

Semi-analytische und simulative Kreditrisikomessung  
synthetischer Collateralized Debt Obligations  
bei heterogenen Referenzportfolios

Unternehmenswertorientierte Modellentwicklung  
und  
transaktionsbezogene Modellanwendungen

Dissertation

zur Erlangung des wissenschaftlichen Doktorgrades  
des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Universität Göttingen

vorgelegt von

Stephan Jortzik

aus Magdeburg

Göttingen 2005

Erstgutachter: Prof. Dr. Wolfgang Benner

Zweitgutachter: Prof. Dr. Walter Zucchini

## Notationen

Beim Studium der Arbeit wird dem Leser empfohlen, die folgenden Hinweise zu berücksichtigen:

- Alle im Fließtext und in den Fußnoten, nicht aber im Rahmen der Zitation, verwendeten Eigennamen von Personen, Firmen, Produkten etc. werden in KAPITÄLCHEN geschrieben.
- Alle im Fließtext in *kursiver Schrift* erscheinenden Ausdrücke sind für den jeweiligen Abschnitt als besonders bedeutsam einzustufen. Ebenfalls in kursiver Schrift erscheinen alle mathematischen Beweisführungen.
- Die in der Arbeit verwendeten Produkt- oder Systemnamen werden nach bestem Wissen mit dem Trademark- (™) bzw. (®) oder dem Copyright-Zeichen (©) versehen.
- Das Abkürzungsverzeichnis enthält alle in der Arbeit verwendeten Abkürzungen und berücksichtigt daher auch jene Abkürzungen, die im aktuellen DUDEN Band I erläutert sind.
- Für die World Wide Web-Adressen, die in der Arbeit aufgeführt sind, kann trotz sorgfältiger Überprüfung keine Gewähr übernommen werden, da sich diese jederzeit ändern können.
- Die URLs von Internetquellen werden in den Fußnoten und in dem Literaturverzeichnis stets in gesamter Länge zitiert.
- Alle verwendeten Währungscode entsprechen der ISO-Norm 4217 (three-alpha code) und stehen für: EUR = Euromitgliedsländer, Euro, USD = United States of America, Dollar etc.
- Das Internet und die Literatur sind stark geprägt von (Fach-)Begriffen in englischer Sprache. Aus diesem Grund werden auch in dieser Arbeit überwiegend die entsprechenden englischen (Fach-)Begriffe verwendet.
- Die Zitation von Literatur erfolgt in den Fußnoten unter Verwendung von Kurztiteln. Sämtliche Kurztitel sind im Literaturverzeichnis nochmals aufgeführt.

## Inhaltsübersicht

1	Einleitung.....	1
11	Problemstellung und Zielsetzung.....	1
12	Gang der Untersuchung .....	8
2	Synthetische CDOs aus bankbetrieblicher Perspektive und Grundlagen der Kreditrisikomessung mit Unternehmenswertansätzen.....	13
21	Definition und empirische Bedeutung der Kreditverbriefung mit CDOs.....	13
22	Grundlagen zum Aufbau von CDO-Transaktionen .....	23
23	Struktur synthetischer CDO-Transaktionen am Beispiel des PROMISE-Programms der KfW .....	44
24	Grundlagen der unternehmenswertorientierten Kreditrisikomessung .....	59
3	Entwicklung eines semi-analytisch rechenbaren unternehmenswertorientierten Modells zur Quantifizierung des Kreditrisikos heterogener CDO-Referenzportfolios.....	103
31	Modellrahmen und Modelleinordnung im Lichte empirischer Analysen.....	103
32	Modellierung von Credit Curves .....	110
33	Credit Curves, Ausfallschranken und zeittransformierte Prozesse.....	123
34	Berücksichtigung von Ausfallkorrelationen .....	131
35	Modellierung zeitpunktspezifischer, faktorbedingter Ausfallwahrscheinlichkeiten für Kredite mit heterogenen Ausstattungsmerkmalen.....	139
36	Semi-analytische Modellierung der Ereignisverteilung eines Kreditportfolios.....	167
37	Semi-analytische Modellierung der Verlustverteilung eines Kreditportfolios .....	180
38	Überführung des semi-analytischen Modells in eine Monte-Carlo-Simulation ....	185
39	Ausgewählte Leistungsmerkmale des semi-analytischen Modells.....	190
4	Transaktionsbezogene Modellanwendung zur semi-analytischen und simulativen Kreditrisikomessung von heterogenen CDO-Referenzportfolios .....	199
41	Kennzahlenorientierte Modellierung heterogener Referenzportfolios .....	201
42	Kreditrisikomessung mit Ereignisverteilungen.....	216
43	Kreditrisikomessung mit Verlustverteilungen .....	239
5	Transaktionsbezogene Modellanwendung zur Kreditrisikomessung und Bewertung von synthetischen CDOs .....	257
51	Kreditrisikomessung einzelner Tranchen synthetischer CDO-Strukturen.....	258
52	Kapitalmarktorientierte Bewertung synthetischer CDOs .....	274
6	Schlussbetrachtung .....	350

## Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis .....	VII
Tabellenverzeichnis .....	XI
Abkürzungsverzeichnis.....	XIII
Symbolverzeichnis.....	XX
1 Einleitung.....	1
11 Problemstellung und Zielsetzung.....	1
12 Gang der Untersuchung .....	8
2 Synthetische CDOs aus bankbetrieblicher Perspektive und Grundlagen der Kreditrisikomessung mit Unternehmenswertansätzen.....	13
21 Definition und empirische Bedeutung der Kreditverbriefung mit CDOs.....	13
211 Klassische CDOs .....	13
212 Synthetische CDOs.....	16
213 Empirische Bedeutung der Kreditverbriefung mit CDOs .....	19
22 Grundlagen zum Aufbau von CDO-Transaktionen .....	23
221 Zusammenstellung und Zusammensetzung von CDO-Referenzportfolios....	23
222 Konstruktion und Funktion von Zweckgesellschaften .....	26
2221 SPVs als Instrument der konkursrechtlichen Isolierung des Referenzportfolios .....	26
2222 SPVs als Instrument der handelsrechtlichen und aufsichtsrechtlichen Isolierung des Referenzportfolios.....	30
2223 SPVs als Instrument zur Separation von Einzelrisiken aus dem Referenzportfolio.....	36
223 Refinanzierung der Zweckgesellschaft durch die Emission von CDOs.....	38
224 Überblick über weitere CDO-Transaktionselemente und -beteiligte .....	42
23 Struktur synthetischer CDO-Transaktionen am Beispiel des PROMISE-Programms der KfW .....	44
231 Zur Motivation des PROMISE-Programms .....	44
232 Typische Charakteristika von PROMISE-Referenzportfolios .....	47
233 Zur synthetischen Verbriefung von PROMISE-Referenzportfolios mit CDOs	50
234 Zur Struktur und Funktion von Zinsunterbeteiligungen.....	54
235 SPVs am Beispiel des PROMISE-Programms.....	56

