verallgemeinerte Extremwertverteilung an die empirische Verteilung bestimmter Stichprobenmaxima mittels der ML- oder der PWM-Methode anzupassen.<sup>11</sup> Insofern handelt es sich also um einen parametrischen Ansatz. Als Datenbasis nimmt man die Zeitreihe täglicher negativierter Logrenditen und bildet sogenannte *Blöcke*, d.h. man teilt die  $n$  Daten der chronologischen Abfolge entsprechend in  $m$  gleichmächtige Teilmengen ein und ermittelt dann für jede Teilmenge das jeweilige Stichprobenmaximum. Sind die Blöcke hinreichend groß, so besagt der Satz von FISHER-TIPPETT, daß das auf geeignete Weise standardisierte Blockmaximum asymptotisch verallgemeinert extremwertverteilt ist. Der Parameter  $\xi$  bezieht sich dabei a priori auf die annahmegemäß stationäre Randverteilung der negativierten Logrendite. Da die betrachteten Blöcke lange Perioden darstellen, ist von approximativ unabhängigen Blockmaxima auszugehen und die ML-Methode kann in ihrer einfachsten Form angewendet werden.

Probleme theoretischer Natur ergeben sich allerdings bei Annahme eines bedingt heteroskedastischen Prozesses der Logrendite. Zwar sind die Voraussetzungen von FISHER-TIPPETT weiterhin erfüllt, d.h. die standardisierten Blockmaxima konvergieren nach Verteilung gegen die verallgemeinerte Extremwertverteilung, jedoch führen die in diesem Fall entstehenden Volatilitätscluster zu einem anderen Grenzverhalten als bei unabhängigen Logrenditen. Man kann jedoch zeigen, daß die Autoregressionsintensität, m.a.W. das potentielle Ausmaß der Volatilitätscluster, zwar einen Einfluß auf Lage und Skala der Grenzverteilung hat, jedoch nicht auf deren Gestalt.<sup>12</sup> Folglich wird der Parameter  $\xi$  durch die Randverteilung des bedingt heteroskedastischen Prozesses eindeutig bestimmt, womit die Blockmaxima-Methode auch bei Annahme eines GARCH-Prozesses zu rechtfertigen ist.<sup>13</sup>

<sup>9</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 339f.

<sup>10</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 317 und sehr anwendungsbezogen Reiss/Thomas [57], S. 95ff und S. 223ff.

<sup>11</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 317f und S. 321ff.

<sup>12</sup>Vgl. McNeil [46], S. 9.

<sup>13</sup>Eine sehr gute Einführung in die hier dargelegte Methodologie bietet McNeil [46].



## 9.4 POT-Ansatz

In die Schätzung der Parameter fließen - im Gegensatz zu den bisher dargestellten Schätzmethoden - statt der Ordnungsgrößen nunmehr die Exzeße  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  über  $u$  ein, wobei  $k$  die realisierte Anzahl der Exzedenten von  $u$  symbolisiert. Die Stichprobe  $Y_1, Y_2, \dots, Y_k$  ist zwar eine mit dem Wert  $-u$  transformierte Teilfolge von  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , sie basiert allerdings nicht auf der Randverteilung  $F$ , welche der Stichprobe  $X_1, X_2, \dots, X_n$  zugrundeliegt, sondern auf  $F^{u \rightarrow}$ , also auf der Randverteilung der Exzeße über  $u$ .

### 9.4.1 Maximum-Likelihood-Methode

Das von FISHER entwickelte Maximum-Likelihood-Prinzip<sup>14</sup> wird als bekannt vorausgesetzt. Daher konzentrieren sich die folgenden Ausführungen lediglich auf die praktische Herleitung der ML-Schätzer und der Darlegung ihrer statistischen Eigenschaften.

#### 9.4.1.1 Herleitung

Die Dichte der verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit den Parametern  $\xi \in \mathbb{R}$ ,  $\mu = 0$  und  $\sigma > 0$ , lautet

$$g_{\xi,0,\sigma}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \cdot \frac{y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}, & \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

mit dem Träger

$$\mathbb{D}_{\xi,0,\sigma}^{GPD} := \begin{cases} x \geq 0, & \xi \geq 0 \\ 0 \leq x < -\frac{\sigma}{\xi}, & \xi < 0 \end{cases}.$$

Die Gumbel-Dichte kann auch durch die Grenzbetrachtung

$$\frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \cdot \frac{y}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1} \rightarrow \frac{1}{\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{y}{\sigma}\right), \quad \xi \rightarrow 0$$

gewonnen werden.<sup>15</sup> Gesucht wird nun der ML-Schätzer für das Parametertupel  $(\xi, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Die Likelihoodfunktion, d.h. die (approximative)<sup>16</sup> gemeinsame Dichtefunktion der  $k$  Exzeße, lautet<sup>17</sup>

$$L(\xi, \sigma \mid y_1, y_2, \dots, y_k) = \prod_{i=1}^k g_{\xi,0,\sigma}(y_i) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sigma} \left(1 + \xi \cdot \frac{y_i}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}$$

und die Log-Likelihoodfunktion ist

$$\log L(\xi, \sigma \mid y_1, y_2, \dots, y_k) = - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \cdot \sum_{i=1}^k \log\left(1 + \xi \cdot \frac{y_i}{\sigma}\right) - k \log \sigma.$$

<sup>14</sup>Vgl. z.B. Bosch [9], S. 335f und Mood/Graybill [50], S. 178f.

<sup>15</sup>Vgl. Abschnitt 5.4.2, S. 39.

<sup>16</sup>Man beachte, daß die verallgemeinerte Pareto-Verteilung die tatsächliche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Exzeße lediglich approximativ widerspiegelt.

<sup>17</sup>Man beachte, daß in die Schätzung lediglich die Exzeße über  $u$  einfließen, d.h. es gilt  $y_i > 0$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Somit ist die Likelihood-Funktion stets definiert.

Die sich im Maximum von  $\log L$  ergebenden Parameterwerte sind die gesuchten ML-Schätzwerte  $\widehat{\xi}_{ML}$  und  $\widehat{\sigma}_{ML}$ , d.h. es gilt notwendigerweise

$$\frac{\partial \log L}{\partial \xi} = \frac{1}{\widehat{\xi}_{ML}^2} \cdot \sum_{i=1}^k \log \left( 1 + \widehat{\xi}_{ML} \cdot \frac{y_i}{\widehat{\sigma}_{ML}} \right) - \left( 1 + \frac{1}{\widehat{\xi}_{ML}} \right) \cdot \sum_{i=1}^k \left( \frac{\widehat{\sigma}_{ML}}{y_i} + \widehat{\xi}_{ML} \right)^{-1} = 0$$

und

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = \frac{\widehat{\xi}_{ML}}{\widehat{\sigma}_{ML}} \cdot \left( 1 + \frac{1}{\widehat{\xi}_{ML}} \right) \cdot \sum_{i=1}^k \left( \frac{\widehat{\sigma}_{ML}}{y_i} + \widehat{\xi}_{ML} \right)^{-1} - \frac{k}{\widehat{\sigma}_{ML}} = 0.$$

Die Lösung muß auf numerischem Wege herbeigeführt werden.<sup>18</sup> Angemessene Startwerte können explorativ ermittelt werden, indem z.B. versucht wird, das (quasi-)affine Bildungsgesetz

$$\mathcal{E}(u+v) \approx \frac{\xi \cdot v + \sigma(u)}{1-\xi} = \frac{\xi}{1-\xi} \cdot v + \frac{\sigma(u)}{1-\xi}, \quad v \in \mathbb{D}_{\xi,0,\sigma(u)}^{GEV}$$

der empirischen EMF anhand des ermittelten ME-Plots zu bestimmen.

**Beispiel 9.4.1** Man betrachte den in Beispiel 7.3.1 ermittelten ME-Plot. Die Steigung der eingezeichneten Geraden beträgt etwa 3.26, wie sich anhand des Datenbefundes leicht feststellen läßt. Ein angemessener Startwert für  $\xi$  kann durch die Umformung

$$\frac{\xi}{1-\xi} \approx 3.26 \quad \longrightarrow \quad \xi \approx \frac{3.26}{1+3.26} = 0.76526$$

ermittelt werden. Als Startwert für  $\xi$  kommt damit z.B.  $\xi_0 = 0.75$  in Frage. Die im vorliegenden Fall ermittelte kritische Schwelle beträgt  $u := x_{(4629)} = 0.023554$ . Weiterhin gilt  $\widehat{\mathcal{E}}(x_{(4629)}) = 0.014925$ . Für  $\sigma$  läßt sich ein Startwert also mittels

$$0.014925 \approx \frac{\sigma(u)}{1-\xi} \quad \longrightarrow \quad \sigma(u) \approx 0.014925 \cdot (1 - 0.76526) = 0.0035035$$

bestimmen. Hier wäre ein angemessener Startwert z.B.  $\sigma_0 = 0.003$ . ○

#### 9.4.1.2 Eigenschaften der ML-Schätzung

Für den Fall  $\xi > -0.5$  läßt sich zeigen,<sup>19</sup> daß

$$(9.1) \quad \sqrt{k} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\xi}_{ML} - \xi \\ \frac{\widehat{\sigma}_{ML}}{\sigma} - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N(-M^{-1}B_u, M^{-1}), \quad u < x_F,$$

wobei

$$M^{-1} := \begin{pmatrix} (1+\xi)^2 & (1+\xi) \\ (1+\xi) & 2(1+\xi) \end{pmatrix}, \quad \xi > -0.5.$$

<sup>18</sup>Es empfiehlt sich, einen numerischen Algorithmus zu verwenden, bei dem sowohl das Iterationsverfahren als auch die Startwerte frei gewählt werden können.

<sup>19</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 356 und Smith [63], S. 1178.

$B_u = (b_1(u), b_2(u))'$  ist ein Vektor, der den Bias ausdrückt,<sup>20</sup> welcher mit wachsender Schwelle  $u$  gegen den Nullvektor strebt.<sup>21</sup> Im Falle exakt verallgemeinert Pareto-verteilter Exzeße gilt also  $B_u = \vec{0}$  und man erhält<sup>22</sup>

$$(9.2) \quad \sqrt{k} \cdot \begin{pmatrix} \widehat{\xi}_{ML} - \xi \\ \widehat{\sigma}_{ML} - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d} N \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (1+\xi)^2 & (1+\xi) \\ (1+\xi) & 2(1+\xi) \end{pmatrix} \right).$$

Das bedeutet also im wesentlichen

$$\widehat{\xi}_{ML} \simeq N \left( \xi, \frac{(1+\xi)^2}{k} \right), \quad k \text{ groß}$$

und

$$\widehat{\sigma}_{ML} \simeq N \left( \sigma, \frac{2 \cdot \sigma^2 (1+\xi)}{k} \right), \quad k \text{ groß.}$$

Die ML-Schätzer sind außerdem konsistent und asymptotisch effizient.<sup>23</sup>

#### 9.4.1.3 Test der Nullhypothese $F \in \text{MDA}(\Lambda)$

Eine wesentliche Begründung des in dieser Arbeit dargelegten semiparametrischen Ansatzes besteht in der Hypothese, daß Logrenditezeitreihen fat-tailed sind. Es soll nun gezeigt werden, wie diese Annahme empirisch überprüft werden kann.

Da Verteilungen  $F \in \text{MDA}(\Psi_\alpha)$  stets einen endlichen rechten Endpunkt  $x_F$  besitzen,<sup>24</sup> kommt der Weibull-Fall für Logrenditen nicht in Frage.<sup>25</sup> Der a priori gegebene Parameterraum für  $\xi$  ist somit  $[0, +\infty[$ . Man kann sich also auf die einfache Nullhypothese  $H_0 : F \in \text{MDA}(\Lambda) \Leftrightarrow \xi = 0$ , m.a.W. auf die Falsifikation des Gumbel-Falls, beschränken. Ein asymptotischer Test auf  $H_0$  kann leicht aus der Konvergenzaussage (9.1) gewonnen werden. Für die Verteilung von  $\widehat{\xi}_{ML}$  unter der Annahme  $\xi = 0$  gilt damit

$$\widehat{\xi}_{ML} \simeq N(-b_u, k^{-1}), \quad k \text{ groß,}$$

wobei  $b_u := b_1(u) + b_2(u)$  die Komponentensumme des Vektors  $B_u$  ist, mit

$$b_u \rightarrow 0, \quad u \rightarrow x_F.$$

Wird  $\widehat{\xi}_{ML}$  als Testgröße für die Nullhypothese  $H_0 : F \in \text{MDA}(\Lambda)$  gewählt, wobei  $H_0$  abgelehnt wird, wenn  $\widehat{\xi}_{ML} > \kappa$ , so gilt für die Irrtumswahrscheinlichkeit 1. Art

$$P(\widehat{\xi}_{ML} > \kappa \mid \xi = 0) = 1 - P(\widehat{\xi}_{ML} \leq \kappa \mid \xi = 0) \approx \overline{\Phi}(\sqrt{k}(\kappa + b_u)),$$

<sup>20</sup> Vgl. Abschnitt 7.2.3, S. 60 und Abschnitt 9.2, S. 68.

<sup>21</sup> Vgl. Smith [63], S. 1178ff.

<sup>22</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 357 und McNeil/Saladin [48], S. 9.

<sup>23</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 357. Mithin sind Konsistenz und asymptotische Effizienz allgemeine Eigenschaften von ML-Schätzern (vgl. Bosch [9], S. 340 und Mood/Graybill [50], S. 185).

