

SACHGERECHTER UMGANG MIT PROGNOSEFEHLERN

Robuste Asset Allocation in der Praxis

Pensionsfonds und andere institutionelle Anleger sind in aller Regel an ein bestimmtes Renditeziel (Rechnungszins) gebunden, das Jahr für Jahr in der Kapitalanlage erreicht werden muss. Bei der Methode der robusten Optimierung wird neben dem Investmentrisiko auch das Prognoserisiko in Bezug auf die erwarteten Renditen in die Modellierung der Asset Allocation einbezogen. Damit soll sichergestellt werden, dass ein Anleger seine Renditeziele auch bei fehlerhaften Prognosen zuverlässig erreicht. Marko Hirsch | Jochen M. Kleeberg

→ **Keywords:** Portfoliomanagement, Asset Allocation

Die Vorgabe bestimmter Renditeziele für die Investments von institutionellen Investoren ist bei der Gestaltung der Asset Allocation zu berücksichtigen. Zur Lösung dieser Aufgabenstellung wird in der Praxis häufig die klassische Asset Allocation-Optimierung nach Markowitz eingesetzt. Das wesentliche praktische Problem des Markowitz-Ansatzes besteht darin, dass die zur Optimierung der Asset Allocation benötigten erwarteten Renditen, Varianzen und Korrelationen zum Planungszeitpunkt unbekannt sind und deshalb prognostiziert werden müssen.

Prognosefehler können dazu führen, dass die erwartete Rendite des optimierten Portfolios tatsächlich geringer ist als im Modellrahmen angenommen und damit möglicherweise den Rechnungszins unterschreitet. In diesem Fall wird das Renditeziel mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50 % verfehlt. Die Methode der robusten Asset Allocation hilft, dieses Problem zu lösen.

Klassische Asset Allocation-Optimierung

Bei der klassischen Asset Allocation-Optimierung nach Markowitz werden Portfo-

lios anhand von zwei Kennzahlen bewertet: Der erwarteten Rendite und dem Investmentrisiko, das mit der Standardabweichung der Portfoliorendite gemessen wird. Auf Basis dieser Größen werden effiziente Portfolios ermittelt, also Portfolios, die bei gegebenem Investmentrisiko die höchste erwartete Rendite bzw. bei gegebener erwarteter Rendite das geringste Investmentrisiko aufweisen. Die Menge aller effizienten Portfolios bildet dabei die so genannte Effizienzlinie.

Zur Bestimmung eines effizienten Portfolios bei einem gegebenen Renditeziel r_{Ziel} wird dabei wie folgt vorgegangen ▶ 1: Als Inputparameter werden für alle in die Planung einbezogenen Assetklassen die Erwartungswerte, Standardabweichungen und Korrelationen der Renditen zu Grunde gelegt. Zielsetzung ist die Minimierung des Investmentrisikos des Portfolios (i) unter folgenden Nebenbedingungen: Die erwartete Portfoliorendite soll der Zielerwartete Rendite r_{Ziel} entsprechen (ii), das Portfolio soll zu 100 % investiert sein (iii), und es

Vergleich der Optimierungsansätze

Markowitz-Optimierung

(i) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \min!$

(ii) $\sum_{i=1}^n \bar{\mu}_i x_i = r_{Ziel}$

(iii) $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

(iv) $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$

Robuste Optimierung

(i) $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \min!$

(ii) $P\left(\sum_{i=1}^n (\bar{\mu}_i + s_i) x_i \geq r_{Ziel}\right) \geq \pi$

(iii) $\sum_{i=1}^n x_i = 1$

(iv) $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$

n : Anzahl der Assetklassen

$\bar{\mu}_i$: Erwartete Rendite der Assetklasse i

σ_i : Standardabweichung der Rendite der Assetklasse i

ρ_{ij} : Rendite-Korrelation der Assetklassen i und j

x_i : Anteil der Assetklasse i am Portfolio

r_{Ziel} : Zielrendite

s_i : Schätzfehler der erwarteten Rendite der Assetklasse i ; Zufallsvariable, normalverteilt mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung θ_i

P : Wahrscheinlichkeitsmaß

π : Wahrscheinlichkeit, mit der r_{Ziel} erreicht werden muss

sind keine Leerverkäufe zulässig (iv). In der Praxis kommen dabei häufig weitere Nebenbedingungen hinzu, wie z.B. die Festlegung einer maximalen Aktienquote. Durch Variation der Zielrendite lässt sich im Rahmen der Optimierung jedes Portfolio auf der Effizienzlinie berechnen.