24	Grundlagen der unternehmenswertorientierten Kreditrisikomessung .....	59
241	Kreditrisikomessung mit Kreditrisikomodellen .....	59
242	Unternehmenswertorientierte Kreditrisikomessung für einzelne Schuldtitel .....	64
2421	Verlustdefinitionen im einfachen Unternehmenswertansatz .....	64
2422	Unternehmenswertentwicklung als geometrisch BROWNSche Bewegung .....	66
2423	Optionspreistheoretische Parametrisierung der Unternehmenswertentwicklung .....	68
2424	Verlustverteilungen im einfachen Unternehmenswertansatz .....	73
2425	PD, EL und LGD im System der Lower Partial Moments .....	77
2426	Erweiterungen des einfachen Unternehmenswertansatzes in Grundzügen .....	79
243	Unternehmenswertorientierte Kreditrisikomessung für ein Portfolio von Schuldtiteln .....	84
2431	Die Ausfallkorrelation als Maß für gemeinsame Kreditausfälle .....	84
2432	Kritik zur Ausfallkorrelation als Maß für gemeinsame Kredit- ausfälle .....	85
2433	Ausfallkorrelationen und Abhängigkeiten von Kreditausfällen im einfachen Unternehmenswertansatz .....	89
2434	Vom einfachen Unternehmenswertansatz zum Faktormodell .....	94
2435	Faktormodellbasierte Kreditrisikoportfoliomodelle aus Literatur und Praxis .....	97
3	Entwicklung eines semi-analytisch rechenbaren unternehmenswertorientierten Modells zur Quantifizierung des Kreditrisikos heterogener CDO-Referenzportfolios .....	103
31	Modellrahmen und Modelleinordnung im Lichte empirischer Analysen .....	103
32	Modellierung von Credit Curves .....	110
321	Ausfallzeit, Ausfallwahrscheinlichkeit und Credit Curves .....	110
322	Konstruktion von Credit Curves mittels Informationen der Ratingagenturen .....	113
33	Credit Curves, Ausfallschranken und zeittransformierte Prozesse .....	123
34	Berücksichtigung von Ausfallkorrelationen .....	131
341	Ein-Faktor-Modell für Unternehmenswertentwicklungen .....	132
342	Modellierung der Unternehmenswertkorrelationen .....	134
343	Prozesskorrelationen im Lichte der Zeittransformation .....	135

35	Modellierung zeitpunktspezifischer, faktorbedingter Ausfallwahrscheinlichkeiten für Kredite mit heterogenen Ausstattungsmerkmalen.....	139
351	BROWNSche Brücken als Basis der semi-analytischen Modellierung .....	139
352	BROWNSche Brücken als Faktoren .....	141
353	Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten im Ein-Faktor-Modell und die Modellierung von Ausfällen langlaufender Kredite.....	145
354	Bedingte Ausfalldichten im Ein-Faktor-Modell und die Modellierung der zeitlichen Struktur von Kreditausfällen.....	151
355	Bedingte Ausfalldichten im Ein-Faktor-Modell und die Modellierung von Ausfällen kurzlaufender Kredite .....	157
356	Abhängigkeit und Unabhängigkeit bedingter Ausfallereignisse.....	161
36	Semi-analytische Modellierung der Ereignisverteilung eines Kreditportfolios.....	167
361	Ereignis, gemeinsames Ereignis, gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit und Ereignisverteilung.....	167
362	Quantifizierung der Ereignisverteilung mit Hilfe des Sequential Probability Shiftings .....	171
363	Quantifizierung der Ereignisverteilung sowie von Ereignisverteilungsausschnitten mit Hilfe der Inversen FOURIER-Transformation .....	174
37	Semi-analytische Modellierung der Verlustverteilung eines Kreditportfolios .....	180
371	Verlust, gemeinsamer Verlust und Verlustverteilung .....	180
372	Modifikation des Sequential Probability Shiftings.....	181
373	Modifikation der Inversen FOURIER-Transformation .....	182
38	Überführung des semi-analytischen Modells in eine Monte-Carlo-Simulation ....	185
381	Zeitpunktbezogene Simulation.....	185
382	Zeitraumbezogene Simulation.....	186
39	Ausgewählte Leistungsmerkmale des semi-analytischen Modells.....	190
391	Erfassung heterogener Nominalwerte .....	190
392	Präzise Wiedergabe von Verlustverteilungscharakteristika .....	191
393	Betrachtung zeitraumbezogener Kreditausfälle .....	192
394	Erfassung heterogener Restlaufzeiten .....	195
395	Ausfallkorrelationen und Abhängigkeiten von Kreditausfällen im semi-analytischen Modellansatz.....	197
4	Transaktionsbezogene Modellanwendung zur semi-analytischen und simulativen Kreditrisikomessung von heterogenen CDO-Referenzportfolios .....	199
41	Kennzahlenorientierte Modellierung heterogener Referenzportfolios .....	201