<sup>24</sup> Vgl. Abschnitt 5.3.1, S. 31 i.V.m. Abschnitt 5.3.2, S. 35.

<sup>25</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 136.

woraus für das Signifikanzniveau  $\eta$  der kritische Bereich

$$\left] \kappa = \frac{\Phi^{\leftarrow}(1 - \eta)}{\sqrt{k}} - b_u, +\infty \right[$$

resultiert. Mit einer hinreichend hohen Schwelle  $u$  kann  $H_0$  also im Falle

$$\hat{\xi}_{ML} > \frac{\Phi^{\leftarrow}(1 - \eta)}{\sqrt{k}}$$

abgelehnt werden.<sup>26</sup>

**Beispiel 9.4.2** Für den Dow-Jones und den DAX ergeben sich folgende Anpassungen der verallgemeinerten Pareto-Verteilung an die jeweilige empirische Exzeßverteilung:

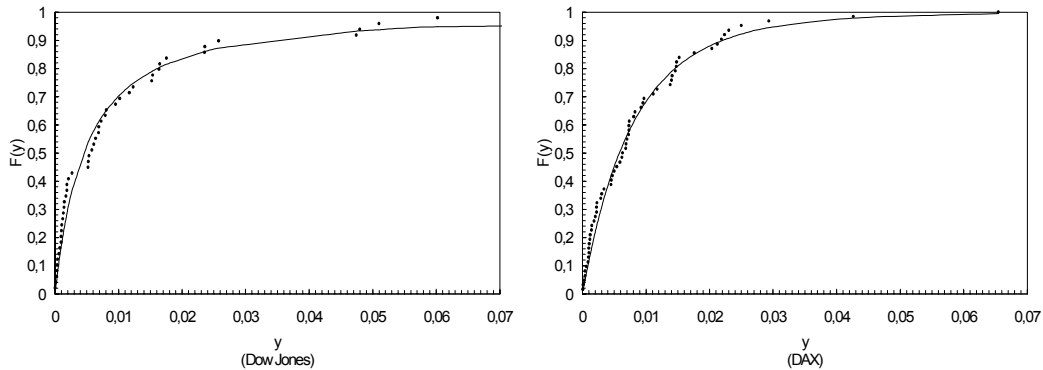


Abb. 8: GPD-Fit an die empirische Exzeßverteilung negativer Logrenditen (links: Dow-Jones, rechts: DAX).

Beim Dow-Jones wurden 49 Exzedenten bei einer kritischen Schwelle  $u = 0.023554$  in die Rechnung einbezogen, beim DAX waren es 62 Exzedenten und  $u = 0.018337$ . Die mit der ML-Methode ermittelten Parameterwerte lauten für den Dow-Jones  $\hat{\xi}_{ML} = 0.81333$  und  $\hat{\sigma}_{ML} = 0.0048413$  und für den DAX  $\hat{\xi}_{ML} = 0,16256$  und  $\hat{\sigma}_{ML} = 0,0078980$ .  $H_0$  kann für den Dow-Jones auf einem Signifikanzniveau von 0.1% abgelehnt werden, denn  $\hat{\xi}_{ML} > \Phi^{\leftarrow}(1 - 0.001) / \sqrt{49} = 0.44146$ . Für den DAX kann  $H_0$  hingegen nicht auf einem akzeptablen Signifikanzniveau abgelehnt werden. Selbst bei einem Signifikanzniveau von 10% unterschreitet  $\hat{\xi}_{ML}$  die kritische Grenze  $\Phi^{\leftarrow}(1 - 0.1) / \sqrt{62} = 0.16276$ .  $\circ$

#### 9.4.1.4 Intervallschätzung für $\xi$

Unterstellt man eine hinreichend hohe Schwelle  $u$ , so kann ein asymptotisches Konfidenzintervall auf dem Niveau  $\theta$  folgendermassen aus der Konvergenzaussage (9.2) konstruiert werden:

$$\begin{aligned} \theta &= \Phi(\Phi^{\leftarrow}(\theta)) \approx P\left(\frac{\sqrt{k}(\hat{\xi}_{ML} - \xi)}{1 - \xi} \leq \Phi^{\leftarrow}(\theta)\right) \\ &= P\left(\frac{\sqrt{k} \cdot \hat{\xi}_{ML} - \Phi^{\leftarrow}(\theta)}{\sqrt{k} + \Phi^{\leftarrow}(\theta)} \leq \xi\right), \quad \theta \in ]0, 1[, \quad k \text{ groß.} \end{aligned}$$

<sup>26</sup>In Anhang C werden die Ergebnisse des Tests auf dem Signifikanzniveau  $\eta = 5\%$  dargelegt. Zur Überprüfung der Fat-Tails-Hypothese wurden die 30 deutschen DAX-Aktien herangezogen. Die Hypothese  $H_0 : F \in \text{MDA}(\Lambda)$  wird abgelehnt, m.a.W. die Fat-Tails-Hypothese  $H_1 : F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$  ( $\alpha > 0$ ) wird angenommen, wenn  $\hat{\xi}_{ML}$  den Wert  $\kappa = 1.64485/\sqrt{k}$  überschreitet.

Besteht nach der explorativen Untersuchung eines ME-Plots und anschließendem Test auf die Nullhypothese  $F \in \text{MDA}(\Lambda)$  also die Vermutung  $F \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ , so erhält man mit

$$\left[ \frac{\sqrt{k} \cdot \widehat{\xi}_{ML} - \Phi^\leftarrow(\theta)}{\sqrt{k} + \Phi^\leftarrow(\theta)}, +\infty \right]$$

ein einseitiges asymptotisches  $\theta$ -Konfidenzintervall für  $\xi = 1/\alpha$ .<sup>27</sup>

### 9.4.2 Methode der wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente

Die Methode der wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente beruht auf HOSKING/WALLIS/WOOD.<sup>28</sup> Die genannten Autoren bezeichnen

$$w_{r,s,t} := E \left( X^r \cdot F^s(x) \cdot \overline{F}^t(x) \right), \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

allgemein als *wahrscheinlichkeitsgewichtetes Moment*<sup>29, 30</sup> da die Zufallsvariable  $X$  nicht wie beim gewöhnlichen Moment isoliert integriert wird, sondern eine Gewichtung anhand der Wahrscheinlichkeiten  $F(x)$  und  $\overline{F}(x)$  erfolgt.<sup>31</sup> Die Momente  $w_{r,0,0}$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) repräsentieren dabei die gewöhnlichen Momente.

#### 9.4.2.1 Motivation

Der große Vorteil der PWM-Methode ist algebraischer Natur, denn die wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente  $w_{1,s,0}$  oder  $w_{1,0,t}$  weisen in der Regel eine - im Gegensatz zu den gewöhnlichen Momenten  $w_{r,0,0}$  - einfache mathematische Struktur auf, wenn die Inverse von  $F$  in geschlossener Form existiert.<sup>32</sup> In diesem Fall kann eine praktische Beziehung zwischen den Momenten und den Parametern auch bei einer höheren Ordnung  $s$  bzw.  $t$  hergestellt werden, denn es gilt

$$w_{1,s,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot F^s(x) \, dF(x) = \int_0^1 F^\leftarrow(x) \cdot x^s \, dx$$

und

$$w_{1,0,t} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \overline{F}^t(x) \, dF(x) = \int_0^1 F^\leftarrow(x) \cdot (1-x)^t \, dx = \int_0^1 F^\leftarrow(1-x) \cdot x^t \, dx,$$

d.h. die Riemannschen Integrale können mit elementaren Mitteln berechnet werden. Der folgende Satz unterstreicht diesen Sachverhalt.

<sup>27</sup>Man kann im Prinzip stets von  $\xi \leq 1$  ausgehen, denn im Falle  $\xi > 1$  besäße die Verteilungsfunktion der Logrendite keinen endlichen Erwartungswert. Vgl. Satz 5.5.4 auf S. 43.

<sup>28</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 321. Hosking und Wallis entwickelten diese Methode in erster Linie zur Lösung hydrologischer Problemstellungen und gingen von einem in diesem Bereich üblichen Intervall  $-0.5 \leq \xi \leq 0.5$  aus. Vgl. Hosking/Wallis [31], S. 340 und Hosking/Wallis/Wood [32], S. 252.

<sup>29</sup>Engl.: Probability Weighted Moment (PWM).

<sup>30</sup>Vgl. Hosking/Wallis [31], S. 341 und Hosking/Wallis/Wood [32], S. 252.

<sup>31</sup> $F$  bezeichne die Verteilungsfunktion von  $X$ .

<sup>32</sup>Vgl. Hosking/Wallis/Wood [32], S. 252.

**Satz 9.4.1**  $X$  sei verallgemeinert Pareto-verteilt mit den Parametern  $\xi < 1$ ,  $\mu = 0$  und  $\sigma > 0$ . Dann gilt<sup>33</sup>

$$w_t := w_{1,0,t} = E \left( X \cdot \left( \overline{G}_\xi \left( \frac{X}{\sigma} \right) \right)^t \right) = \frac{\sigma}{(t+1)(t+1-\xi)}, \quad t \geq 0.$$

□

**Beweis:** Es gilt

$$w_t = \int_0^{+\infty} x \cdot \left( \overline{G}_\xi \left( \frac{x}{\sigma} \right) \right)^t dG_\xi \left( \frac{x}{\sigma} \right) = \int_0^{+\infty} x \cdot \left( 1 - G_\xi \left( \frac{x}{\sigma} \right) \right)^t dG_\xi \left( \frac{x}{\sigma} \right).$$

Durch die Substitution  $x = \sigma \cdot G_\xi^{\leftarrow}(y)$  ergibt sich

$$w_t = \int_0^1 \sigma \cdot G_\xi^{\leftarrow}(y) \cdot (1-y)^t dy = \sigma \cdot \int_0^1 G_\xi^{\leftarrow}(y) \cdot (1-y)^t dy.$$

Die Inverse der verallgemeinerten Pareto-Verteilung lautet für  $\xi \neq 0$ :

$$G_\xi^{\leftarrow}(y) = \frac{(1-y)^{-\xi} - 1}{\xi}.$$

Daraus resultiert

$$w_t = \sigma \cdot \int_0^1 \frac{(1-y)^{-\xi} - 1}{\xi} \cdot (1-y)^t dy$$

und nach der Substitution  $1-y = x$  schließlich

$$\begin{aligned} w_t &= \sigma \cdot \int_0^1 \frac{x^{-\xi} - 1}{\xi} \cdot x^t dx = \frac{\sigma}{\xi} \cdot \left[ \frac{x^{t+1-\xi}}{t+1-\xi} - \frac{x^{t+1}}{t+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{\sigma}{\xi} \cdot \left( \frac{1}{t+1-\xi} - \frac{1}{t+1} \right) = \frac{\sigma}{(t+1)(t+1-\xi)}. \end{aligned}$$

Ist  $\xi = 0$ , so lautet die Inverse der verallgemeinerten Pareto-Verteilung  $-\log(1-y)$ . Es läßt sich leicht nachweisen, daß in diesem Falle

$$w_t = \frac{\sigma}{(t+1)^2}$$

gilt, womit Satz 9.4.1 bewiesen ist. ■

Während  $w_t$  laut Satz 9.4.1 eine sehr einfache Form besitzt, ist das  $r$ -te gewöhnliche Moment einer verallgemeinert Pareto-verteilten Zufallsvariablen  $X$  im Gegensatz dazu durch

$$E(X^r) = \frac{\sigma^r}{\xi^{r+1}} \cdot \frac{\Gamma(\xi^{-1} - r)}{\Gamma(1 + \xi^{-1})} \cdot r!, \quad \xi < \frac{1}{r}, \quad r \in \mathbb{N}$$

<sup>33</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 165.

gegeben, wobei  $\Gamma$  die EULERSCHE Gammafunktion

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} \exp(-z) \cdot z^{x-1} dz, \quad x > 0$$

darstellt.<sup>34</sup>

### 9.4.2.2 Herleitung

Für die Schätzung der Parameter einer verallgemeinerten Pareto-Verteilung mit Lageparameter  $\mu = 0$  bieten sich die wahrscheinlichkeitsgewichteten Momente  $w_t$  an, wobei zur Ermittlung der gesuchten Schätzfunktionen lediglich  $w_0$  und  $w_1$  benötigt werden. Durch einfache Umstellung des Gleichungssystems

$$w_0 = \frac{\sigma}{1 - \xi} \quad \wedge \quad w_1 = \frac{\sigma}{2(2 - \xi)}$$

resultieren die Schätzfunktionen<sup>35</sup>

$$\widehat{\xi}_{PWM}(w_0, w_1) = \frac{w_0 - 4w_1}{w_0 - 2w_1}$$

und

$$\widehat{\sigma}_{PWM}(w_0, w_1) = \frac{2w_0w_1}{w_0 - 2w_1}.$$

Gemäß des Prinzips der Methode der Momente müssen die theoretischen Momente  $w_0$  und  $w_1$  zur Ermittlung der Schätzer durch ihre empirischen Äquivalente  $\widehat{w}_0$  und  $\widehat{w}_1$  ersetzt werden, wobei HOSKING/WALLIS/WOODS auf die erwartungstreuen Formen zurückgreifen.  $\widehat{w}_0$  ist dabei der Exzeßmittelwert über der Schwelle  $u$ :

$$\widehat{w}_0 := \int_0^{+\infty} y d\widehat{F}_n^{u \rightarrow}(y) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^{+\infty} y d \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{Y_i \leq y} = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k Y_{(i)} = \bar{Y}.$$

Das verzerrte empirische Moment  $\widehat{w}_1$  ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} \widehat{w}_1 &= \int_0^{+\infty} y \left(1 - \widehat{F}_n^{u \rightarrow}(y)\right) d\widehat{F}_n^{u \rightarrow}(y) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^{+\infty} y \left(1 - \widehat{F}_n^{u \rightarrow}(y)\right) d \sum_{i=1}^k \mathbb{1}_{Y_i \leq y} \\ &= \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k Y_{(i)} \cdot \left(1 - \widehat{F}_n^{u \rightarrow}(Y_{(i)})\right) = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k Y_{(i)} \cdot \left(1 - \frac{i}{k}\right) = \frac{1}{k^2} \cdot \sum_{i=1}^k (k - i) \cdot Y_{(i)}. \end{aligned}$$

Die erwartungstreu Form des empirischen Moments ergibt sich durch Multiplikation mit  $k/(k - 1)$ :<sup>36</sup>

$$\widehat{w}_1 := \frac{k}{k - 1} \cdot \widehat{w}_1 = \frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{k - i}{k - 1} \cdot Y_{(i)}.$$

<sup>34</sup> Vgl. z.B. Walter [65], S. 330.