Entscheidend ist, dass im Markowitz-Ansatz die notwendigen Inputparameter als bekannt vorausgesetzt werden. In der Praxis müssen diese Rendite- und Risiko-parameter jedoch prognostiziert werden. Das Ergebnis der Asset Allocation-Optimierung hängt somit wesentlich von der Qualität dieser Prognosen ab.¹

Zur Illustration soll das folgende Beispiel dienen: Ein deutscher Investor möchte sein Vermögen strategisch in globalen Aktienmärkten (Euroland, UK, USA, Asien/Pazifik) und globalen Rentenmärkten (Euroland, UK, USA) investieren. Dabei werden auf der Rentenseite sämtliche Währungsrisiken abgesichert, auf der Aktienseite erfolgt keine Währungssicherung. Bei möglichst geringem Risiko soll eine Zielrendite in Höhe von 7,5 % p.a. erreicht werden. Als Inputparameter werden die Standardabweichungen und Korrelationen der Renditen auf Basis der 120 stetigen Monatsrenditen des Zeitraums Oktober 1995 bis September 2005 ge-

schätzt.² Als Prognosewerte für die erwarteten Renditen werden hier zur Veranschaulichung der Methodik die historischen Renditen dieses Zeitraumes verwendet³ ► 2.

Bei Betrachtung der effizienten Portfolios, die sich aus diesen Parametern mittels einer Markowitz-Optimierung ergeben, zeigt sich, dass Portfolios mit geringer

„Das Ergebnis der Asset Allocation hängt wesentlich von der Qualität der Prognosen ab.“

erwarteter Rendite von Renten Euroland dominiert werden, während Portfolios mit hoher erwarteter Rendite sich ausschließlich aus den beiden Assetklassen Aktien Euroland und Renten UK zusammensetzen ► 3. Aktien UK besitzen in Allokationen mit geringer erwarteter Rendite zudem Beimischungscharakter, weitere Assetklassen spielen in den Allokationen keine Rolle.

Überraschend ist insbesondere, dass US-Aktien gänzlich unberücksichtigt bleiben, obwohl sie ein ähnliches Rendite-Risiko-profil aufweisen wie Euroland-Aktien: US-Aktien haben im Vergleich zu Euroland-Aktien zwar eine leicht geringere erwar-

tete Rendite (10,04 % vs. 10,81 % p.a.), andererseits aber auch eine geringere Standardabweichung (19,53 % vs. 19,98 % p.a.). Die Portfoliostrukturen entlang der Effizienzlinie erscheinen insgesamt sehr unausgewogen: ein Ergebnis, das bei der praktischen Anwendung der klassischen Markowitz-Optimierung häufig auftritt.

Berücksichtigung des Schätzrisikos

Da es sich bei den Inputparametern der Portfoliooptimierung um Prognosen handelt, stellt sich die Frage, inwiefern mögliche Schätzfehler bezüglich der erwarteten Renditen das Ergebnis beeinflussen können. Betrachten wir in obigem Beispiel das mit einer Zielrendite $r_{Ziel} = 7,5\%$ optimierte Portfolio ► 4. Wir nehmen an, sämtliche Parameter seien korrekt geschätzt worden mit Ausnahme der erwarteten Rendite des Euroland-Rentenmarktes, die tatsächlich deutlich geringer ist.