411	Nominalwerte .....	201
412	Ratings .....	204
413	Restlaufzeiten .....	206
414	Kapitaldienst .....	207
415	Recovery Rates .....	208
416	Replenishments .....	212
417	Komplexitätsreduktion durch Bänderbildung .....	213
42	Kreditrisikomessung mit Ereignisverteilungen .....	216
421	Ereignisverteilungen ohne Portfolioreplenishments .....	216
422	Ereignisverteilungen mit Portfolioreplenishments .....	226
423	Ereignisverteilungen in der Sensitivitäts- und Szenarioanalyse .....	231
43	Kreditrisikomessung mit Verlustverteilungen .....	239
431	Verlustverteilungen ohne Portfolioreplenishments .....	239
4311	Heterogene Portfolios mit endfälligen Krediten .....	239
4312	Heterogene Portfolios mit Abzahlungsdarlehen .....	246
432	Verlustverteilungen mit Portfolioreplenishments .....	247
4321	Heterogene Portfolios mit endfälligen Krediten .....	247
4322	Heterogene Portfolios mit Abzahlungsdarlehen .....	248
4323	Berücksichtigung von Replenishment-Triggern .....	249
4324	Berücksichtigung stochastischer Recovery Rates .....	252
433	Verlustverteilungen in der Sensitivitäts- und Szenarioanalyse .....	253
5	Transaktionsbezogene Modellanwendung zur Kreditrisikomessung und Bewertung von synthetischen CDOs .....	257
51	Kreditrisikomessung einzelner Tranchen synthetischer CDO-Strukturen .....	258
511	Tranchenverlustverteilungen und tranchenverlustverteilungsbasierte Kennzahlen auf der Basis des semi-analytischen Modells .....	258
5111	Tranchenausfallwahrscheinlichkeiten .....	258
5112	Erwartete Tranchenverluste .....	260
5113	Erwartete Tranchenverluste im Falle eines Tranchenausfalls .....	263
5114	Tranchenrecovery Rates und Tranchenrecoveryverteilungen .....	265
512	Tranchenverlustverteilungen und tranchenverlustverteilungsbasierte Kennzahlen auf der Basis der Simulation .....	270
513	Berücksichtigung begrenzter Zinsunterbeteiligungen bei der Kreditrisikomessung des First Loss Piece .....	271

52	Kapitalmarktorientierte Bewertung synthetischer CDOs .....	274
521	Einordnung der semi-analytischen Modellierung sowie der Simulation in die Welt der risikoneutralen Bewertung.....	274
5211	Arbitragefreie Modellierung des Marktes für ausfallrisikofreie Zahlungsansprüche .....	274
5212	Erweiterung des Marktes für ausfallrisikofreie Zahlungsan- sprüche um ausfallrisikobehaftete Zahlungsansprüche .....	281
5213	Konkretisierung des um ausfallrisikobehaftete Zahlungsan- sprüche erweiterten Marktes durch das semi-analytische Modell....	287
5214	Bewertung ausfallrisikobehafteter Zahlungsansprüche des CDO- Referenzportfolios im erweiterten Markt unter Berücksichtigung der Konkretisierung durch das semi-analytische Modell .....	294
52141	Bewertung potentieller Nominalwertzahlungen .....	294
52142	Bewertung potentieller Recovery-Zahlungen.....	296
52143	Bewertung potentieller Kuponzahlungen .....	299
52144	Bewertung ausfallrisikobehafteter Zahlungsansprüche .....	300
522	Kapitalmarktdeduzierte Ermittlung risikoneutraler Credit Curves als Basis der semi-analytischen und simulativen risikoneutralen Bewertung.....	301
5221	Abschnittsweise konstante Credit Curves .....	301
5222	Credit Curves unter Berücksichtigung von Ratingmigrationen.....	306
523	Risikoneutrale Tranchenbewertung und Ermittlung fairer CDO- Risikoprämien.....	309
5231	Duplikationstheoretische Betrachtung von CDOs.....	309
5232	Semi-analytische Ermittlung risikoneutraler Tranchenbarwerte .....	315
5233	Semi-analytische Ermittlung fairer CDO-Risikoprämien .....	322
5234	Tranchenbarwerte und faire CDO-Risikoprämien für homogene Referenzportfolios .....	323
5235	Simulative Ermittlung risikoneutraler Tranchenbarwerte und fairer CDO-Risikoprämien .....	332
524	Darstellung und Analyse der risikoadäquaten Cash Flow-Struktur von CDO-Transaktionen auf der Basis fairer CDO-Risikoprämien.....	334
5241	CDO-Risikoprämien und Risikoprämienzahlungen im Zeitverlauf.	334
5242	Risikoprämien und Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Faktorsensitivitäten.....	344
6	Schlussbetrachtung .....	350
	Anlagenverzeichnis.....	365
	Literaturverzeichnis .....	426

## Abbildungsverzeichnis

Abb. 2-1: Arten von Asset-Backed Securities nach dem Kriterium der verbrieften Aktiven.....	14
Abb. 2-2: Der europäische ABS-Markt in Zahlen .....	20
Abb. 2-3: Der europäische CDO-Markt in Zahlen.....	21
Abb. 2-4: Verbriefung von Mittelstandskrediten in den USA und in Europa .....	22
Abb. 2-5: Die bilanzielle Grundstruktur von CDO-Transaktionen (True Sale).....	26
Abb. 2-6: Struktur einer synthetischen CDO-Verbriefung am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 Plc-Transaktion.....	53
Abb. 2-7: Wert- und Verlustverteilung in $t_H=T$ im einfachen Unternehmenswertansatz .....	74
Abb. 2-8: Wert- und Verlustverteilung in $t_H<T$ im einfachen Unternehmenswertansatz .....	76
Abb. 2-9: Stratifizierung eines Kontingenzwürfels .....	85
Abb. 2-10: Wertebereiche der gemeinsamen Überlebenswahrscheinlichkeiten.....	88
Abb. 2-11: Korrelationseffekte bei mehrperiodiger Anwendung von CREDITMETRICS™ .....	101
Abb. 3-1: Das semi-analytische Kreditrisikomodell im Überblick.....	108
Abb. 3-2: Credit Curves vom Typ A.....	114
Abb. 3-3: Credit Curves vom Typ A und B des Investment-Grades im Vergleich .....	119
Abb. 3-4: Credit Curves vom Typ A und B des Speculative-Grades im Vergleich .....	120
Abb. 3-5: Credit Curves vom Typ A, B und C im Vergleich für "CCC"-geratete Kredite .....	122
Abb. 3-6: Zeittransformierte BROWNSche Bewegung.....	124
Abb. 3-7: Zeittransformation mit ratingunabhängigen Ausfallschranken .....	127
Abb. 3-8: Zeittransformation mit ratingabhängigen Ausfallschranken (Typ A) .....	128
Abb. 3-9: Zeittransformation mit ratingabhängigen Ausfallschranken (Typ B).....	129
Abb. 3-10: Ausfallwahrscheinlichkeitsabhängige Unternehmenswertkorrelationen.....	135
Abb. 3-11: Ratingspezifische bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten .....	149
Abb. 3-12: Ratingspezifische bedingte Ausfalldichten.....	157
Abb. 3-13: Ability-to-Pay-Prozess und Extension bei kurzen Restlaufzeiten im Faktormodell.....	158
Abb. 3-14: Korrelation zeittransformierter Prozesse mit BROWNSchen Faktorbrücken (I) .....	161
Abb. 3-15: Korrelation zeittransformierter Prozesse mit BROWNSchen Faktorbrücken (II).....	164
Abb. 3-16: Abhängigkeit vs. Unabhängigkeit bedingter Ausfallereignisse bei langlaufenden Krediten.....	164