<sup>35</sup> Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 358.

<sup>36</sup> Vgl. Hosking/Wallis [31], S. 341 und Hosking/Wallis/Woods [32], S. 252.

Die PWM-Schätzer für  $\xi$  und  $\sigma$  sind somit

$$\hat{\xi}_{PWM} = \frac{\bar{Y} - \frac{4}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{k-i}{k-1} \cdot Y_{(i)}}{\bar{Y} - \frac{2}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{k-i}{k-1} \cdot Y_{(i)}}$$

und

$$\hat{\sigma}_{PWM} = \frac{\bar{Y} \cdot \frac{2}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{k-i}{k-1} \cdot Y_{(i)}}{\bar{Y} - \frac{2}{k} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{k-i}{k-1} \cdot Y_{(i)}}$$

**Beispiel 9.4.3** Die PWM-Schätzwerte für die Exzeßverteilung des Dow-Jones und des DAX lauten:  $\hat{\xi}_{PWM} = 0,63643$  und  $\hat{\sigma}_{PWM} = 0,0054263$  (Dow-Jones),  $\hat{\xi}_{PWM} = 0,19733$  und  $\hat{\sigma}_{PWM} = 0,0075537$  (DAX). ○



# Kapitel 10

## Fallstudie

Betrachtet wird folgendes Portefeuille:

Portefeuillebestandteile	Anzahl	Preis <sup>1</sup>	Wert (in Euro)
BASF	1300	40.30	52390
BMW	7000	28.21	197470
Deutsche Bank	1500	66.18	99270
US-Dollar	85000	0.9252	78642
		$\Sigma$	427772

Tab. 3: Fiktives Portefeuille.

Auf Basis der historischen Preise  $p_t^{(k)}$  aller im Portefeuille enthaltenen Finanztitel konnte der historische Wertverlauf des betrachteten Portefeuilles nachgebildet werden:

$$v_t = \sum_{k=1}^K a^{(k)} p_t^{(k)}.$$

Als Zeiteinheit wurde ein Handelstag gewählt.  $a^{(k)}$  symbolisiert die Anzahl der Portefeuillekomponenten der Klasse  $k$  und  $K$  ist die Anzahl der im Portefeuille enthaltenen Klassen. Anschließend wurde die Zeitreihe der Logrenditen ermittelt, negativiert und in aufsteigender Reihenfolge sortiert. Daraus ließ sich der ME-Plot konstruieren, woraus die kritische Schwelle  $u$  abgeleitet wurde.

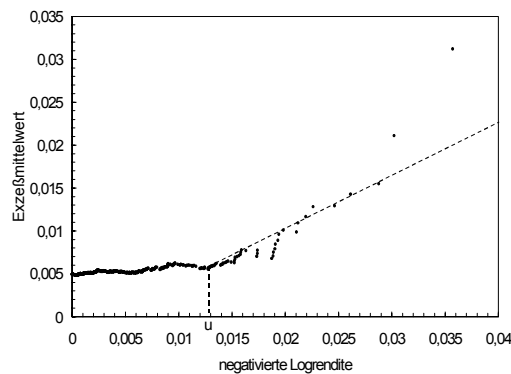


Abb. 9: ME-Plot eines fiktiven Portefeuilles.

<sup>1</sup>Kurse in Euro, Zeitpunkt: 21.10.1999, 19:00 Uhr MEZ, Börsenplatz: Frankfurt a.M.

Im vorliegenden Beispiel wurde als kritische Schwelle  $u = x_{(1220)} = 0.012829$  gewählt. Die Anzahl der Logrenditen betrug  $n = 1269$  und damit ergaben sich 49 Exzeße über der Schwelle  $u$ .

Die mit der ML-Methode geschätzten Parameter der verallgemeinerten Pareto-Verteilung lauten:<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}_{ML} &= 0.26463, \\ \widehat{\sigma}_{ML} &= 0.0042581.\end{aligned}$$

Die PWM-Schätzwerte lauten hingegen:

$$\begin{aligned}\widehat{\xi}_{PWM} &= 0.31233, \\ \widehat{\sigma}_{PWM} &= 0.0039311.\end{aligned}$$

Im folgenden wird für die Ermittlung der Portefeullerisikomaße die Shortfall-Wahrscheinlichkeit  $p = 0.001$  zugrundegelegt. Der mit Hilfe der ML-Methode geschätzte VaR lautet dann:<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\widehat{\text{VaR}}_{0.001}^{ML}(427772) &= 427772 \cdot \left(1 - \exp\left(-\left(0.012829 + \frac{0.0042581}{0.26463}\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.\cdot \left(\left(\frac{0.001 \cdot 1269}{49}\right)^{-0.26463} - 1\right)\right)\right)\right) \\ &= 427772 \cdot 0.038299 \approx 16383 \text{ (Euro)}.\end{aligned}$$

Mit der PWM-Methode erhält man weiterhin:

$$\begin{aligned}\widehat{\text{VaR}}_{0.001}^{PWM}(427772) &= 427772 \cdot \left(1 - \exp\left(-\left(0.012829 + \frac{0.0039311}{0.31233}\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.\left.\cdot \left(\left(\frac{0.001 \cdot 1269}{49}\right)^{-0.31233} - 1\right)\right)\right)\right) \\ &= 427772 \cdot 0.038866 \approx 16626 \text{ (Euro)}.\end{aligned}$$

Tritt ein 4-Jahre-Shortfall ein, so wird mit dem vorliegenden Portefeulle also mindestens ein Wertverlust von approximativ 16383 Euro bzw. approximativ 16626 Euro realisiert.

Der geschätzte SR beträgt<sup>4</sup>

$$\begin{aligned}\widehat{\text{SR}}_{0.001}^{ML}(427772) &= 427772 \cdot \left(1 - \frac{1 - 0.038299}{0.26463}\right. \\ &\quad \cdot \int_1^{+\infty} \exp\left(\left(0.012829 + \log(1 - 0.038299) - \frac{0.0042581}{0.26463}\right)(x - 1)\right) \\ &\quad \cdot x^{-\frac{1}{0.26463} - 1} dx \\ &= 427772 \cdot 0.052508 \approx 22462 \text{ (Euro)}\end{aligned}$$

<sup>2</sup>Mithin kann die Nullhypothese  $H_0 : F \in \text{MDA}(\lambda)$  für das fiktive Portefeulle auf einem Signifikanzniveau von 5% abgelehnt werden, denn  $\widehat{\xi}_{ML} > \kappa = 1.64485/\sqrt{49} = 0.23498$ .

<sup>3</sup>Vgl. Formel (7.5) auf S. 62.

<sup>4</sup>Vgl. Formel (8.2) auf S. 66. Der Integralterm kann mit Hilfe gängiger Computeralgebraprogramme gelöst werden.

bzw.

$$\begin{aligned}
 \widehat{\text{SR}}_{0.001}^{\text{PWM}}(427772) &= 427772 \cdot \left( 1 - \frac{1 - 0.038866}{0.31233} \right) \\
 &\quad \cdot \int_1^{+\infty} \exp \left( \left( 0.012829 + \log(1 - 0.038866) - \frac{0.0039311}{0.31233} \right) (x - 1) \right) \\
 &\quad \cdot x^{-\frac{1}{0.31233} - 1} dx \\
 &= 427772 \cdot 0.055360 \approx 23682 \text{ (Euro)}.
 \end{aligned}$$

Unter der Bedingung, daß ein 4-Jahre-Shortfall eintritt, hat der Anleger also mit einem Wertverlust von 22462 Euro bzw. 23682 Euro zu rechnen.

Diese Fallstudie soll die Bedeutung des Shortfall-Risk-Konzeptes unterstreichen. Verfolgt eine Institution das Ziel, Liquiditätsengpässe im Katastrophenfall zu vermeiden, so genügt es nicht, den VaR als Liquiditätsreserve zu halten. Vielmehr ist eine Orientierung am SR sinnvoller.

# Kapitel 11

## Gütevvergleich der VaR-Ermittlungsansätze

In diesem Kapitel werden die in Kapitel 6 vorgestellten Ansätze zur Ermittlung des VaR getestet und einem Gütevvergleich unterzogen.

### 11.1 Konzeptionelle Grundlagen

In technischer Hinsicht genügt die Ermittlung des relativen Portefeullerisikomaßes RaR. Die Berechnung des vom Anlagevolumen abhängigen VaR wäre prinzipiell auch möglich, jedoch hätte die Wahl eines bestimmten Anlagevolumens keine Auswirkung auf die Güte der einzelnen Ermittlungsansätze.<sup>1</sup>

Der nonparametrische Ansatz<sup>2</sup> wird in Form einer empirischen Quantilschätzung getestet, dem parametrischen Ansatz<sup>3</sup> liegt die N-Hypothese bezüglich der Logrenditen zugrunde und der semiparametrische Ansatz basiert auf der POT-Methode<sup>4</sup>. Bei der semiparametrischen Ermittlung des VaR werden die ML- und die PWM-Methode zur Schätzung der Parameter  $\xi$  und  $\sigma$  herangezogen. Somit ergeben sich insgesamt vier Methoden zur Ermittlung des VaR.

Um Fat Tails zu simulieren, wird auf die Annahme stabilverteilter Logrenditen zurückgegriffen. Die von MANDELBRÖT und FAMA eingeführte  $\alpha$ -stabile Verteilungsfamilie<sup>5</sup> eignet sich besonders gut, um Fat Tails mit beliebiger Ausprägung zu modellieren. Je Simulationsdurchlauf erfolgen  $n$  unabhängige Ziehungen auf der Grundlage einer vorgegebenen stabilen Verteilungsfunktion mit Skalenparameter  $c = 0.005$ ,<sup>6</sup> welche die Rolle der stationären Randverteilung der Logrendite übernimmt.

Als Gütekriterien werden der Bias und der *Mean-Squared-Error* (MSE) bzw. dessen Quadratwurzel herangezogen, um die diversen Methoden bei vorgegebener stabiler Verteilung

---

<sup>1</sup>Mithin kann der RaR als VaR einer Finanzanlage mit dem Volumen  $v = 1$  interpretiert werden.

<sup>2</sup>Vgl. Abschnitt 6.1, S.45ff.

<sup>3</sup>Vgl. Abschnitt 6.2, S. 51ff.

<sup>4</sup>Vgl. Abschnitt 7, S. 56ff.

<sup>5</sup>Vgl. Fama [22] und Mandelbrot [42].