Das optimierte Portfolio, das mit 87 % einen beträchtlichen Renten Euroland-Anteil aufweist, würde damit die geforderte Zielrendite von 7,5 % p.a. im Erwartungswert entsprechend deutlich unterschreiten. Zur Erreichung der Zielrendite wäre in diesem Fall ein Portfolio optimal, das einen deutlich geringeren Exposure in Renten Euroland aufweist



Rendite- und Risikoprognosen (Punktschätzer)

	Aktien Euroland	Aktien UK	Aktien USA	Aktien Asien/Pazifik	Renten Euroland	Renten UK	Renten USA
Erwartete Rendite p.a.	10,81 %	9,43 %	10,04 %	2,10 %	7,23 %	7,75 %	6,12 %
Standardabweichung p.a.	19,98 %	15,08 %	19,53 %	20,43 %	3,17 %	4,44 %	4,59 %
Korrelationen							
Aktien Euroland	1,00	0,83	0,81	0,59	-0,18	-0,13	-0,33
Aktien UK	0,83	1,00	0,84	0,62	-0,12	-0,13	-0,28
Aktien USA	0,81	0,84	1,00	0,69	-0,11	-0,10	-0,25
Aktien Asien/Pazifik	0,59	0,62	0,69	1,00	-0,12	-0,15	-0,23
Renten Euroland	-0,18	-0,12	-0,11	-0,12	1,00	0,80	0,75
Renten UK	-0,13	-0,13	-0,10	-0,15	0,80	1,00	0,69
Renten USA	-0,33	-0,28	-0,25	-0,23	0,75	0,69	1,00

→ und stattdessen stärker in Renten UK investiert. Für dieses Portfolio resultiert aber das gleiche Problem, wenn statt Renten Euroland die Assetklasse Renten UK renditemäßig überschätzt ist.

Durch eine stärkere Diversifikation zwischen diesen beiden Assetklassen lassen sich die Folgen einer Überschätzung der erwarteten Rendite von Renten Euroland oder UK reduzieren. Völlig beseitigt werden können sie damit jedoch nicht: Sobald die erwartete Rendite von nur einer im Portfolio enthaltenen Assetklasse überschätzt wird, liegt die erwartete Portfoliorendite c.p. unterhalb der Zielrendite. Um das zu vermeiden, muss von vornherein ein Portfolio mit einer höheren erwarteten Rendite (im Beispiel >7,5% p.a.) gewählt werden. Die Berücksichtigung von möglichen Fehlern bei der Prognose erwarteter Renditen einzelner Assetklassen hat somit zwei Implikationen:

- Das optimale Portfolio muss stärker diversifiziert sein.
- Die erwartete Rendite des optimalen Portfolios muss über der Zielrendite liegen.

Die simultane Berücksichtigung des Prognoserisikos und des Investmentrisikos ist Gegenstand der robusten Asset Allocation.

Modellierung des Prognoserisikos

Die Unsicherheit von Inputparametern wird explizit in der robusten Modellierung berücksichtigt, indem Punktschätzungen durch Schätzbereiche ersetzt werden.⁴ Im Folgenden nehmen wir an, dass Schätzfehler, die bei der Prognose der erwarteten Renditen der Assetklassen auftreten, nor-

„Die Berücksichtigung des Prognoserisikos ist Gegenstand der robusten Asset Allocation.“

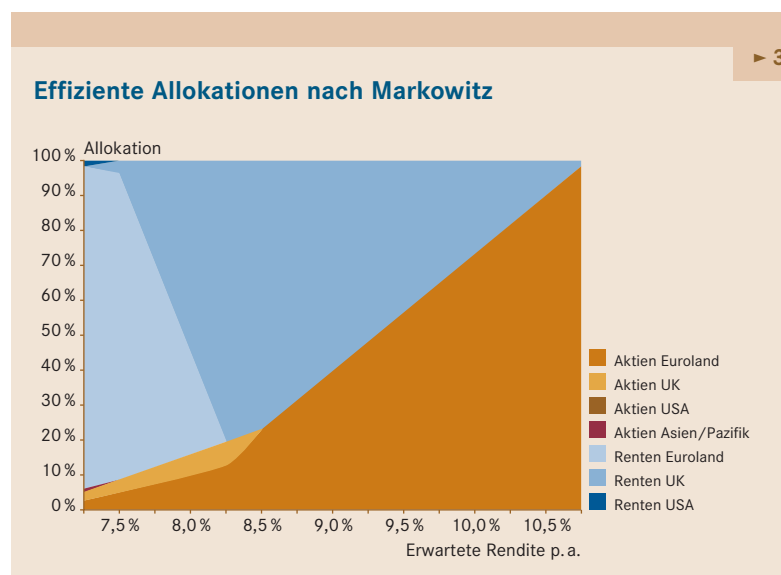
malverteilte Zufallsvariablen sind. Die Schätzungen für die erwarteten Renditen lauten damit $\mu_i = \bar{\mu}_i + s_i$, wobei $\bar{\mu}_i$ eine Punktschätzung der erwarteten Rendite der Assetklasse i ist (identisch zum Schätzwert im Rahmen der klassischen Markowitz-Optimierung) und s_i eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung θ_i . Der Erwartungswert von 0 bewirkt, dass im Mittel eine erwartete Rendite in Höhe der Punktschätzung $\bar{\mu}_i$ realisiert wird; die Standardabweichung θ_i quantifiziert das Schätzrisiko.