Abb. 3-17: Abhängigkeit vs. Unabhängigkeit bedingter Ausfallereignisse bei kurzlaufenden Krediten.....	166
Abb. 3-18: Prinzip des Sequential Probability Shiftings .....	171
Abb. 3-19: Sequential Probability Shifting vs. Inverse FOURIER-Transformation .....	179
Abb. 3-20: Heterogene Nominalwerte .....	190
Abb. 3-21: Semi-Analytik versus Pfadsimulation bei heterogenen Nominalwerten .....	192
Abb. 3-22: Semi-Analytik im Modellvergleich .....	194
Abb. 3-23: Restlaufzeitverteilungen .....	195
Abb. 3-24: Unabhängigkeitsapproximation bei heterogenen Restlaufzeiten.....	195
Abb. 3-25: Unabhängigkeitsapproximation bei homogenisierten Restlaufzeiten.....	196
Abb. 4-1: Vorgehensweise zur Ermittlung der Ereignis- und Verlustverteilungen .....	199
Abb. 4-2: Gleichverteilung vs. Beta-Verteilung .....	202
Abb. 4-3: Nominalwerthäufigkeiten im Modellportfolio.....	203
Abb. 4-4: Recoveryverteilungen von Bonds und Loans .....	210
Abb. 4-5: Auswirkung der Bänderbildung auf die bedingte Verlustverteilung.....	215
Abb. 4-6: Ereignisverteilung des Referenzportfolios im Licht der numerischen Integration.....	216
Abb. 4-7: Ereignisverteilung des Referenzportfolios für alternative Analysezeitpunkte.....	217
Abb. 4-8: Ereignisverteilungen des Referenzportfolios für alternative Credit Curves...	218
Abb. 4-9: Laufzeiteffekt auf die Ereignisverteilung .....	220
Abb. 4-10: Ratingeffekt auf die Ereignisverteilung.....	221
Abb. 4-11: Modellvergleich mit Basel II .....	223
Abb. 4-12: Modellvergleich bei homogenisierten Portfolios.....	225
Abb. 4-13: Effekt der Replenishments auf die Ereignisverteilung von Bonds .....	226
Abb. 4-14: Effekt der Replenishments auf die Ereignisverteilung von Loans .....	227
Abb. 4-15: Effekt des Replenishment-Triggers auf die Ereignisverteilung von Loans....	228
Abb. 4-16: Replenishment-Trigger, Recovery Rate und erwartete Kreditausfallzahl .....	230
Abb. 4-17: Investment-Grade Credit Spreads im Zeitablauf .....	232
Abb. 4-18: Best-Case Credit Curves vom Typ B im Vergleich.....	233
Abb. 4-19: Worst-Case Credit Curves von Typ B im Vergleich .....	234
Abb. 4-20: Ereignisverteilung für Loans und Bonds in der Szenarioanalyse .....	235
Abb. 4-21: Ereignisverteilung für Loans mit Replenishmentmaßnahmen und Replenishment-Trigger in der Szenarioanalyse.....	237
Abb. 4-22: Worst-Case-Ereignisverteilungen für Loans mit Replenishments und Replenishment-Trigger .....	238
Abb. 4-23: Verlustverteilung des Referenzportfolios für alternative Analysezeitpunkte.....	240

Abb. 4-24: Nominalwerteffekt auf die Verlustverteilung .....	241
Abb. 4-25: Verlustverteilungen des Referenzportfolios für alternative Recovery Rates .....	242
Abb. 4-26: Modellvergleich mit Basel II bei heterogener Portfoliostruktur.....	244
Abb. 4-27: Modellvergleich mit Basel II bei homogener Portfoliostruktur.....	245
Abb. 4-28: Effekt der Tilgung auf die Verlustverteilung des Referenzportfolios .....	246
Abb. 4-29: Effekt der Replenishments auf die Verlustverteilung des Referenzportfolios .....	247
Abb. 4-30: Verlustverteilung des Referenzportfolios mit Tilgungen und Replenishments.....	248
Abb. 4-31: Verlustverteilung des Referenzportfolios mit Replenishments und Replenishment-Trigger im Vergleich .....	250
Abb. 4-32: Replenishment-Trigger, Recovery Rate und erwarteter Portfolioverlust .....	251
Abb. 4-33: Verlustverteilung für Loans mit Replenishmentmaßnahmen und Replenishment-Trigger in der Szenarioanalyse.....	254
Abb. 4-34: Worst-Case-Verlustverteilungen für Loans mit Replenishments und Replenishment-Trigger .....	256
Abb. 5-1: Vorgehensweise zur Ermittlung des Kreditrisikos von CDO-Tranchen .....	257
Abb. 5-2: Verlustverteilungen einzelner Tranchen ohne Replenishments.....	260
Abb. 5-3: Verlustprofil und erwarteter Verlust einer Tranche.....	261
Abb. 5-4: Verlustverteilungen einzelner Tranchen für verschiedene Recovery Rates ohne Replenishments .....	262
Abb. 5-5: Erwartete Verlustraten der Mezzanine-Tranchen in Abhängigkeit von der Recovery Rate.....	262
Abb. 5-6: Abhängigkeit des EL und des LGD von der Tranchenstärke .....	263
Abb. 5-7: Recoveryverteilungen von ABS-Tranchen und Krediten im Vergleich.....	266
Abb. 5-8: Einfluss des Credit Enhancement Levels auf die Recoveryverteilung .....	267
Abb. 5-9: Einfluss der Tranchenstärke auf die Recoveryverteilung .....	268
Abb. 5-10: Verlustverteilungen einzelner Tranchen für verschiedene Recovery Rates mit Replenishments und Replenishment-Trigger .....	271
Abb. 5-11: Zahlungen und übrige Ansprüche aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung .....	272
Abb. 5-12: Duplikation von CLNs mit Referenzbaskets bei nachschüssiger Prämienzahlung .....	312
Abb. 5-13: Duplikation von CLNs mit Referenzbaskets bei vorschüssiger Prämienzahlung .....	314
Abb. 5-14: Abnehmende Tranchenstärke und nachschüssige CDO-(Teil-) Prämienzahlungen.....	318
Abb. 5-15: Risikoadequate Cash Flow-Struktur einer CDO-Transaktion .....	336
Abb. 5-16: Einfluss des Credit Enhancement Levels sowie der Tranchenstärke auf die Risikoprämie.....	338