<sup>6</sup> $c$  ist der Skalenparameter der Logrenditeverteilung. Beim Dow-Jones-Index wurde für  $c$  ein Wert von 0.005 ermittelt. Dieser kann daher als repräsentativ angesehen werden. Bezüglich der Schätzmethode siehe Bratley/Fox/Schrage [10], S. 155.

untereinander zu vergleichen. Bias und MSE bieten sich allerdings nicht an, wenn die Güte der VaR-Schätzung auf Basis einer vorgegebenen Methode, jedoch bei Variation der zugrundeliegenden stabilen Verteilung beurteilt werden soll,<sup>7</sup> denn der Wechsel der Verteilung führt zugleich zu einer Änderung des gesuchten RaR. Sowohl Bias als auch MSE müssen zu diesem Zweck in einer auf den RaR bezogen relativen Form wiedergegeben werden:<sup>8</sup>

$$\text{RBias}(\widehat{\text{RaR}}_p) := E\left(\frac{\widehat{\text{RaR}}_p - \text{RaR}_p}{\text{RaR}_p} \parallel \text{RaR}_p\right) = \frac{\text{Bias}(\widehat{\text{RaR}}_p)}{\text{RaR}_p}$$

und

$$\text{RMSE}(\widehat{\text{RaR}}_p) := E\left(\left(\frac{\widehat{\text{RaR}}_p - \text{RaR}_p}{\text{RaR}_p}\right)^2 \parallel \text{RaR}_p\right) = \frac{\text{MSE}(\widehat{\text{RaR}}_p)}{\text{RaR}_p^2}.$$

Zum Zwecke der Simulation kann von symmetrischen Logrenditeverteilungen ausgegangen werden. Darüber hinaus hat die Wahl des Verteilungszentrums keine Auswirkung auf die Güte der VaR-Ermittlung. Durch eine Modifikation des Verteilungszentrums findet lediglich eine Verlagerung der Verteilung statt. Weder die Gestalt  $\xi$  noch die Skala  $\sigma$  der Logrenditeverteilung werden dadurch tangiert. Ebenso wenig hängt die Güte einer Quantilschätzung im Rahmen der empirischen Methode als auch die des parametrischen Fits einer Normalverteilung von dem Verteilungszentrum ab. Damit kann man sich bei der Simulation auf symmetrische stabile Verteilungen um das Lagezentrum Null beschränken.<sup>9</sup>

Bei der folgenden Untersuchung wird von drei verschiedenen Stichprobenumfängen (= Anzahl der realisierten Logrenditen) ausgegangen:  $n = 5000$ ,  $n = 1000$  und  $n = 250$ . Somit werden Logrenditezeitreihen der Länge 20 Jahre, 4 Jahre und 1 Jahr simuliert.<sup>10</sup> Ferner basieren die Schätzungen auf den folgenden Shortfall-Wahrscheinlichkeiten:  $p = 0.01$ ,  $p = 0.001$  und  $p = 0.0004$ . Damit werden die Risiken eines 100-Tage-Shortfalls, eines 4-Jahre-Shortfalls und eines 10-Jahre-Shortfalls quantifiziert. Mit jeder Methode werden in Abhängigkeit von Stichprobenumfang und Shortfall-Wahrscheinlichkeit jeweils 100000 Schätzungen produziert und anschließend Bias und MSE in der relativen und in der absoluten Form ermittelt.<sup>11</sup>

Da die Ermittlung der kritischen Schwelle anhand eines ME-Plots nicht in jedem Durchlauf separat erfolgen kann, wird für jede Konstellation von Datenvolumen und Verteilung ein bestimmtes  $q$ -Quantil als kritische Schwelle festgelegt. Die Wahl des Niveaus  $q$  erfolgt nach explorativer Analyse einiger exemplarisch simulierter ME-Plots. Dabei wird die „repräsentative“ kritische Schwelle  $F^{\leftarrow}(q)$  gesucht, ab der das affine Bildungsgesetz regelmäßig beobachtet werden kann. Dabei gilt es zu beachten, daß  $q$  nicht zu klein sein darf, um einen unnötig hohen Bias zu vermeiden.<sup>12</sup>

<sup>7</sup> Vgl. McNeil/Saladin [48], S. 11f und eine Andeutung bei Smith [63], S. 1193.

<sup>8</sup> Hierbei bedeuten „RBias“ *Relative-Bias* und „RMSE“ *Relative-Mean-Squared-Error*.

<sup>9</sup> Unter diesen Umständen ist eine nachträgliche Negativierung der Logrenditen redundant.

<sup>10</sup> Es werden 250 Handelstage pro Jahr angenommen.

<sup>11</sup> Die Simulation wurde unter Aptech Systems GAUSS durchgeführt.

<sup>12</sup> Vgl. Abschnitt 7.2.3, S. 60.

## 11.2 Eigenschaften stabiler Verteilungen

**Definition 11.2.1 (Stabile Verteilung)** Eine Zufallsvariable  $X$  bzw. ihre Randverteilung  $F$  ist stabil, wenn zwei Funktionen  $\sigma(a, b) > 0$  und  $\mu(a, b) \in \mathbb{R}$  existieren, so daß für eine einfache Zufallsstichprobe  $X_1, X_2$  aus  $X$  gilt.<sup>13</sup>

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} \sigma(a, b) X + \mu(a, b), \quad \forall a, b \geq 0.$$

□

Die bekannteste stabile Verteilungsfamilie ist die Normalverteilung, denn für eine einfache Zufallsstichprobe  $X_1, X_2$  aus einer Zufallsvariablen  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  gilt:

$$aX_1 + bX_2 \sim N((a+b)\mu, (a^2 + b^2)\sigma^2),$$

d.h.

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{d}{=} \sqrt{a^2 + b^2} \cdot X + (a + b - \sqrt{a^2 + b^2})\mu.$$

**Satz 11.2.2 (Spektraldarstellung der stabilen Verteilungsfamilie)** Die Familie der nicht-degenerierten stabilen Verteilungen ist durch folgende charakteristische Funktion gekennzeichnet.<sup>14</sup>

$$\phi_X(t) := E(\exp(iXt)) = \exp(i\gamma t - |ct|^\alpha (1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot z(t, \alpha))), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

wobei  $\gamma \in \mathbb{R}$ ,  $c > 0$ ,  $\alpha \in ]0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$  und

$$z(t, \alpha) := \begin{cases} \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \cdot \log(|t|) & \alpha = 1 \end{cases}.$$

□

$\gamma$  ist der Lageparameter,  $\beta$  ist der Schiefeparameter und  $c$  ist der Skalenparameter der Verteilung. Für  $\beta > 0$  ist die Verteilung rechtsschief et vice versa. Ist  $\beta = 0$ , erhält man eine symmetrische Verteilung um das Zentrum  $\gamma$ .

Eine alternative Darstellung der charakteristischen Funktion ist

$$\phi_X(t) = \exp(i\gamma t - \delta |t|^\alpha (1 - i\beta \cdot \text{sign}(t) \cdot z(t, \alpha))), \quad \delta := c^\alpha, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall stellt  $\delta$  den Skalenparameter dar.<sup>15</sup> Allerdings hat sich in der Finanzmarkttheorie die Darstellung laut Satz 11.2.2 durchgesetzt.<sup>16</sup>

In Beispiel 5.4.2 auf S. 38 wurde gezeigt, daß sich stabile Verteilungen mit  $\alpha < 2$  im MDA der Fréchet-Verteilung  $\Phi_\alpha$  befinden.  $\alpha$  bestimmt das Gewicht der Flanke und wird als

<sup>13</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 71.

<sup>14</sup>Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 71. Würde man  $c = 0$  zulassen, wären degenerierte Verteilungen inbegriffen, welche zwar trivialerweise stabil, jedoch nicht von Interesse sind. Vgl. Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 72. Für die hier dargestellte Version der charakteristischen Funktion siehe z.B. Schmid/Trede [62], S. 25 und in symmetrischer Form Bratley/Fox/Schrage [10], S. 154.

<sup>15</sup>Vgl. Fielitz/Rozelle [23], S. 28 und Lau/Lau/Wingender [39], S. 217.

<sup>16</sup>Vgl. Fielitz/Rozelle [23], S. 29.

charakteristischer Exponent bezeichnet.<sup>17</sup> Die zugehörige Verteilung heißt dann  $\alpha$ -stabil. Je kleiner  $\alpha$ , desto leptokurtischer ist die Verteilung und desto mehr Wahrscheinlichkeitsmasse lagert in der Verteilungsperipherie. Für  $\alpha \in ]0, 2[$  sind lediglich die Momente der Ordnung  $r < \alpha$  endlich definiert.<sup>18</sup> Dies folgt aus  $F_\alpha \in \text{MDA}(\Phi_\alpha)$ .<sup>19</sup> Folglich ist der Mittelwert lediglich für  $\alpha > 1$  und die Varianz lediglich für  $\alpha = 2$  endlich definiert.<sup>20</sup>

Für  $\alpha = 2$  und  $\beta = 0$  resultiert die Normalverteilung  $N(\gamma, 2c^2)$ , für  $\alpha = 1$  und  $\beta = 0$  die Cauchy-Verteilung mit Lageparameter  $\gamma$  und Skalenparameter  $c$  und für  $\alpha = 1/2$  und  $\beta = \pm 1$  die stabile inverse Normalverteilung.<sup>21</sup>

**Lemma 11.2.3** *Sei  $X$  eine symmetrische  $\alpha$ -stabile Zufallsvariable mit der charakteristischen Funktion  $\phi_X$ . Die Zufallsvariable  $aX + b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) ist dann ebenfalls symmetrisch  $\alpha$ -stabil mit Lageparameter  $\gamma' = a\gamma + b$  und Skalenparameter  $c' = |ac|$ .  $\square$*

**Beweis:** Die charakteristische Funktion einer beliebigen Zufallsvariablen  $aX + b$  lautet generell<sup>22</sup>

$$\phi_{aX+b}(t) = \exp(ibt) \cdot \phi_X(at).$$

Man verwende nun die charakteristische Funktion aus Satz 11.2.2, wobei man  $\beta = 0$  setzt.  $\blacksquare$

Die hier dargestellte Form der charakteristischen Funktion hat somit den großen Vorteil, daß eine LS-Transformation einer symmetrisch stabilen Zufallsvariablen leicht auf die bereits vorhandenen Lage- und Skalenparameter übertragbar ist. Die Verteilungsfunktion einer  $\alpha$ -stabilen Zufallsvariablen mit Lageparameter  $\gamma \in \mathbb{R}$  und Skalenparameter  $c > 0$  ist laut Lemma 11.2.3 nichts anderes als  $F_\alpha\left(\frac{x-\gamma}{c}\right)$ , wobei  $F_\alpha$  die Standard-Stabile-Verteilungsfunktion repräsentiert.<sup>23</sup>

Da insbesondere die extremen Quantile der annahmegemäß um  $\gamma = 0$  symmetrischen Lognormalverteilung von Interesse sind, ist  $x/c$  eine bezogen auf  $F_\alpha$  große Zahl. In diesem Fall kann die Standard-Stabile-Verteilungsfunktion mit Hilfe der folgenden Reihendarstellung approximiert werden:<sup>24</sup>

$$(11.1) \quad F_\alpha(x) = 1 + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{\Gamma(\alpha i)}{i! x^{\alpha i}} \cdot \sin\left(\frac{i\pi\alpha}{2}\right).$$

Wenn das gesuchte Quantil jedoch nicht extrem hoch ist, stabilisiert sich die Approximationsformel (11.1) erst nach sehr vielen Reihengliedern. In diesem Fall bietet sich eher folgende Approximationsformel an:<sup>25</sup>

$$(11.2) \quad F_\alpha(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2i-1}{\alpha}\right)}{(2i-1)!} \cdot x^{2i-1}.$$

<sup>17</sup>  $\alpha$  ist zugleich der Flankenindex der stabilen Verteilung. Vgl. Abschnitt 5.1, S. 28.

<sup>18</sup> Vgl. Bratley/Fox/Schrage [10], S. 154.

<sup>19</sup> Vgl. Satz 5.5.4 auf S. 43.

<sup>20</sup> Vgl. Eberlein/Keller [14], S. 8 und Fielitz/Rozelle [23], S. 28. In diesem Fall ist  $\gamma$  der Mittelwert.

<sup>21</sup> Vgl. Bratley/Fox/Schrage [10], S. 154, Eberlein/Keller [14], S. 7f, Embrechts/Klüppelberg/Mikosch [16], S. 74, Fielitz/Rozelle [23], S. 28, Hoffmann-Jørgensen [30], S. 350 und Schmid/Trede [62], S. 25.

<sup>22</sup> Vgl. z.B. Fisz [24], S. 137.

<sup>23</sup> Dabei handelt es sich um eine um Null symmetrische  $\alpha$ -stabile Verteilung mit Skalenparameter 1.

<sup>24</sup> Vgl. Bratley/Fox/Schrage [10], S. 155. Die extremen Quantile können anhand der Reihendarstellung numerisch ermittelt werden. Man erzielt in der Regel bereits für die ersten 20 Reihenglieder eine hinreichend genaue Approximation.

<sup>25</sup> Vgl. Bratley/Fox/Schrage [10], S. 154.

## 11.3 Analyse der Simulationsergebnisse

### 11.3.1 Vorbemerkungen

Die Simulationsergebnisse befinden sich in tabellarischer Form in Anhang B. Es existieren insgesamt 9 Tabellen. Die ersten drei Tabellen enthalten die Ergebnisse für  $p = 0.01$ , die zweiten drei für  $p = 0.001$  und die letzten drei für  $p = 0.0004$ . Innerhalb dieser Dreiergruppen deckt jeweils die erste Tabelle den Fall  $n = 250$ , die zweite den Fall  $n = 1000$  und die dritte den Fall  $n = 5000$  ab. In jeder Tabelle wurden die Simulationsergebnisse für die drei alternativen Flankenindizes<sup>26</sup>  $\alpha = 1.9$ ,  $\alpha = 1.7$  und  $\alpha = 1.5$  spaltenweise nebeneinandergestellt. Für jede untersuchte VaR-Ermittlungsmethode wurden der Erwartungswert des RaR-Schätzers (EW), der Bias, der relative Bias (RBias), die Varianz des RaR-Schätzers (Var), der Mean-Squared-Error (MSE) sowie dessen Quadratwurzel, der relative Mean-Squared-Error (RMSE) und dessen Quadratwurzel ermittelt.

Mit Ausnahme des  $\text{RaR}_{0.01}$  für  $\alpha = 1.9$  konnten alle RaR-Werte mittels der Approximationsformel (11.1) ermittelt werden. Für  $\text{RaR}_{0.01}$  im Falle  $\alpha = 1.9$  mußte hingegen auf die Approximationsformel (11.2) zurückgegriffen werden.<sup>27</sup> Die Niveaus  $q$  der kritischen Schwellen hängen vom Stichprobenumfang  $n$  ab. Für  $n = 250$  wurde  $q = 0.8$ , für  $n = 1000$  wurde  $q = 0.95$  und für  $n = 5000$  wurde  $q = 0.97$  gewählt.