Die Schätzfehler s_i seien für die verschiedenen Assetklassen unabhängig von-

einander. Statt eines fixen Schätzwertes für die erwartete Rendite einer Assetklasse ($\mu_i = \bar{\mu}_i$) erhalten wir somit einen Schätzbereich in Form eines Konfidenzintervalls, in das die „wahre“ erwartete Rendite dieser Assetklasse mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit hineinfällt.

Für die Herleitung der Standardabweichung der Schätzfehler θ_i werden in unserem Beispiel approximativ die Schwankungen der zehnjährigen mittleren Renditen p.a. verwendet: Sind diese für eine Assetklasse sehr hoch, zeugt dies von einer schwierigen Prognostizierbarkeit der entsprechenden erwarteten Rendite.

Zur Bestimmung der Schwankungsintensität (Standardabweichung) der zehnjährigen mittleren Rendite p.a. wird ein Bootstrapping-Verfahren verwendet. Dazu werden für alle betrachteten Assetklassen aus 213 Beobachtungen des Zeitraums Januar 1988 bis September 2005 jeweils 120 stetige Monatsrenditen („mit Zurücklegen“) gezogen. Aus diesen wird dann der Mittelwert p.a. errechnet. Diese Prozedur wird 5.000-mal wiederholt. Aus den 5.000 so erzeugten Mittelwerten lässt sich nun für jede Assetklasse die Standardabweichung der zehnjährigen mittleren Rendite p.a. herleiten ▶ 5. Diese wird dann durch einen Prognosegüte-Faktor dividiert, um



	Markowitz-Allokation $r_{Ziel} = 7,5\% \text{ p.a.}$	Robuste Allokation $r_{Ziel} = 7,5\% \text{ p.a.}$
Erwartete Rendite p.a.	7,50 %	7,94 %
Standardabweichung p.a.	3,04 %	3,88 %
Allokation		
Aktien Euroland	5,08 %	8,30 %
Aktien UK	3,08 %	5,28 %
Aktien USA	0,00 %	3,61 %
Aktien Asien/Pazifik	0,00 %	0,00 %
Renten Euroland	87,09 %	43,93 %
Renten UK	4,75 %	38,88 %
Renten USA	0,00 %	0,00 %

so den Wert für das Schätzrisiko θ_i zu erhalten. Dabei steht ein hoher (niedriger) Wert des Prognosegüte-Faktors für ein starkes (geringes) Vertrauen in die Punktschätzungen. Wir verwenden hier beispielhaft einen Prognosegüte-Faktor von 3. Aus dem Schätzrisiko resultieren entsprechende Konfidenzintervalle: Die Prognose für Aktien Euroland lautet so z.B.: „Mit 90-prozentiger Wahrscheinlichkeit liegt die erwartete Rendite p.a. zwischen 8,3 und 13,4 %.“

Robuste Asset Allocation

Die auf diese Weise modellierten Schätzfehler müssen nun in das Rahmenwerk der Portfoliooptimierung eingebunden werden: Die Zielrendite r_{Ziel} soll auch unter Berücksichtigung des Schätzrisikos mit großer Wahrscheinlichkeit erreicht werden. Dazu ist die Nebenbedingung (ii) des Markowitz-Ansatzes entsprechend zu modifizieren ▶ 1.⁵ Auch im Rahmen der robusten Optimierung können durch Variation der Zielrendite sämtliche Portfolios der (robusten) Effizienzlinie berechnet werden.