Abb. 5-17: Erwartete Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Zeit (I) .....	339
Abb. 5-18: Erwartete Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Zeit (II) .....	341
Abb. 5-19: Erwarteter Risikoprämienzahlungsverlauf vs. Faktorsensitivität .....	344
Abb. 5-20: Erwartete Risikoprämienzahlungsbeiträge der Tranchen in Abhängigkeit der Faktorsensitivität.....	345
Abb. 5-21: CDO-Risikoprämien in Abhängigkeit der Faktorsensitivität .....	346
Abb. 5-22: Erwartete Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Faktorsensitivität (I).....	347
Abb. 5-23: Erwartete Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Faktorsensitivität (II) .....	348

## Tabellenverzeichnis

Tab. 2-1:	Tranchenbildung am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 Plc-Transaktion.....	51
Tab. 2-2:	Zweckgesellschaften im Rahmen der PROMISE-Verbriefungsstruktur der KfW .....	57
Tab. 2-3:	Kontingenztafel zweier Ausfallindikatoren.....	84
Tab. 2-4:	Wertebereiche gemeinsamer Überlebenswahrscheinlichkeiten.....	87
Tab. 3-1:	Historische Ø kumulative Ausfallraten nach STANDARD & POOR'S (Auszug).....	113
Tab. 3-2:	Historische Ø 1-Jahres-Migrationsraten nach STANDARD & POOR'S.....	115
Tab. 3-3:	Generator-Matrix .....	118
Tab. 3-4:	Ausfallwahrscheinlichkeiten für "CCC" -geratete Kredite bei unterschiedlichen Credit Curves.....	121
Tab. 3-5:	Ratingabhängige Ausfallschranken .....	129
Tab. 3-6:	Ratingabhängige Unternehmenswertkorrelationen.....	135
Tab. 4-1:	Nominalwertanteile am Referenzportfolio .....	201
Tab. 4-2:	Anzahl der Kredite in den einzelnen Größenklassen im Modellportfolio.....	203
Tab. 4-3:	Bonitätsstruktur eines typischen Mittelstandsportfolios.....	204
Tab. 4-4:	Ratingfaktoren von MOODY'S und FITCH sowie das Modellportfoliorating .....	205
Tab. 4-5:	Verteilung der Restlaufzeiten im Referenzportfolio.....	206
Tab. 4-6:	Verteilung der Restlaufzeiten im Referenzportfolio (RP) und Modellportfolio (MP) in Nominalvolumina .....	207
Tab. 4-7:	Portfoliozinssätze.....	208
Tab. 4-8:	Mittelwerte und Standardabweichungen von Recovery Rates .....	209
Tab. 4-9:	Bändercharakteristika für das Referenzportfolio.....	214
Tab. 4-10:	Erwartungswerte und 1%-Quantile der Ereignisverteilung des Referenzportfolios mit Replenishments und Replenishment-Trigger im Vergleich.....	229
Tab. 4-11:	Ratingabhängige Ausfallschranken in der Szenarioanalyse .....	234
Tab. 4-12:	Ratingabhängige Faktorsensitivitäten in der Szenarioanalyse.....	235
Tab. 4-13:	Erwartungswerte und Quantile der Ereignisverteilung ohne Replenishments in der Szenarioanalyse.....	236
Tab. 4-14:	Erwartungswerte und Quantile der Ereignisverteilung von Loans mit Replenishments und Replenishment-Trigger in der Szenarioanalyse .....	238
Tab. 4-15:	Quantile der Verlustverteilung.....	241
Tab. 4-16:	Erwartungswerte und 1%-Quantile der Verlustverteilung des Referenzportfolios mit Replenishments und Replenishment-Trigger im Vergleich.....	250

Tab. 4-17: Erwartungswerte und Quantile der Verlustverteilung von Loans mit Replenishments und Replenishment-Trigger in der Szenarioanalyse .....	255
Tab. 5-1: Schwellenwerte der PROMISE-K 2001-1 Plc-Transaktion in Mio. EUR.....	258
Tab. 5-2: Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD), Erwartete Verluste (EL) und Erwartete Verluste im Falle eines Ausfalles (LGD) der PROMISE-K 2001-1 PLC-Tranchen ohne Replenishments auf der Basis des semi-analytischen Modells .....	259
Tab. 5-3: Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) und Erwartete Verluste (EL) der PROMISE-K 2001-1 PLC-Tranchen mit Replenishments und Replenishment-Trigger .....	270
Tab. 5-4: Durchschnittliche verbleibende Ansprüche aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung für verschiedene Recovery Rates .....	273
Tab. 5-5: Risikoprämien einzelner CDO-Tranchen .....	311
Tab. 5-6: Risikoneutrale Hazard Rate-Funktion für "BB"-geratete Kredite .....	335

## Abkürzungsverzeichnis

Abb.	<b>Abbildung</b>
Abk.	<b>Abkürzung</b>
Abs.	<b>Absatz</b>
ABS	<b>Asset-Backed Security</b>
AG	<b>Aktiengesellschaft</b>
akt.	<b>aktualisiert</b>
AktG	<b>Aktiengesetz</b>
AMEX	<b>American Stock Exchange</b>
an.	<b>analog</b>
AO	<b>Abgabenordnung</b>
Art.	<b>Artikel</b>
a. s.	<b>almost surely</b>
AStG	<b>Gesetz über die Besteuerung bei Auslandsbeziehungen</b>
Aufl.	<b>Auflage</b>
BaCa	<b>Bank Austria Creditanstalt</b>
BaFin	<b>Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht</b>
BaKred	<b>Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen</b>
BBVA	<b>Banco Bilbao Vizcaya Argentaria</b>
BCBS	<b>Basel Committee on Banking Supervision</b>
BCP	<b>Banco Comercial Portugês</b>
BE	<b>Belgien</b>
bearb.	<b>bearbeitet</b>
BET	<b>Binomial Expansion Technique</b>
BGB	<b>Bürgerliches Gesetzbuch</b>
BGBI	<b>Bundesgesetzblatt</b>
BilMoG	<b>Bilanzrechtsmodernisierungsgesetz</b>
BilReG	<b>Bilanzrechtsreformgesetz</b>
BIZ	<b>Bank für Internationalen Zahlungsausgleich</b>
Bp	<b>Basispunkt</b>
bspw.	<b>Beispielsweise</b>
BW	<b>Baden-Württembergische Bank</b>
bzgl.	<b>bezüglich</b>