Für die Flankenindizes  $\alpha = 1.9$  und  $\alpha = 1.7$  konnten im Falle  $n = 250$  keine ML-Schätzungen realisiert werden. Der Lösungsalgorithmus für das ML-Gleichungssystem führte regelmäßig zu einer Überschreitung des zulässigen Variablenbereichs. Es hat sich gezeigt, daß das ML-Lösungsverfahren umso anfälliger für fehlerbedingte Programmabbrüche wurde, je kleiner die Anzahl der betrachteten Exzeße und je größer der Flankenindex  $\alpha$  war. Aus diesem Grund mußte für die Applikation der ML-Methode im Falle  $n = 1000$  und  $\alpha = 1.9$  auf das Niveau  $q = 0.95$  der kritischen Schwelle zugunsten des Niveaus  $q = 0.9$  verzichtet werden.

Es läßt sich ein typischer Trade-Off zwischen Bias und MSE verschiedener VaR-Ermittlungsmethoden beobachten. In diesem Fall muß prinzipiell zwischen den zwei Gütekriterien abgewogen werden. In der vorliegenden Arbeit wurde zugunsten des Bias entschieden, da primär das Ziel einer möglichst unverzerrten Schätzung des VaR verfolgt wird. Darüber hinaus läßt sich feststellen, daß der Bias zwischen den einzelnen Ermittlungsmethoden regelmäßig stärker schwankt, als der MSE.

### 11.3.2 Analyse

Allgemein läßt sich festhalten, daß der parametrische Ansatz auf Basis der N-Hypothese<sup>28</sup> bei einer Shortfall-Wahrscheinlichkeit von  $p = 0.01$  stets zu einer Überschätzung des VaR führt. Der mittlere Teil einer Normalverteilung ist breiter, als der einer  $\alpha$ -stabilen Verteilung ( $\alpha < 2$ ). Damit sind relativ moderate Quantile, wie etwa  $F^{\leftarrow}(0.01)$ , bei der Normalverteilung weiter vom Verteilungszentrum entfernt, als bei einer  $\alpha$ -stabilen Verteilung.

<sup>26</sup>Der für Logrenditen geschätzte charakteristische Exponent liegt typischerweise im Bereich  $1.5 \leq \alpha \leq 2$ . Vgl. Lau/Lau/Wingender [39], S. 217 und Fielitz/Rozelle [23], S. 28.

<sup>27</sup>Es empfiehlt sich, bei der Approximation ein geeignetes Tabellenkalkulationsprogramm zu verwenden. Auf diese Weise hat man einen guten Überblick über das Stabilisierungsverhalten der in den Approximationsformeln enthaltenen Reihen.

<sup>28</sup>Wird im folgenden als *Normalverteilungsmethode* (N-Methode) bezeichnet.



Lediglich extreme Quantile, wie etwa  $F^-(0.001)$ , werden durch die Normalverteilungsannahme systematisch unterschätzt. Werden Shortfall-Wahrscheinlichkeiten  $p \geq 0.001$  betrachtet, so führt die N-Methode also regelmäßig zu einer starken Unterschätzung des VaR. Die Schätzungen mit der N-Methode sind grundsätzlich so stark verzerrt, daß diese ausnahmslos abgelehnt werden muß.

Man betrachte zunächst den Fall  $\alpha = 1.9$ . Die den Schätzungen zugrundeliegende simulierte Logrenditeverteilung ist also in geringem Maße fat-tailed. Für eine Shortfall-Wahrscheinlichkeit von  $p = 0.01$  dominiert die empirische Methode über alle anderen Methoden. Sie weist sowohl beim Bias, als auch beim MSE die geringsten Fehlerwerte auf.<sup>29</sup> Für den Stichprobenumfang  $n = 250$  sind die PWM-Methode und die N-Methode hinsichtlich des Bias gleichwertig.<sup>30</sup> Die PWM-Methode besitzt jedoch einen deutlich geringeren MSE, womit diese gegenüber der N-Methode zu bevorzugen ist. Für  $n \geq 1000$  dominiert die PWM-Methode über die N-Methode. Innerhalb des semiparametrischen Ansatzes ist die PWM-Methode sowohl hinsichtlich des Bias als auch hinsichtlich des MSE der ML-Methode stets überlegen, wobei sich dieser Sachverhalt mit steigendem Stichprobenumfang relativiert.

Ist  $p = 0.001$ , so besitzt die empirische Methode bei einem Stichprobenumfang von  $n = 250$  nur einen halb so großen Bias wie die PWM-Methode. Allerdings ist die empirische Methode bei diesem kleinen Stichprobenumfang durch einen deutlich höheren MSE gekennzeichnet. Somit können beide Methoden in diesem Fall als gleichwertig angesehen werden. Im Falle  $n = 1000$  dominiert die PWM-Methode über die empirische Methode. Sowohl Bias als auch MSE sind geringer als bei der empirischen Ermittlung des VaR. Die PWM-Methode führt lediglich zu einer schwachen Unterschätzung des VaR. Die ML-Methode ist hinsichtlich des Bias der PWM-Methode deutlich unterlegen. Auch bei einem Stichprobenumfang von  $n = 5000$  ist die PWM-Methode zu bevorzugen, wobei sich das bestehende Gefälle zwischen der PWM- und der ML-Methode fortsetzt.

Bei einer Shortfall-Wahrscheinlichkeit von  $p = 0.0004$  und einem Stichprobenumfang von  $n = 250$  dominiert die PWM-Methode über die empirische Methode. Allerdings ist selbst bei Anwendung der PWM-Methode ein starker negativer Bias zu verzeichnen. Mit  $n \geq 1000$  verringert sich die Verzerrung der empirischen Methode deutlich und diese ist damit sowohl der PWM-, als auch der ML-Methode überlegen. Die semiparametrischen Methoden weisen dabei jedoch den geringeren MSE auf.

Geht man von einem Flankenindex  $\alpha = 1.7$ , d.h. von einem mittleren Flankengewicht aus, so ergeben sich folgende Erkenntnisse: Die PWM-Methode besitzt für eine Shortfall-Wahrscheinlichkeit von  $p = 0.01$  eine deutlich geringere Verzerrung als die ML-Methode. Ab  $p = 0.001$  kehrt sich dieses Verhältnis um: Die PWM-Methode führt regelmäßig zu einer deutlich stärkeren negativen Verzerrung als die ML-Methode. Dieses Gefälle wird umso größer, je kleiner die Shortfall-Wahrscheinlichkeit ist. Mit sinkendem  $p$  steigt also die Überlegenheit der ML-Methode gegenüber der PWM-Methode.

Wird  $p = 0.01$  vorausgesetzt, so dominiert für  $n = 250$  die PWM-Methode über alle anderen Methoden.<sup>31</sup> Bei einem Stichprobenumfang von  $n = 1000$  dominiert ebenfalls die PWM-Methode mit einem vernachlässigbar kleinem Bias. In beiden Fällen kann dabei eine schwache Überschätzung des VaR konstatiert werden. Bei einem Stichprobenumfang von

<sup>29</sup>Mit Ausnahme des Falls  $n = 5000$ . Hier ist ein vernachlässigbar kleiner Unterschied im MSE zugunsten der PWM-Methode zu verzeichnen.

<sup>30</sup>Man beachte, daß die ML-Methode bei diesem Stichprobenumfang nicht verfolgt werden konnte.

<sup>31</sup>Der geringe Unterschied im Bias zugunsten der empirischen Methode kann vernachlässigt werden. Man beachte, daß die PWM-Methode dafür einen deutlich geringeren MSE aufweist.

$n = 5000$  dominiert hingegen die empirische Methode über alle anderen Methoden, wobei jedoch der Güteunterschied zu den semiparametrischen Ansätzen gering ist.

Für  $p = 0.001$  und  $n = 250$  läßt sich keine klare Entscheidung hinsichtlich der empirischen und der PWM-Methode treffen. Die empirische Methode besitzt einen kleineren Bias, wohingegen die PWM-Methode einen geringeren MSE aufweist. Bei einem Stichprobenumfang von  $n \geq 1000$  dominiert eindeutig die ML-Methode über alle anderen Methoden. Diese weist sowohl für  $n = 1000$  als auch für  $n = 5000$  eine vernachlässigbar kleine Verzerrung auf. Hinsichtlich des Bias sind die PWM-Methode und die empirische Methode für  $n = 1000$  gleichwertig, für  $n = 5000$  ist jedoch die empirische Methode überlegen.

Für  $p = 0.0004$  gilt im Prinzip das gleiche, wie für  $p = 0.001$ , jedoch sind zwei Ausnahmen zu beachten: Einerseits kann für  $n = 250$  eine deutliche Dominanz der PWM-Methode über die empirische Methode konstatiert werden,<sup>32</sup> andererseits ist diese bereits ab  $n = 1000$  hinsichtlich des Bias der PWM-Methode überlegen.

Als letztes sei der Flankenindex  $\alpha = 1.5$  betrachtet. Es handelt sich also um eine simulierte Logrenditeverteilung mit extrem breiten Flanken. Das für den Flankenindex  $\alpha = 1.7$  festgestellte Bias-Gefälle zwischen der ML- und der PWM-Methode ab der Shortfall-Wahrscheinlichkeit  $p = 0.001$  tritt auch für  $\alpha = 1.5$  zum Vorschein.

Ist  $p = 0.01$  und  $n = 250$ , so dominiert die PWM-Methode über alle anderen Methoden.<sup>33</sup> Für  $n = 1000$  ist jedoch die ML-Methode zu bevorzugen. Diese weist den geringsten Bias und einen moderaten MSE auf, wobei es zu einer geringfügigen Überschätzung des VaR kommt. Für  $n = 5000$  können die ML-, die PWM- und die empirische Methode als gleichwertig angesehen werden.

Wird die Shortfall-Wahrscheinlichkeit  $p = 0.001$  vorausgesetzt, sind im Falle  $n = 250$  die semiparametrischen Methoden zu bevorzugen. Es kommt jedoch bei allen Methoden zu einer starken Unterschätzung des VaR. Eine eindeutige Überlegenheit zwischen der ML- und der PWM-Methode ist hierbei nicht festzustellen, vielmehr gilt der erwähnte Trade-Off zwischen Bias und MSE. Hinsichtlich des Bias kann die empirische Methode mit den semiparametrischen Methoden konkurrieren, jedoch weist diese einen deutlich höheren MSE auf. Für  $n \geq 1000$  ist eindeutig die ML-Methode gegenüber allen anderen Methoden zu bevorzugen. Diese besitzt eine vernachlässigbar kleine Verzerrung mit einer leichten Überschätzung des VaR. Darüber hinaus ist auch hier die empirische Methode bei einem Stichprobenumfang von  $n = 5000$  der PWM-Methode aufgrund ihres geringen Bias überlegen.

Für  $p = 0.0004$  gilt im wesentlichen das gleiche, wie für  $p = 0.001$ . Die empirische Methode besitzt für  $n = 250$  jedoch eine deutlich größere negative Verzerrung, als die beiden semiparametrischen Methoden.

Um die Entwicklung des Schätzgüte einer vorgegebenen VaR-Ermittlungsmethode bei Variation des Flankenindex zu analysieren, muß auf die relativen Gütekriterien RBias und RMSE zurückgegriffen werden. Dabei läßt sich allgemein festhalten, daß der RMSE bei allen Methoden mit sinkendem Flankenindex zunimmt. Somit beschränkt sich die weitere Analyse auf den RBias.

Bei einer Shortfall-Wahrscheinlichkeit von  $p = 0.01$  sind die ML- und die PWM-Methode prinzipiell umso verzerrter (im Sinne des RBias), je größer der Flankenindex ist. Das Umgekehrte gilt für die N-Methode und für die empirische Methode, wobei der Unterschied

<sup>32</sup>Trotzdem kommt es mit  $n = 250$  zu einer starken Unterschätzung des VaR.

<sup>33</sup>Man beachte, daß im Falle  $\alpha = 1.5$  die ML-Methode sogar für  $n = 250$  realisiert werden konnte.

im RBias bei der empirischen Methode mit zunehmendem Stichprobenumfang sukzessive verschwindet. Ist  $p = 0.001$ , so beinhaltet die ML-Methode für  $\alpha = 1.9$  den höchsten RBias. Dieser ist für  $\alpha = 1.7$  und für  $\alpha = 1.5$  hingegen vernachlässigbar klein, wobei ein relativ leichter Zuwachs von  $\alpha = 1.7$  nach  $\alpha = 1.5$  festzustellen ist. Bei allen anderen Methoden steigt der RBias jedoch mit sinkendem Flankenindex, und der Zuwachs von  $\alpha = 1.7$  nach  $\alpha = 1.5$  ist im allgemeinen geringer, als der von  $\alpha = 1.9$  nach  $\alpha = 1.7$ . Beträgt die Shortfall-Wahrscheinlichkeit schließlich  $p = 0.0004$ , so findet mit der ML-Methode im Falle  $\alpha = 1.9$  eine starke Unterschätzung des VaR statt, während für die restlichen Flankenindizes eine leichte Überschätzung des VaR festzustellen ist. Bei der N-Methode steigt der RBias mit sinkendem Flankenindex, wobei auch hier der Zuwachs von  $\alpha = 1.7$  nach  $\alpha = 1.5$  im allgemeinen geringer ist, als der von  $\alpha = 1.9$  nach  $\alpha = 1.7$ . Für die restlichen Methoden lassen sich keine einheitlichen Tendenzen feststellen.