Im Beispielfall soll die erwartete Portfoliorendite die vorgegebene Zielrendite mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % übertreffen. Bei Verwendung der hergeleiteten Rendite-, Investmentrisiko- und Schätzrisiko-Parameter zeigt sich nun, dass die optimalen robusten Portfolios im Vergleich zur klassischen Markowitz-Opti-

„Robuste Portfolios weisen ausgewogenere Allokationsstrukturen auf.“

mierung deutlich ausgewogenere Allokationsstrukturen aufweisen ▶ 6. Im Aktienbereich sind neben Euroland auch die Märkte USA und UK stark vertreten. Auch im Rentenbereich findet zwischen Euroland und UK eine stärkere Diversifikation statt, hier allerdings auf Grund der geringeren Schätzrisiken weniger ausgeprägt. Aktien Asien/Pazifik und Renten USA spielen auch in den robusten Portfolios auf Grund ihres geringen Renditepotenzials keine Rolle: Zur stärkeren Diversifikation der robusten Portfolios werden also nur Assetklassen mit attraktivem Rendite-Risiko-Profil herangezogen (z.B. Aktien USA).

Für den Investor mit einem Renditeziel von 7,5 % p.a. ist insbesondere der Vergleich des klassischen Markowitz-Portfolios mit dem auf diesen Zielwert optimierten robusten Portfolio interessant ▶ 4. Während bei dem mittels der klassischen Optimierung konstruierten Portfolio die erwartete Rendite der Zielrendite von 7,5 % p.a. entspricht, liegt sie beim robusten Portfolio mit 7,94 % p.a. deutlich höher. Für das Markowitz-Portfolio beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die tatsächliche erwartete Rendite auf Grund von Schätzfehlern geringer ist als 7,5 % p.a., wegen

der Normalverteilungsannahme 50%; die Untergrenze des 90%-Konfidenzintervalls der erwarteten Portfoliorendite ist 7,06 % p.a. (mit anderen Worten: mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % ist die erwartete Portfoliorendite größer als 7,06 % p.a.).

Im robusten Portfolio ist dagegen das Schätzrisiko berücksichtigt: die Untergrenze des 90%-Konfidenzintervalls der erwarteten Portfoliorendite entspricht wie gefordert der Zielrendite von 7,5 % p.a. Das Investmentrisiko des robusten Portfolios ist mit 3,88 % p.a. allerdings auch höher als beim Markowitz-Portfolio (3,04 % p.a.). Die Reduktion des in der klassischen Markowitz-Optimierung unberücksichtigten Schätzrisikos wird also mit einer Erhöhung des Investmentrisikos erkauft. Dennoch ist das robuste Portfolio auch im klassischen zweidimensionalen Rahmenwerk aus erwarteter Rendite und Standardabweichung noch nahezu effizient. Die moderaten Effizienzverluste robuster Portfolios verdeutlicht eine Gegenüberstellung der Effizienzlinien ▶ 7. Treten keine Schätzfehler auf, d.h. die erwarteten Renditen entsprechen den Punktschätzern, verläuft die robuste Effizienzlinie konstruktionsbedingt unterhalb der klassischen Effizienzkurve. Das Investmentrisiko steigt allerdings bei gegebener erwarteter Rendite nur moderat an.

Um nun den möglichen Einfluss des Schätzrisikos in die Darstellung mit einzubeziehen, können wiederum



Quantifizierung des Schätzrisikos							
	Aktien Euroland	Aktien UK	Aktien USA	Aktien Asien/Pazifik	Renten Euroland	Renten UK	Renten USA
Standardabweichung der 10-jährigen mittleren Rendite p.a.	4,66 %	4,20 %	4,73 %	5,43 %	0,86 %	1,38 %	1,19 %
Prognosegüte-Faktor	3	3	3	3	3	3	3
Standardabweichung der Schätzfehler (θ_i)	1,55 %	1,40 %	1,58 %	1,81 %	0,29 %	0,46 %	0,40 %
90 %-Konfidenzintervall der erwarteten Rendite	[8,3 %; 13,4 %]	[7,1 %; 11,7 %]	[7,4 %; 12,6 %]	[-0,9 %; 5,1 %]	[6,8 %; 7,7 %]	[7,0 %; 8,5 %]	[5,5 %; 6,8 %]