bzw.	<b>beziehungsweise</b>
ca.	<b>circa</b>
CA	<b>Consumer Asset (Backed Security)</b>
CAPM	<b>Capital Asset Pricing Model</b>
CBO	<b>Credit Bond Obligation</b>
CDE	<b>Conditional Downside Expectation</b>
CDO	<b>Collateralized Debt Obligation</b>
CDS	<b>Credit Default Swap</b>
CF	<b>charakteristische Funktion</b>
CG	<b>Credit Grades</b>
CLN	<b>Credit Linked Note</b>
CLO	<b>Collateralized Loan Obligation</b>
CM	<b>Credit Metrics</b>
CMBS	<b>Commercial Mortgage-Backed Security</b>
CP	<b>Consultative Paper</b>
CR+	<b>Credit Risk+</b>
CSFB	<b>Credit Suisse First Boston</b>
CSO	<b>Collateralized Synthetic Obligation</b>
CVaR	<b>Credit Value-at-Risk</b>
DE	<b>Downside Expectation, Deutschland</b>
DG	<b>Deutsche Genossenschaftsbank</b>
d. h.	<b>das heißt</b>
Dr.	<b>Doktor</b>
DtA	<b>Deutsche Ausgleichsbank</b>
durchges.	<b>durchgesehen</b>
EAD	<b>Exposure at Default</b>
EDF	<b>Expected Default Frequency</b>
EG	<b>Europäische Gemeinschaft</b>
EL	<b>Expected Loss</b>
engl.	<b>englisch</b>
erg.	<b>ergänzend</b>
erw.	<b>erweitert</b>
ES	<b>Espania</b>
ESF	<b>European Securitization Forum</b>
EU	<b>Europäische Union</b>

EW	Erwartungswert
erg.	ergänzt
et al.	et alii
evt.	eventuell
EUR	Euro
EURIBOR	Euro Interbank Offered Rate
EWG	Europäische Wirtschaftsgemeinschaft
f.	folgende, für
FFT	Fast FOURIER Transform
FI	Finnland
FK	Firmenkunde
FLP	First Loss Piece
Fn.	Fußnote
FR	Frankreich
FRN	Floating Rate Note
FRSTF	Federal Reserve System Task Force
GAAP	Generally Accepted Accounting Principles
gem.	gemäß
GewStDV	Gewerbesteuerdurchführungsverordnung
GewStG	Gewerbesteuergesetz
ggf.	gegebenenfalls
GmbH	Gesellschaft mit beschränkter Haftung
GmbHG	Gesetz betreffend die Gesellschaften mit beschränkter Haftung
grds.	grundsätzlich
HGB	Handelsgesetzbuch
HJM	Heath, Jarrow, Morton
h. M.	herrschende Meinung
Hrsg.	Herausgeber
HVB	Bayerische Hypo- und Vereinsbank
IAS	International Accounting Standard
i. d. R.	in der Regel
IDW	Institut der Wirtschaftsprüfer
IEP	Ierish Punt (Irish Pound)
i. e. S.	im engeren Sinne
IFBG	Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft

IfM	Institut für <b>M</b> ittelstandsforschung
IFRS	<b>I</b> nternational <b>F</b> inancial <b>R</b> eporting <b>S</b> tandard
IFT	<b>i</b> nverse <b>F</b> OURIER- <b>T</b> ransformation
i. H. d.	<b>i</b> n <b>H</b> öhe <b>d</b> er/ <b>d</b> es
i. H. v.	<b>i</b> n <b>H</b> öhe von
II	<b>I</b> nternational
IKB	<b>I</b> ndustriekreditbank
Inc.	<b>I</b> ncorporated
IRB	<b>I</b> nternal <b>R</b> atings- <b>B</b> ased
i. S. d.	<b>i</b> m <b>S</b> inne <b>d</b> es/ <b>d</b> er
ISE	<b>I</b> rish <b>S</b> tock <b>E</b> xchange
ISO	<b>I</b> nternational <b>O</b> rganization for <b>S</b> tandardization
ISP	<b>I</b> nterest <b>S</b> ub- <b>P</b> articipation
IT	<b>I</b> talien
i. V. m.	<b>i</b> n <b>V</b> erbindung <b>m</b> it
Jg.	<b>J</b> ahrgang
K	<b>K</b> upon
KFG	<b>K</b> leinunternehmer <b>f</b> örderungsgesetz
KfW	<b>K</b> reditanstalt für <b>W</b> iederaufbau
KG	<b>K</b> ommanditgesellschaft
KMV	<b>K</b> ealhofer, <b>M</b> cQuown, <b>V</b> asicek
KWG	<b>K</b> reditwesengesetz
LFB	<b>l</b> iquiditätsmäßig- <b>f</b> inanzieller <b>B</b> ereich
lfd.	<b>l</b> aufend
LGD	<b>L</b> oss <b>G</b> iven <b>D</b> efault
LP	<b>l</b> ineare <b>P</b> rogrammierung
LPM	<b>L</b> ower <b>P</b> artial <b>M</b> oment
lt.	<b>l</b> aut
Ltd.	<b>L</b> imited
MBS	<b>M</b> ortgage- <b>B</b> acked <b>S</b> ecurities
m. E.	<b>m</b> eines <b>E</b> rachtens
MGF	<b>M</b> oment <b>G</b> enerating <b>F</b> unction
mind.	<b>m</b> indestens
Mio.	<b>M</b> illionen
MP	<b>M</b> odellportfolio

MPR	<b>Modellportfoliorating</b>
Mrd.	<b>Milliarde</b>
neubearb.	<b>neubearbeitet</b>
NL	<b>Niederlande</b>
No.	<b>Numero</b>
Nos.	<b>Numeros</b>
Nr.	<b>Nummer</b>
NR	<b>Not Rated</b>
NV	<b>Nominalvolumen</b>
NW	<b>Nominalwert</b>
NYSE	<b>New York Stock Exchange</b>
o. B. d. A.	<b>ohne Beschränkung der Allgemeinheit</b>
OECD	<b>Organisation für Economic Co-Operation and Development</b>
o. J.	<b>ohne Jahr</b>
o. Jg.	<b>ohne Jahrgang</b>
ONV	<b>Outstanding Nominal Value</b>
o. O.	<b>ohne Ort</b>
p. a.	<b>per anno</b>
PD	<b>Probability of Default</b>
PGF	<b>Probability Generating Function</b>
PGR	<b>Personen- und Gesellschaftsrecht</b>
Plc	<b>Public Limited Company</b>
Promise	<b>Programme for Mittelstand Loan Securitisation, Promotional Mittelstand Loan Securitisation</b>
PT	<b>Portugal</b>
PWC	<b>Price, Waterhouse, Coopers</b>
RechKredV	<b>Verordnung über die Rechnungslegung der Kreditinstitute und Finanzdienstleistungsinstitute</b>
resp.	<b>respektive</b>
RMBS	<b>Residential Mortgage-Backed Securities</b>
RP	<b>Referenzportfolio, Risikoprämie</b>
S.	<b>Satz, Seite</b>
SFA	<b>Supervisory Formula Approach</b>
SIC	<b>Standing Interpretations Committee</b>
SME	<b>Small and Medium-sized Enterprises</b>