### 11.3.3 Optimale Auswahl der VaR-Ermittlungsmethode

Auf Basis der im letzten Abschnitt gewonnenen Erkenntnisse bezüglich der Güte der einzelnen VaR-Ermittlungsmethoden lassen sich folgende Empfehlungen für die optimale Methodenauswahl in Abhängigkeit von Shortfall-Wahrscheinlichkeit, Stichprobenumfang und Flankenindex aussprechen:

$\alpha = 1.9$	$p = 0.01$	$p = 0.001$	$p = 0.0004$
$n = 250$	Emp	Emp/PWM	PWM
$n = 1000$	Emp	PWM	Emp
$n = 5000$	Emp	PWM	Emp
$\alpha = 1.7$	$p = 0.01$	$p = 0.001$	$p = 0.0004$
$n = 250$	PWM	Emp/PWM	PWM
$n = 1000$	PWM	ML	ML
$n = 5000$	Emp	ML	ML
$\alpha = 1.5$	$p = 0.01$	$p = 0.001$	$p = 0.0004$
$n = 250$	PWM	PWM/ML	PWM/ML
$n = 1000$	ML	ML	ML
$n = 5000$	Emp/PWM/ML	ML	ML

Tab. 4: Optimale Auswahl der VaR-Ermittlungsmethode.

## Kapitel 12

# Fazit und Ausblick

Die vorliegende Arbeit hatte im wesentlichen zwei Ziele: Einerseits sollten die diversen Ansätze zur Ermittlung des VaR dargestellt und verglichen werden, wobei der Schwerpunkt auf der Darstellung und theoretischen Begründung des semiparametrischen Ansatzes lag. Andererseits sollte eine exakte Unterscheidung zwischen bedingten und unbedingten Portefeullerisikomaßen vorgenommen werden und darüber hinaus das Value-at-Risk-Konzept mit dem Shortfall-Risk-Konzept erweitert werden. Mit dem SR kann das Verlustpotential eines Finanzportefeulles quantifiziert werden. Im Gegensatz zum Value-at-Risk-Konzept fließt beim Shortfall-Risk-Konzept zusätzlich die Information über die Verteilung extremer Verluste in die Berechnung des Marktrisikos ein.

Es wurde gezeigt, daß die Ermittlung des VaR auf der Grundlage der N-Hypothese grundsätzlich den anderen Methoden unterlegen ist. Ferner stellte sich heraus, daß die Ermittlung des VaR von Finanzportefeulles mit Methoden der Extremwerttheorie der empirischen Methode überlegen ist, wenn die theoretische Logrenditeverteilung fat-tailed ist und eine Quantifizierung extrem seltener Risikoszenarien erfolgen soll. Sollen lediglich „normale“, d.h. sich oft wiederholende Turbulenzen auf den Finanzmärkten betrachtet werden, ist dagegen die empirische Methode zu bevorzugen. In diesem Fall reicht der Rückgriff auf die Ordnungsgrößenstatistik aus.

Die Fat-Tails-Hypothese bildet die Grundlage für die Anwendung von Methoden der Extremwerttheorie. Es ist jedoch zu vermuten, daß die Fat-Tails-Hypothese oftmals erst durch die Betrachtung langer Finanzzeitreihen bestätigt werden kann. Dies ist mit der Existenz von Volatilitätsclustern zu begründen. Mit der Länge der Zeitreihe steigt die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere Volatilitätsphasen in die Betrachtung einfließen. Damit räumt man den Fat-Tails quasi „genug Zeit ein, sich empirisch zu entfalten“. Es ist also zu überprüfen, wie stark der Flankenindex vor dem Hintergrund von Volatilitätsclustern systematisch unterschätzt wird.

Der in dieser Arbeit vorgestellte semiparametrische Ansatz zur Ermittlung des VaR berücksichtigt keine Risikofaktoren. Aus diesem Grund wäre eine Weiterentwicklung des Instrumentariums auf der Grundlage einer multivariaten Extremwerttheorie sinnvoll. Damit könnte man den Bereich der zulässigen Portefeullebestandteile insbesondere auf derivative Finanzinstrumente ausweiten. Weiterhin stellt sich die Frage, ob es mit den Mitteln der Extremwerttheorie gelingt, den bedingten VaR zu quantifizieren, indem man sein Augenmerk von der Randverteilung auf die bedingte Verteilung der Logrendite lenkt. Man könnte darüber hinaus die Stationaritätsannahme aufgeben und damit Trends, saisonale Schwankungen und exogene volkswirtschaftliche Variablen zulassen.

# Anhang A

## Simulierte ME-Plots

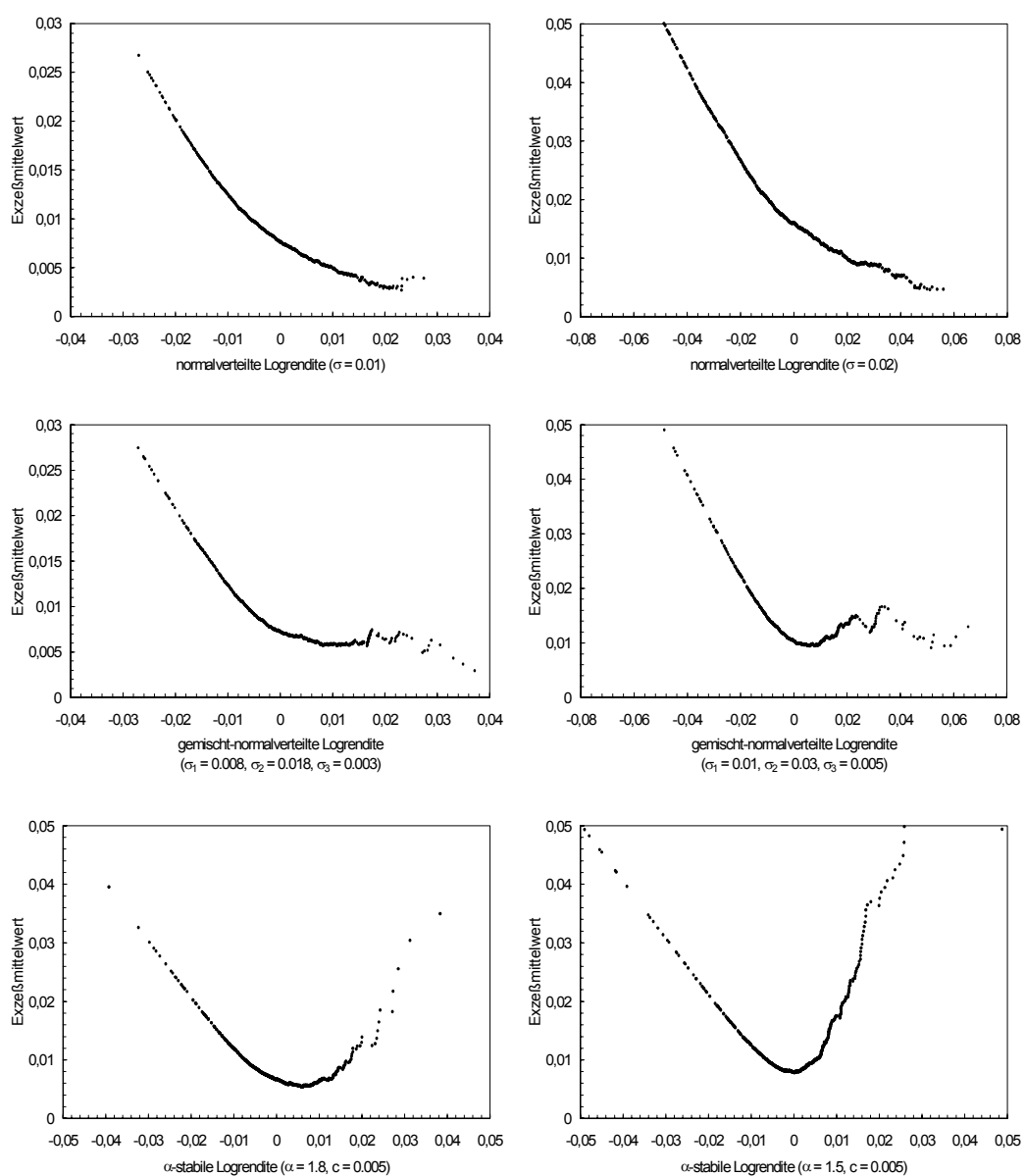


Abb. 10: Simulierte ME-Plots symmetrisch um Null verteilter Logrenditen. Oben: einfache Normalverteilung, in der Mitte: gemischte Normalverteilung, unten:  $\alpha$ -stabile Verteilung ( $\alpha < 2$ ).

## Anhang B

### Ergebnisse des Gütevergleichs

$p = 0.01$	RaR <sub>0,01</sub>	.018178	.025432	.037944
$n = 250$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	–	–	.80
	EW	–	–	.038569
	Bias	–	–	.00062526
	RBias	–	–	.016479
	Var	–	–	.00015543
	MSE	–	–	.00015582
	$\sqrt{\text{MSE}}$	–	–	.012483
	RMSE	–	–	.10823
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	–	–	.32898
PWM	$q$	.80	.80	.80
	EW	.019449	.027099	.037684
	Bias	.0012710	.0016664	-.00025914
	RBias	.069922	.065523	-.0068296
	Var	.000016039	.000050658	.00011452
	MSE	.000017655	.000053434	.00011458
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.0042018	.0073099	.010704
	RMSE	.053427	.082614	.079588
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.23114	.28743	.28211
N-Hypothese	EW	.019339	.029442	.049225
	Bias	.0011608	.0040101	.011282
	RBias	0.063860	.15768	.29733
	Var	.00010426	.00086652	.0032887
	MSE	.00010561	.00088260	.0034159
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.010277	.029709	.058446
	RMSE	0.31960	1.36458	2.37264
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.56533	1.16815	1.54034
	Empirisch	EW	.018506	.027007
Bias		.00032764	.0015744	.0032400
RBias		.018024	.061904	.085390
Var		.000011833	.000093091	.00036639
MSE		.000011940	.000095569	.00037689
$\sqrt{\text{MSE}}$		.0034554	.0097760	.019414
RMSE		.036133	.14776	.26178
$\sqrt{\text{RMSE}}$		.19009	.38439	.51165

Tab. 5: Simulationsergebnisse ( $p = 0.01, n = 250$ ).

$p = 0.01$	RaR <sub>0.01</sub>	.018178	.025432	.037944
$n = 1000$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	.90	.95	.95
	EW	.019253	.025964	.038315
	Bias	.0010751	.00053146	.00037090
	RBias	.059140	.020897	.0097751
	Var	.0000025122	.000010559	.000039649
	MSE	.0000036679	.000010841	.000039787
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.0019152	.0032926	.0063077
	RMSE	.011100	.016762	.027635
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.10536	.12947	.16624
PWM	$q$	.95	.95	.95
	EW	.018684	.025511	.037311
	Bias	.00050610	.000078442	-.00063227
	RBias	.027841	.0030844	-.016663
	Var	.0000019431	.0000093322	.000035062
	MSE	.0000021992	.0000093384	.000035462
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.0014830	.0030559	.0059550
	RMSE	.0066553	.014438	.024631
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.081580	.12016	.15694
N-Hypothese	EW	.020106	.033011	.061124
	Bias	.0019277	.0075789	.023180
	RBias	.10604	.29801	.61091
	Var	.00010633	.00088110	.0043113
	MSE	.00011004	.00093854	.0048487
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.010490	.030636	.069632
	RMSE	.33302	1.45107	3.36778
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.57708	1.20460	1.83515
	Empirisch	EW	.018032	.025220
Bias		-.00014647	-.00021204	-.00038649
RBias		-.0080577	-.0083374	-.010186
Var		.0000018559	.000013931	.000053400
MSE		.0000018774	.000013976	.000053549
$\sqrt{\text{MSE}}$		.0013702	.0037385	.0073177
RMSE		.0056814	.021609	.037194
$\sqrt{\text{RMSE}}$		.075375	0.14700	.19286

Tab. 6: Simulationsergebnisse ( $p = 0.01, n = 1000$ ).

$p = 0.01$	RaR <sub>0.01</sub>	.018178	.025432	.037944
$n = 5000$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	.97	.97	.97
	EW	.018336	.025574	.038041
	Bias	.00015813	.00014167	.000097121
	RBias	.0086992	.0055705	.0025596
	Var	.00000035309	.0000022353	.0000085393
	MSE	.00000037810	.0000022554	.0000085487
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.00061490	.0015018	.0029238
	RMSE	.0011442	.0034870	.0059378
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.033826	.059051	.077057
	PWM	$q$	.97	.97
EW		.018322	.025531	.038030
Bias		.00014426	.000098807	.000085932
RBias		.0079359	.0038851	.0022647
Var		.00000034626	.0000022419	.0000086457
MSE		.00000036707	.0000022516	.0000086531
$\sqrt{\text{MSE}}$		.00060586	.0015005	.0029416
RMSE		.0011108	.0034812	.0060103
$\sqrt{\text{RMSE}}$		.033329	.059002	.077526
N-Hypothese		EW	.020969	.037944
	Bias	.0027911	.012512	.040003
	RBias	.15354	.49197	1.05428
	Var	.00011929	.0011120	.0057841
	MSE	.00012708	.0012686	.0073844
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.011273	.035617	.085932
	RMSE	0.38456	1.96132	5.12902
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.62013	1.40047	2.26473
	Empirisch	EW	.018150	.025396
Bias		-.000028297	-.000036411	-.000083888
RBias		-.0015567	-.0014317	-.0022109
Var		.00000036821	.0000028057	.000010530
MSE		.00000036901	.0000028070	.000010537
$\sqrt{\text{MSE}}$		.00060746	.0016754	.0032461
RMSE		.0011167	.0043399	.0073190
$\sqrt{\text{RMSE}}$		.033417	.065878	.085551

Tab. 7: Simulationsergebnisse ( $p = 0.01, n = 5000$ ).