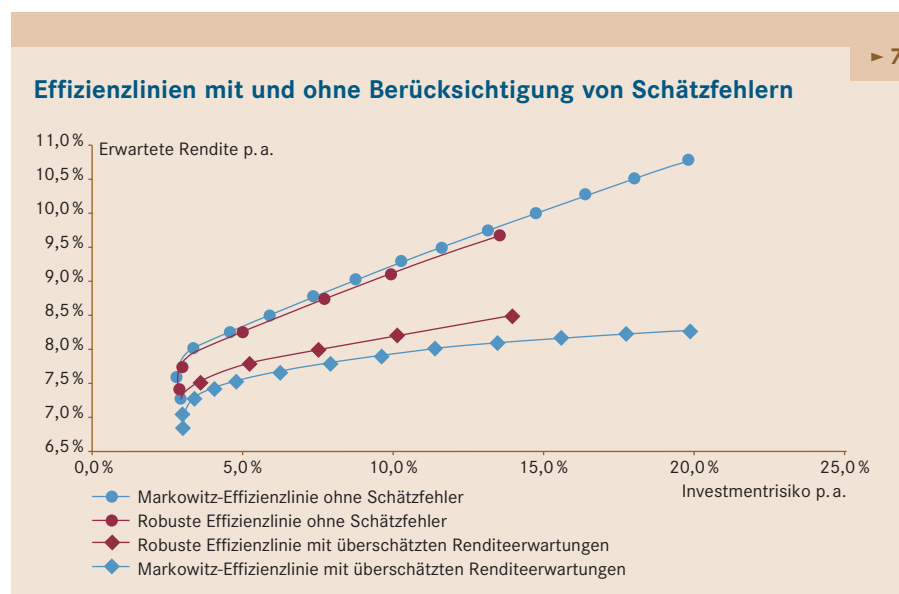
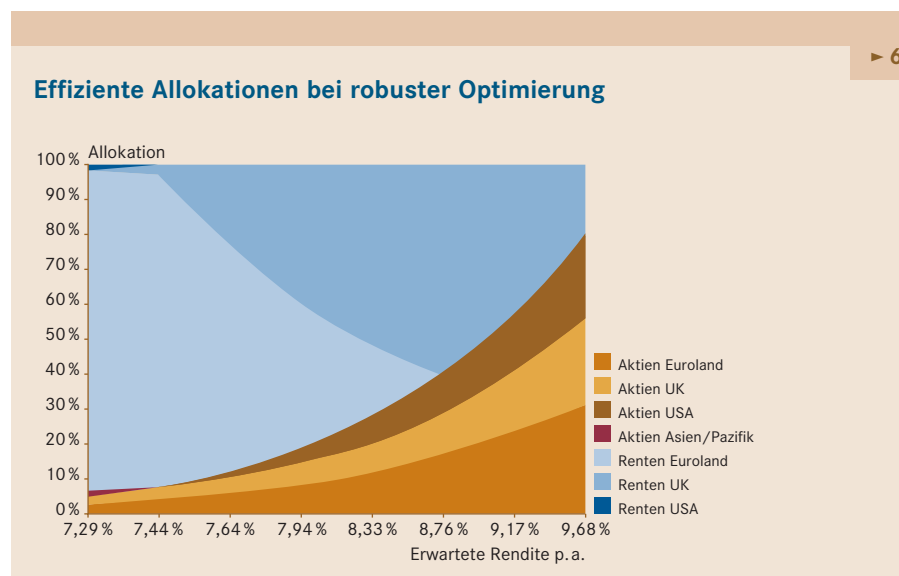
→ Konfidenzintervalle herangezogen werden: Werden die erwarteten Renditen derart überschätzt, dass die tatsächlichen erwarteten Portfolioerrenditen nur der Untergrenze ihres 90 %-Konfidenzintervalls entsprechen, bewirkt dies eine Verschiebung beider Effizienzlinien nach unten. Dabei verläuft die robuste Effizienzlinie nun deutlich oberhalb der klassischen Effizienzlinie. Durch die explizite Berücksichtigung des Schätzrisikos im Optimierungskalkül verändert sich die robuste Effizienzlinie bei fehlerhaften Pro-

gnosen also deutlich weniger als die klassische Markowitz-Effizienzlinie. So wird sichergestellt, dass das Renditepotenzial des Portfolios auch bei fehlerhaften Prognosen noch mit dem Renditeziel des Anlegers kompatibel ist.