sog.	<b>so</b> genannt
SPE	<b>Special Purpose Entity</b>
SPS	<b>Sequential Probability Shifting</b>
SPV	<b>Special Purpose Vehicle</b>
stellv.	<b>stellvertretend</b>
T	<b>Tausend</b>
Tab.	<b>Tabelle</b>
TCA	<b>Taxes Consolidation Act</b>
tlw.	<b>teilweise</b>
TM	<b>Trademark</b>
TOB	<b>technisch-organisatorischer Bereich</b>
TR	<b>Trade Receivables (Backed Security)</b>
TrUG	<b>Gesetz über das Treuunternehmen</b>
u.	<b>und</b>
u. a.	<b>unter anderem</b>
überarb.	<b>überarbeitet</b>
UK	<b>United Kingdom</b>
URL	<b>Uniform Resource Locator</b>
US, U.S.	<b>United States (of America)</b>
USA	<b>United States of America</b>
u. s. w.	<b>und so weiter</b>
u. U.	<b>unter Umständen</b>
VaR	<b>Value at Risk</b>
VBA	<b>Visual Basic for Applications</b>
vgl.	<b>vergleiche</b>
v. H.	<b>von Hundert</b>
Vol.	<b>Volume</b>
vollst.	<b>vollständig</b>
vs.	<b>versus</b>
VuW	<b>Vereins- und Westbank</b>
WAL	<b>Weighted Average Life</b>
WBS	<b>Whole Business Securitisation</b>
wg.	<b>wegen</b>
WWW	<b>World Wide Web</b>
z. B.	<b>zum Beispiel</b>

ZCB	<b>Zero-Coupon Bond</b>
Ziff.	<b>Ziffer</b>
z. T.	<b>zum Teil</b>
zzgl.	<b>zuzüglich</b>

## Symbolverzeichnis

Funktionen und Operatoren:

$!$	Fakultät
$\{\}$	Mengenoperator
$  $	Betrag, Element aus einer Matrix
$\lfloor \cdot \rfloor$	ganzzahliger Teil des Arguments
$\lceil \cdot \rceil$	gerundeter Wert des Arguments
$\vee$	kleinstes $\sigma$ -Feld auf der Basis der Vereinigung mehrerer $\sigma$ -Felder
$\otimes$	Produkt von Mengen, $\sigma$ -Feldern und Räumen
$1_{\{\}}$	Indikatorfunktion
$\cos(\cdot)$	Kosinus
$cov(\cdot)$	Kovarianz
$diag(\cdot)$	Diagonalmatrix
$\exp(\cdot)$	Exponentialfunktion
$f(\cdot)$	Funktion, Dichtefunktion
$g(\cdot)$	Zeittransformation
$\inf \{\cdot\}$	Infimum
$\lim(\cdot)$	Grenzwertoperator
$\log(\cdot), \ln(\cdot)$	natürlicher Logarithmus
$\max(\cdot)$	Maximum
$\min(\cdot)$	Minimum
$\sin(\cdot)$	Sinus
$E(\cdot)$	Erwartungswert
$F(\cdot), F^{-1}(\cdot)$	Verteilungsfunktion, Umkehrung der Verteilungsfunktion
$G(\cdot)$	(wahrscheinlichkeits)erzeugende Funktion
$Korr(\cdot)$	Korrelation
$\Pr[\cdot]$	Wahrscheinlichkeit
$Var(\cdot)$	Varianz
$\sigma(\cdot)$	$\sigma$ -Feld-Operator
$\varphi(\cdot)$	charakteristische Funktion
$\Delta$	Differenz
$\Pi$	Produktoperator
$\Sigma$	Summenoperator

Skalare Größen:

$A$	Wert der Vermögensgegenstände (Assets), Ereignis
$B$	Standard-WIENER-Prozess (BROWNSche Bewegung), Geldmarktkonto, Diskontierungsfaktor
$C$	Kaufoption (Call), Reorganisationsschranke, Kuponprozess
$D$	Schulden (Debt)
$E$	Eigenkapital (Equity), EURIBOR-Referenzzinssatz
$F$	Faktor zur Größenadjustierung des Portfolionominalvolumens
$H$	risikoneutraler Hazard-Prozess
$I$	Ausfallindikator
$J$	Zahl der Simulationsläufe, Zahl der CDO-Tranchen
$K$	Ausfallschranke
$L$	Verlust, Portfoliobasiseinheit
$L'$	normierter Verlust
$M$	Anzahl der Risikofaktoren, Martingal
$M^*$	Anzahl der systematischen Risikofaktoren
$N$	Anzahl der Schuldtitel in einem Portfolio
$P$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$Q$	Quantil, risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß
$R$	Rating, Bonitätszustand
$S$	Zahl der Approximationspunkte zur inversen FOURIER-Transformation, Shortfall
$T$	Fälligkeitszeitpunkt
$Tr$	CDO-Tranche (geordnetes Paar zweier Schwellenwerte)
$U$	gleichverteilte Zufallsvariable
$W$	Standard-WIENER-Prozess (BROWNSche Bewegung)
$X$	Zufallsvariable, BROWNSche Brücke
$Y$	Zufallsvariable, zeittransformierter Standard-WIENER-Prozess
$Z$	standardnormalverteilte Zufallsvariable, Recovery-Prozess
$a$	Faktorsensitivität bezüglich eines makroökonomischen Risikofaktors, Drift-rate des Zinssatzprozesses
$b$	Faktorsensitivität bezüglich des idiosynkratischen Risikofaktors, Volatilität des Zinssatzprozesses
$c$	Koeffizient der (wahrscheinlichkeits)erzeugenden Funktion, Kupon