$p = 0.001$	RaR <sub>0.001</sub>	.039614	.085398	.15769
$n = 250$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	–	–	.80
	EW	–	–	.13062
	Bias	–	–	-0.027067
	RBias	–	–	-.17165
	Var	–	–	.0096458
	MSE	–	–	.010378
	$\sqrt{\text{MSE}}$	–	–	.10187
	RMSE	–	–	.41738
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	–	–	.64605
PWM	$q$	.80	.80	.80
	EW	.033093	.068403	.12429
	Bias	-.0065209	-.016995	-.033401
	RBias	-.16461	-.19901	-.21182
	Var	.00051127	.0024429	.0063392
	MSE	.00055379	.0027317	.0074549
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.023533	.052266	.086342
	RMSE	.35290	.37458	.29981
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.59406	.61203	.54755
N-Hypothese	EW	.025604	.038629	.064137
	Bias	-.014009	-.046769	-.093551
	RBias	-.35365	-.54766	-.59327
	Var	.00014444	.0011404	.0046926
	MSE	.00034071	.0033277	.013444
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.018458	.057686	.11595
	RMSE	.21711	.45630	.54069
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.46595	.67550	.73531
Empirisch	EW	.036360	.073325	.12882
	Bias	-.0032541	-.012073	-.028864
	RBias	-.082147	-.14137	-.18305
	Var	.0014346	.0066396	.018040
	MSE	.0014452	.0067853	.018873
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.038015	.082373	.13738
	RMSE	.92092	.93042	.75901
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.95965	.96458	.87121

Tab. 8: Simulationsergebnisse ( $p = 0.001, n = 250$ ).

$p = 0.001$	RaR <sub>0.001</sub>	.039614	.085398	.15769
$n = 1000$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	.90	.95	.95
	EW	.034981	.085111	.16387
	Bias	-.0046326	-.00028659	.0061840
	RBias	-.11694	-.0033559	.039216
	Var	.000086113	.0015933	.0069868
	MSE	.00010757	.0015933	.0070250
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.010372	.039917	.083816
	RMSE	.068551	.21848	.28252
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.26182	.46742	.53153
PWM	$q$	.95	.95	.95
	EW	.037938	.075654	.13463
	Bias	-.0016760	-.0097432	-.023057
	RBias	-.042308	-.11409	-.14622
	Var	.00016090	.00068407	.0023395
	MSE	.00016370	.00077900	.0028711
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.012795	.027911	.053583
	RMSE	.10432	.10682	.11547
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.32299	.32683	.33980
N-Hypothese	EW	.026598	.043480	.078916
	Bias	-.013015	-.041918	-.078771
	RBias	-.32856	-.49085	-.49954
	Var	.00016676	.0013798	.0058957
	MSE	.00033615	.0031369	.012101
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.018335	.056008	.11000
	RMSE	.21421	.43014	.48664
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.46283	.65585	.69760
	Empirisch	EW	.036116	.075569
Bias		-.0034980	-.0098282	-.020840
RBias		-.088303	-.11509	-.13216
Var		.00027931	.0018315	.0067041
MSE		.00029155	.0019281	.0071384
$\sqrt{\text{MSE}}$		.017075	.043910	.084489
RMSE		.18579	.26439	.28708
$\sqrt{\text{RMSE}}$		.43103	.51418	.53580

Tab. 9: Simulationsergebnisse ( $p = 0.001, n = 1000$ ).

$p = 0.001$	RaR <sub>0.001</sub>	.039614	0.085398	.15769
$n = 5000$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	.97	.97	.97
	EW	.038304	.085461	.15907
	Bias	-.0013102	.000063668	.0013859
	RBias	-.033075	.00074555	.0087886
	Var	.000032097	.00030945	.0012889
	MSE	.000033814	.00030945	.0012908
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.0058150	.017591	.035928
	RMSE	.021548	.042433	.051913
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.14679	.20599	.22784
PWM	$q$	.97	.97	.97
	EW	.039323	.079842	.14540
	Bias	-.00029059	-.0055556	-.012286
	RBias	-.0073355	-.065056	-.077912
	Var	.000041546	.00021055	.00082522
	MSE	.000041631	.00024142	.00097615
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.0064522	.015538	.031243
	RMSE	.026529	.033104	.039258
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.16288	.18194	.19814
N-Hypothese	EW	.027759	.049639	.10086
	Bias	-.011854	-.035759	-.056826
	RBias	-.29925	-.41873	-.36037
	Var	.00018384	.0015612	.0080040
	MSE	.00032436	.0028398	.011233
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.018010	.053290	.10599
	RMSE	.20670	.38941	.45176
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.45464	.62402	.67213
	Empirisch	EW	.038849	.083186
Bias		-.00076523	-.0022111	-.0042754
RBias		-.019317	-.025891	-.027113
Var		.000065366	.00042782	.0017677
MSE		.000065952	.00043271	.0017860
$\sqrt{\text{MSE}}$		.0081211	.020802	.042261
RMSE		.042027	.059334	.071826
$\sqrt{\text{RMSE}}$		.20501	.24359	.26800

Tab. 10: Simulationsergebnisse ( $p = 0.001, n = 5000$ ).

$p = 0.0004$	RaR <sub>0.0004</sub>	.061419	.14087	.27028
$n = 250$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	–	–	.80
	EW	–	–	0.20219
	Bias	–	–	-.068086
	RBias	–	–	-.25191
	Var	–	–	.027766
	MSE	–	–	.032402
	$\sqrt{\text{MSE}}$	–	–	.18000
	RMSE	–	–	.44354
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	–	–	.66599
PWM	$q$	.80	.80	.80
	EW	.040971	.098945	.19297
	Bias	-.020448	-.041926	-.077307
	RBias	-.33292	-.29762	-.28602
	Var	.0016374	.0080835	.020470
	MSE	.0020555	.0098413	.026446
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.045338	.099203	.16262
	RMSE	.54491	.49592	.36202
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.73818	.70421	.60168
N-Hypothese	EW	.027788	.041583	.068861
	Bias	-.033630	-.099288	-.20142
	RBias	-.54756	-.70481	-.74522
	Var	.00020974	.0012449	.0050197
	MSE	.0013407	.011103	.045590
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.036616	.10537	.21352
	RMSE	.35542	.55949	.62407
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.59617	.74799	.78998
Empirisch	EW	.036345	.073522	.12884
	Bias	-.025074	-.067349	-.14144
	RBias	-.40824	-.47809	-.52331
	Var	.0014357	.0067883	.018019
	MSE	.0020644	.011324	.038024
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.045435	.10642	.19500
	RMSE	.54725	.57065	.52051
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.73977	.75541	.72146

Tab. 11: Simulationsergebnisse ( $p = 0.0004, n = 250$ ).

$p = 0.0004$	RaR <sub>0.0004</sub>	.061419	.14087	.27028
$n = 1000$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	.90	.95	.95
	EW	.043939	.14239	.28226
	Bias	-.017479	.0015207	.011981
	RBias	-.28459	.010795	.044327
	Var	.00025950	.0083371	.027747
	MSE	.00056503	.0083394	.027890
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.023770	.091320	.16700
	RMSE	.14979	.42023	.38179
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.38702	.64825	.61789
PWM	$q$	.95	.95	.95
	EW	.052445	.12022	.21995
	Bias	-.0089732	-.020647	-.050334
	RBias	-.14610	-.14657	-.18623
	Var	.00072282	.0031370	.0095407
	MSE	.00080334	.0035633	.012074
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.028343	.059693	.10988
	RMSE	.21296	.17956	.16528
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.46148	.42374	.40655
N-Hypothese	EW	.028766	.046963	.085085
	Bias	-.032653	-.093908	-.18520
	RBias	-.53164	-.66662	-.68520
	Var	.00016185	.0015285	.0065850
	MSE	.0012281	.010347	.040882
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.035044	.10172	.20219
	RMSE	.32555	.52141	.55964
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.57057	.72209	.74809
Empirisch	EW	.066174	.14720	.26259
	Bias	.0047553	.0063292	-.0076908
	RBias	.077424	.044929	-.028455
	Var	.0043239	.016981	.038308
	MSE	.0043465	.017022	.038367
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.065928	.13047	.19587
	RMSE	1.15225	.85774	.52520
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	1.073428	.92614	.72471

Tab. 12: Simulationsergebnisse ( $p = 0.0004, n = 1000$ ).

$p = 0.0004$	RaR <sub>0.0004</sub>	.061419	.14087	.27028
$n = 5000$	$\alpha$	1.9	1.7	1.5
ML	$q$	.97	.97	.97
	EW	.053889	.14364	.27561
	Bias	-.0075298	.0027707	.0053290
	RBias	-.12260	.019668	.019717
	Var	.00015569	.0018197	.0066761
	MSE	.00021239	.0018273	.0067045
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.014574	.042747	.081881
	RMSE	.056304	.092081	.091778
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.23728	.30345	.30295
PWM	$q$	.97	.97	.97
	EW	.056576	.12942	.24218
	Bias	-.0048430	-.011454	-.028099
	RBias	-.078852	-.081310	-.10396
	Var	.00023047	.0011360	.0040312
	MSE	.00025392	.0012672	.0048208
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.015935	.035598	.069432
	RMSE	.067313	.063855	.065991
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.25945	.25270	.25689
N-Hypothese	EW	.030052	.053676	.10833
	Bias	-.031367	-.087195	-.16195
	RBias	-.51070	-.61897	-.59921
	Var	.00019072	.0017452	.0086756
	MSE	.0011746	.0093482	.034905
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.034272	.096686	.18683
	RMSE	.31138	.47107	.47781
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.55801	.68634	.69124
Empirisch	EW	.057915	.13163	.25018
	Bias	-.0035030	-.0092365	-.020098
	RBias	-.057036	-.065567	-.074361
	Var	.00041255	.0024918	.0092686
	MSE	.00042482	.0025771	.0096726
	$\sqrt{\text{MSE}}$	.020611	.050765	.098349
	RMSE	.11262	.12986	.13241
	$\sqrt{\text{RMSE}}$	.33559	.36036	.36388

Tab. 13: Simulationsergebnisse ( $p = 0.0004, n = 5000$ ).

## Anhang C

# Überprüfung der Fat-Tails-Hypothese

Aktie	$n$	$u$	$k$	$\kappa$	$\hat{\xi}_{ML}$	$H_0 : F \in \text{MDA}(\Lambda)$ <sup>1</sup>
Adidas-Salomon	696	.035457	30	.30031	.081665	nicht widerlegt
Allianz	1352	.026787	50	.23262	.12964	nicht widerlegt
BASF	1353	.029437	42	.25381	.40658	widerlegt
Bayer	1353	.035612	29	.30544	.38701	widerlegt
Bayerische Hypo	1353	.025694	60	.21235	.27816	widerlegt
BMW	1353	.032470	42	.25381	.32254	widerlegt
Commerzbank	1353	.030934	39	.26339	-.039751	nicht widerlegt
Daimler-Chrysler	1352	.032380	35	.27803	.34935	widerlegt
Degussa-Hüls	1353	.027890	59	.21414	.12444	nicht widerlegt
Deutsche Bank	1353	.024230	62	.20890	-.41956	nicht widerlegt
Deutsche Lufthansa	1352	.042942	29	.30544	.026185	nicht widerlegt
Deutsche Telekom	449	.030185	29	.30544	.44069	widerlegt
Dresdner Bank	1353	.028248	48	.23741	-.044508	nicht widerlegt
Fresenius	1028	.044429	26	.32258	.13644	nicht widerlegt
Henkel	538	.026317	38	.26683	.22117	nicht widerlegt
Karstadt	1353	.032179	31	.29542	-.011466	nicht widerlegt
Linde	1353	.031416	30	.30031	.17877	nicht widerlegt
MAN	1353	.040604	16	.41121	.26270	nicht widerlegt
Mannesmann	1353	.032428	39	.26339	.069838	nicht widerlegt
Metro	528	.026273	35	.27803	.37167	widerlegt
Münchener Rück	1345	.029853	52	.22810	-.32409	nicht widerlegt
Preussag	1353	.031108	30	.30031	-.35719	nicht widerlegt
RWE	1353	.031811	27	.31655	.042364	nicht widerlegt
SAP	1352	.044851	37	.27041	.43263	widerlegt
Schering	1353	.044830	17	.39894	.44366	widerlegt
Siemens	1352	.029046	33	.28633	.22071	nicht widerlegt
Thyssen Krupp	1350	.031558	28	.31085	.27428	nicht widerlegt
Veba	1352	.033609	25	.32897	.36756	widerlegt
Viag	1350	.029169	33	.28633	.36426	widerlegt
Volkswagen	1352	.030544	48	.23741	.29262	widerlegt

Tab. 14: Ergebnisse des Hypothesentests.

<sup>1</sup>Der Test erfolgte auf einem Signifikanzniveau von 5%. Zur methodischen Vorgehensweise siehe Abschnitt 9.4.1.3, S. 72.