Fazit

Werden Asset Allocation-Entscheidungen auf Basis der klassischen Portfoliooptimierung getroffen, können überschätzte erwartete Renditen zu einer Verfehlung der Renditeziele des Anlegers führen. Die

Verwendung robuster Modelle kann dieser Gefahr durch eine explizite Berücksichtigung des Schätzrisikos entgegenwirken. In der hier vorgestellten robusten Optimierung ergeben sich dabei stärker diversifizierte Portfoliostrukturen. Auf Grund dieser ausgewogeneren Portfoliozusammensetzung kann weitestgehend auf Restriktionen zur Beschränkung der Gewichte einzelner Assetklassen verzichtet werden. Die Ergebnisse erscheinen insgesamt auch intuitiv plausibler, so dass sie auch auf der Anlegerseite auf höhere Akzeptanz stoßen werden. □



Autoren: Marko Hirsch ist Consultant, Dr. Jochen M. Kleeberg geschäftsführender Gesellschafter bei alpha portfolio advisors GmbH, Bad Soden am Taunus.

Literatur

- * Chopra, V. K./Ziemba, W.T.: The Effect of Errors in Means, Variances, and Covariances on Optimal Portfolio Choice, in: The Journal of Portfolio Management 19, Winter 1993, S. 6-11.
- * Herold, U.: Asset Allocation und Prognoseunsicherheit, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts. 2004.
- * Kempf, A./ Memmel, C.: Schätzrisiken in der Portfoliotheorie, in: Handbuch Portfoliomangement, 2. Auflage, Uhlenbruch Verlag, Bad Soden/Ts. 2002, S. 895-920.
- * Lobo, S.: Robust and Convex Optimization with Applications in Finance, 2000 <http://www.fuqua.duke.edu/faculty/alpha/lobo.htm>.
- * Luenberger, D. G.: Investment Science, Oxford University Press, New York 1998.
- * Markowitz, H. M.: Portfolio Selection, in: The Journal of Finance 7, 1952, S. 77-91.
- * Tütüncü, R. H./ Koenig, M.: Robust Asset Allocation, in: Annals of Operations Research 132, 2004, S. 157-187.

- 1 Die Schätzung der erwarteten Renditen ist dabei wesentlich kritischer als die Schätzung der Risikoparameter (vgl. z.B. Chopra/Ziemba 1993, Kempf/Memmel 2002 sowie Herold 2004). Deshalb erscheint die Verwendung historischer Standardabweichungen und Korrelationen als akzeptabel, während Renditeprognosen durch Fortschreibung historischer Daten für die praktische Anwendung grundsätzlich nicht geeignet sind.
- 2 Verwendet werden stetige Renditen, da diese eher der Normalverteilungsannahme entsprechen als diskrete Renditen. Sämtliche Berechnungen basieren auf den jeweiligen MSCI Aktien- bzw. Merrill Lynch Government Bond-Indizes.
- 3 Die hier präsentierten Ergebnisse gelten unabhängig davon, ob historische Renditen oder solche aus einem geeigneteren und komplexeren Prognoseprozess verwendet werden. Entscheidend ist lediglich die Tatsache, dass die Prognosen unsicher sind.
- 4 Eine Möglichkeit besteht darin, Schätzintervalle der Form $M_i = [\mu_i^{\min}, \mu_i^{\max}]$ für die erwarteten Renditen zu verwenden (Tütüncü/Koenig, 2004). Dabei wird eine Optimierung unter der Annahme durchgeführt, dass sämtliche erwarteten Renditen fehlerhaft geschätzt sind. Dadurch resultieren Portfolios, die in nur wenigen risikoarmen Assetklassen investiert sind und in einem negativen Szenario eine akzeptable Performance liefern.
- 5 Dieses Programm kann als so genanntes Second Order Cone Programm (SOCP) formuliert werden. Hierfür wurden in den letzten Jahren effiziente Lösungsverfahren entwickelt (vgl. Lobo, 2000).