# Literaturverzeichnis

- [1] BALKEMA, A. A. / HAAN, L. DE (1974): *Residual lifetime at great age*, in: *Annals of Probability*, Vol. 2, No. 5, S. 792 - 804.
- [2] BARONE-ADESI, GIOVANNI / GIANNOPOULOS, KOSTAS (1998): *VaR without Correlations for Portfolios of Derivative Securities*, in: *Journal of Futures Markets*, August 1999.
- [3] BASSI, FRANCO / EMBRECHTS, PAUL / KAFETZAKI, MARIA (1998): *Risk Management and Quantile Estimation*, in: *A practical guide to heavy tails, Statistical Techniques and Applications*, hrsg. von Robert J. Adler, Raisa E. Feldman und Murad S. Taqqu, S. 111 - 130.
- [4] BERA, ANIL K. / HIGGINS, MATTHEW L. (1993): *ARCH Models: Properties, Estimation and Testing*, in: *Journal of Economic Surveys*, Vol. 7, No. 4, S. 305 - 366.
- [5] BILLINGSLEY, PATRICK (1986): *Probability and Measure*, 2. Auflage, New York et al. 1986.
- [6] BINGHAM, N.H. / GOLDIE, C.M. / TEUGELS, J.L. (1987): *Regular Variation*, Cambridge 1987.
- [7] BLACK, FISCHER / SCHOLES, MYRON (1973): *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, in: *Journal of Political Economy*, Vol. 81, S. 637 - 654.
- [8] BOLLERSLEV, TIM / CHOU, RAY Y. / KRONER, KENNETH F. (1992): *ARCH modeling in finance*, in: *Journal of Econometrics*, Vol. 52, S. 5 - 59.
- [9] BOSCH, KARL (1996): *Großes Lehrbuch der Statistik*, München et al. 1996.
- [10] BRATLEY, PAUL / FOX, BENNETT L. / SCHRAGE, LINUS E. (1983): *A Guide to Simulation*, New York et al. 1983.
- [11] B&W INVESTMENT RESEARCH (22.10.1999): Seite „Historische Kurse zum downloaden“, unter: <http://www.bwinvestment.de/downlo1.htm> am 22.10.1999.
- [12] CAMPBELL, JOHN Y. / LO, ANDREW WEN-CHUAN / MACKINLAY, A. CRAIG (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton 1997.
- [13] D'AGOSTINO, RALPH B. / STEPHENS, MICHAEL A. (1986): *Goodness-Of-Fit Techniques*, New York und Basel 1986.



- [14] EBERLEIN, ERNST / KELLER, U. (1994): *Hyperbolic Distributions in Finance*, Albert-Ludwigs-Universität Freiburg im Breisgau, Institut für Mathematische Stochastik, Freiburger Zentrum für Datenanalyse und Modellbildung, Working Paper Nr. 1 (überarbeitete Version, April 1995).
- [15] EMBRECHTS, PAUL (1999): *Extreme value theory in finance and insurance*, ETH Zürich, Departement Mathematik, Seite „Paul Embrechts“, unter: <http://www.math.ethz.ch/~baltres/ftp/papers.html>.
- [16] EMBRECHTS, PAUL / KLÜPPELBERG, CLAUDIA / MIKOSCH, THOMAS (1997): *Modelling Extremal Events (for Insurance and Finance)*, Berlin et al. 1997.
- [17] EMBRECHTS, PAUL / RESNICK, SIDNEY / SAMORODNITSKY, GENNADY (1997): *Living on the Edge*, ETH Zürich, Departement Mathematik, Seite „Paul Embrechts“, unter: <http://www.math.ethz.ch/~baltres/ftp/papers.html>.
- [18] EMBRECHTS, PAUL / RESNICK, SIDNEY / SAMORODNITSKY, GENNADY (1998): *Extreme value theory as a risk management tool*, ETH Zürich, Departement Mathematik, Seite „Paul Embrechts“, unter: <http://www.math.ethz.ch/~baltres/ftp/papers.html>.
- [19] EMMER, SUSANNE / KLÜPPELBERG, CLAUDIA / TRÜSTEDT, MATTHIAS (1998): *VaR - Ein Maß für das extreme Risiko*, Technische Universität München, Fakultät für Mathematik, Zentrum Mathematik, Seite „Publikationen“, unter: <http://www-m4.mathematik.tu-muenchen.de/m4/Papers/>.
- [20] ENGLE, ROBERT F. / MANGANELLI, SIMONE (1999): *CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*, Working Paper, University of California, San Diego, unter: <http://weber.ucsd.edu/~mbacci/engle/349A.pdf>.
- [21] FAHRMEIR, LUDWIG / KAUFMANN, HEINZ L. / OST, FRIEDEMANN (1981): *Stochastische Prozesse - Eine Einführung in Theorie und Anwendungen*, München & Wien 1981.
- [22] FAMA, E.F. (1965): *The Behavior of Stock Market Prices*, in: Journal of Business, Vol. 38, S. 34 -105.
- [23] FIELITZ, BRUCE D. / ROZELLE, JAMES P. (1983): *Stable Distributions and the Mixtures of Distributions Hypotheses for Common Stock Returns*, in: Journal of the American Statistical Association, Vol. 78, No. 381, S. 28 - 36.
- [24] FISZ, MAREK (1976): *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, 8. Auflage, Berlin 1976.
- [25] FRANKE, GÜNTER / HAX, HERBERT (1994): *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*, 3. Auflage, Berlin et al. 1994.
- [26] FRISTEDT, BERT / GRAY, LAWRENCE (1997): *A Modern Approach to Probability Theory*, Boston et al. 1997.
- [27] HAAN, L. DE (1970): *On Regular Variation and Its Application to Weak Convergence of Sample Extremes*, in: CWI Tract, Vol. 32.

- [28] HAAN, L. DE (1984): *Slow variation and the characterization of domains of attraction*, in: Statistical Extremes and Applications, hrsg. von J. Tiago de Oliveira, Reidel, Dordrecht 1984, S. 31 - 48.
- [29] HEUSER, HARRO (1991): *Lehrbuch der Analysis - Teil 1*, 9. Auflage, Stuttgart 1991.
- [30] HOFFMANN-JØRGENSEN, J. (1993): *Stable Densities*, in: Theory of Probability and its Applications, Vol. 38, S. 350 - 355.
- [31] HOSKING, J.R.M. / WALLIS, J.R. (1987): *Parameter and Quantile Estimation for the Generalized Pareto Distribution*, in: Technometrics, August 1987, Vol. 29, No. 3, S. 339 - 349.
- [32] HOSKING, J.R.M. / WALLIS, J.R. / WOOD, E.F. (1985): *Estimation of the Generalized Extreme Value Distribution by the Method of Probability-Weighted Moments*, in: Technometrics, August 1985, Vol. 27, No. 3, S. 251 - 261.
- [33] HUSCHENS, STEFAN (1998): *Historische Simulation*, Technische Universität Dresden, Fakultät Wirtschaftswissenschaften, Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren, Working Paper Nr. 19/98, unter: <http://www.tu-dresden.de/wwqvs/VaR/qvreihe.htm>.
- [34] HUSCHENS, STEFAN (1999): *Verfahren zur Value-at-Risk-Berechnung*, Technische Universität Dresden, Fakultät Wirtschaftswissenschaften, Dresdner Beiträge zu Quantitativen Verfahren, Working Paper Nr. 29/99, unter: <http://www.tu-dresden.de/wwqvs/VaR/qvreihe.htm>.
- [35] IRLE, ALBRECHT (1998): *Finanzmathematik - Die Bewertung von Derivaten*, Stuttgart 1998.
- [36] JORION, PHILIPPE (1997): *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, Chicago et al. 1997.
- [37] KARATZAS, IOANNIS / SHREVE, STEVEN E. (1998): *Methods of Mathematical Finance*, Berlin et al. 1998.
- [38] KRUSCHWITZ, LUTZ (1995): *Finanzierung und Investition*, Berlin und New York 1995.
- [39] LAU, AMY HING-LING / LAU, HONG-SHIANG / WINGENDER, JOHN R. (1990): *The Distribution of Stock Returns: New Evidence Against the Stable Model*, in: Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 8, No. 2, S. 217 - 223.
- [40] LO, ANDREW WEN-CHUAN / MACKINLAY, A. CRAIG (1999): *A Non-Random Walk Down Wall Street*, Princeton 1999.
- [41] MALLIARIS, A.G. / BROCK, W.A. (1981): *Stochastic Methods in Economics and Finance*, Amsterdam et al. 1981.
- [42] MANDELBROT, B. B. (1963): *The Variation of Certain Speculative Prices*, in: Journal of Business, Vol. 36, S. 394 - 419.
- [43] MARKOWITZ, HARRY M. (1967): *Portfolio Selection (Efficient Diversification of Investments)*, 3. Auflage, New York et al. 1967.

- [44] MATTHES, RAINER / SCHRÖDER, MICHAEL (1998): *Portfolio Analysis Based on the Shortfall Concept*, in: Risk Measurement, Econometrics and Neural Networks, Contributions to Economics, hrsg. von Georg Bol, Gholamreza Nakhaeizadeh und Karl-Heinz Vollmer, Heidelberg und New York 1998, S. 147 - 160.
- [45] MCLACHLAN, GEOFFREY J. / BASFORD, KAYE E. (1988): *Mixture Models (Inference and Applications to Clustering)*, New York und Basel 1988.
- [46] MCNEIL, ALEXANDER J. (1998): *Calculating Quantile Risk Measures for Financial Return Series using Extreme Value Theory*, ETH Zürich, Departement Mathematik, Seite „Alexander McNeil“, unter: [http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub\\_list.html](http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub_list.html).
- [47] MCNEIL, ALEXANDER J. / FREY, RÜDIGER (1998): *Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: an Extreme Value Approach*, ETH Zürich, Departement Mathematik, Seite „Alexander McNeil“, unter: [http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub\\_list.html](http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub_list.html).
- [48] MCNEIL, ALEXANDER J. / SALADIN, THOMAS (1997): *The Peaks over Thresholds Method for Estimating High Quantiles of Loss Distributions*, ETH Zürich, Departement Mathematik, Seite „Alexander McNeil“, unter: [http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub\\_list.html](http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub_list.html).
- [49] MIKOSCH, THOMAS (1998): *Elementary Stochastic Calculus*, Singapur et al. 1998.
- [50] MOOD, ALEXANDER M. / GRAYBILL, FRANKLIN A. (1963): *Introduction to the Theory of Statistics*, 2. Auflage, New York et al. 1963.
- [51] ORMONEIT, DIRK / NEUNEIER, RALPH (1999): Conditional Value-at-Risk, Working Paper, Stanford University, unter: <http://www-stat.stanford.edu/~ormoneit/cf99-wp.ps>.
- [52] PICKANDS III, JAMES (1975): *Statistical inference using extreme order statistics*, in: Annals of Statistics, Vol. 3, No. 1, S. 119 - 131.
- [53] PRIESTLEY, M. B. (1981): *Spectral Analysis and Time Series, Volume 1: Univariate Series*, London et al. 1981.
- [54] READ, OLIVER (1997): *Historische Simulation und Monte Carlo Simulation*, Working Paper, Universität zu Köln, WiSo-Fakultät, Seminar für ABWL und Finanzierungslehre, Seite „Oliver Read: Working Papers“, unter: <http://www.wiso.uni-koeln.de/finanzierung/>.
- [55] READ, OLIVER (1998): *Interne Risikomodelle und Bankenaufsicht*, Working Paper, Universität zu Köln, WiSo-Fakultät, Seminar für ABWL und Finanzierungslehre, Seite „Oliver Read: Working Papers“, unter: <http://www.wiso.uni-koeln.de/finanzierung/>.
- [56] READ, OLIVER (1999): *Parametrische Modelle zur Ermittlung des Value-at-Risk*, Köln 1999, zugleich Diss. Köln 1998.
- [57] REISS, ROLF-DIETER / THOMAS, MICHAEL (1997): *Statistical Analysis of Extreme Values (with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields)*, Basel et al. 1997.

- [58] RESNICK, S.I. (1987): *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*, New York et al. 1987.
- [59] SCHLITTGEN, RAINER (1996): *Statistische Inferenz*, München und Wien 1996.
- [60] SCHLITTGEN, RAINER / STREITBERG, BERND H.J. (1994): *Zeitreihenanalyse*, 5. Auflage, München et al. 1994.
- [61] SCHMID, FRIEDRICH / STICH, ANDREAS (1999): *Distribution of German Stock Returns - Normal Mixtures Revisited*, in: *Mathematische Methoden der Wirtschaftswissenschaften (Festschrift für Otto Opitz)*, hrsg. von Wolfgang Gaul und Martin Schader, Heidelberg und New York 1999, S. 272 - 281.
- [62] SCHMID, FRIEDRICH / TREDE, MARK (1998): *Skript zur Vorlesung Empirische Kapitalmarktforschung: Analyse von Finanzzeitreihen*, Universität zu Köln, WiSo-Fakultät, Lehrstuhl für Wirtschafts- und Sozialstatistik.
- [63] SMITH, RICHARD L. (1987): *Estimating Tails of Probability Distributions*, Vol. 15, No. 3, S. 1174 - 1207.
- [64] STEINER, MANFRED / BRUNS, CHRISTOPH (1996): *Wertpapiermanagement*, 5. Auflage, Stuttgart 1996.
- [65] WALTER, WOLFGANG (1992): *Analysis 1*, 3. Auflage, Berlin et al. 1992.
- [66] ZAGST, RUDI (1997): *Value-at-Risk - Viele Wege führen ans Ziel*, Risklab Germany, Paper No. 9705, unter: <http://www.risklab.de>, Paper ist anzufordern bei Carolin Faltlhauser, Email: [faltlhauser@risklab.de](mailto:faltlhauser@risklab.de).