$d_1, d_2$	Argumente zum BLACK-SCHOLES-MERTON-Formelwerk
$e$	EULERSche Zahl 2,718...
$h$	(risikoneutrale) Hazard-Rate, Index, Häufigkeit
$i, j$	imaginäre Einheit, Indizes
$k$	Anzahl der Ratingklassen, Index, kritische Kreditausfallzahlen
$l$	Verlusthöhe (Ausprägung)
$m$	Risikofaktorindex, Anzahl von Swap-Satz- und Risikoprämienzahlungen
$n$	Zeitperiodenanzahl, Anzahl ausgefallener Kredite (Ausprägung)
$p$	Ausfallwahrscheinlichkeit
$\bar{p}$	Überlebenswahrscheinlichkeit
$q$	Migrationswahrscheinlichkeit
$r$	Zinssatz
$s, t$	Zeit, Betrachtungszeitpunkt
$u$	Integrationsvariable, Zeit, Betrachtungszeitpunkt
$w$	Umweltzustand
$z$	Hilfsvariable zur Erzeugendenfunktion
$\Gamma$	risikoneutraler, bedingter Hazard-Prozess
$\Psi$	makroökonomischer/systematischer Risikofaktor
$\alpha$	Startwert einer BROWNSchen Brücke, Parameter der Betaverteilung
$\beta$	Endwert einer BROWNSchen Brücke, Parameter der Betaverteilung
$\gamma$	Ausfallzeitpunkt auf der Basis des zeittransformierten Prozesses, risikoneutraler, bedingter Hazard Rate-Prozess
$\delta$	Recovery Rate
$\varepsilon$	idiosynkratischer Risikofaktor
$\eta$	Elastizität
$\theta$	Parameter zur Beta-Verteilung
$\lambda$	Element einer Generatormatrix
$\mu$	Driftrate, Erwartungswert
$\pi$	Elementarwahrscheinlichkeit, Randwahrscheinlichkeit (Kontingenztafel), Zahl Pi 3,141...
$\rho$	Korrelation, Faktorsensitivität
$\sigma$	Volatilität
$\sigma^{(i)}$	Volatilitätsparameter
$\tau$	Ausfallzeitpunkt, Kreditereigniszeitpunkt
$\upsilon$	Tranchenschwelle

## Vektoren und Matrizen:

<b>A</b>	Vektor der Werte der Vermögensgegenstände
<b>B</b>	multivariate BROWNSche Bewegung
<b>I</b>	Einheitsvektor, Einheitsmatrix
<b>K</b>	Korrelationskoeffizientenmatrix
<b>Q, <math>\bar{Q}</math></b>	Ratingmigrationsmatrix, inverse Ratingmigrationsmatrix
<b>X</b>	Vektor von Zufallsvariablen in der Faktordarstellung
<b>Z</b>	Vektor von standardnormalverteilten Zufallsvariablen
<b>a</b>	Matrix der unternehmensspezifischen Faktorsensitivitäten bezüglich der makroökonomischen Risikofaktoren
<b>b</b>	Vektor der unternehmensspezifischen Faktorsensitivitäten bezüglich der idiosynkratischen Risikofaktoren
<b><math>\Lambda</math></b>	Generatormatrix
<b><math>\Sigma</math></b>	Varianz-Kovarianz-Matrix
<b><math>\Psi</math></b>	Vektor der makroökonomischen Risikofaktoren
<b><math>\varepsilon</math></b>	Vektor der idiosynkratischen Risikofaktoren
<b><math>\mu</math></b>	Vektor der Driftraten, Erwartungswerte
<b><math>\sigma^{(\cdot)}</math></b>	Matrix der Volatilitätsparameter der Werte der Vermögensgegenstände der Unternehmen bzgl. der Risikofaktoren

## Mengen und Tupel:

$\emptyset$	leere Menge
$\mathcal{C}$	Erzeugendensystem
$\mathcal{F}$	$\sigma$ -Algebra
$\mathbb{F}$	Filtration, Referenzfiltration
$\mathcal{G}$	$\sigma$ -Algebra, erzeugt durch Referenzinformationen und Indikatoren
$\mathcal{G}$	Filtration, erzeugt durch Referenzinformationen und Indikatorprozesse
$\mathcal{I}$	Indexmenge, $\sigma$ -Algebra, erzeugt durch Indikatoren
$\mathbb{I}$	Filtration, erzeugt durch Indikatorprozesse
$\Omega$	Grundgesamtheit
$(\Omega, \mathcal{F})$	messbarer Raum
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum

Verteilungen:

$Be(\cdot)$	BERNOULLIVerteilung
$Beta(\cdot)$	Betaverteilung
$N(\cdot)$	Normalverteilung
$SN$	Standardnormalverteilung
$U(\cdot)$	Gleichverteilung
$\sim$	statistisch verteilt wie

# 1 Einleitung

## 11 Problemstellung und Zielsetzung

Collateralized Debt Obligations (CDOs) stellen ein – insbesondere in jüngerer Zeit<sup>1</sup> – stark wachsendes Segment der Asset-Backed Securities dar. Der Begriff der Asset-Backed Securities ist historisch zu sehen und umfasst nach klassischer Vorstellung Wertschriften, deren Bedienung durch einen rechtlich verselbständigten, diversifizierten Pool möglichst homogener Aktiven gesichert wird, wobei der Pool der Aktiven mit den im Rahmen der Emission der Wertschriften zugeflossenen liquiden Mitteln durch eine eigens zu diesem Zweck gegründete Gesellschaft erworben wurde.<sup>2</sup> Im Fall von CDO-Transaktionen stellen die Wertschriften schuldrechtliche, an organisierten Kapitalmärkten platzierte Finanztitel dar. Die als Sicherheit dienenden Aktiven sind Kredite, die zumeist von Kreditinstituten syndiziert worden sind. Kreditinstitute können mit CDOs im Rahmen der Risikosteuerung von Kreditportfolios unerwünschte Risikopositionen unter Einbeziehung des organisierten Kapitalmarktes veräußern und über anschließende Investments gewünschte Rendite-Risikostrukturen aufbauen. Mit der Entwicklung von Kreditderivaten – insbesondere von Credit Default Swaps (CDS) – eröffneten sich neue Möglichkeiten der Ausgestaltung von CDO-Transaktionen. Kreditrisiken bzw. spezifische Teile des Kreditrisikos lassen sich mit diesen Instrumenten von den Krediten separieren, an eine Zweckgesellschaft veräußern und durch die Emission von CDOs am organisierten Kapitalmarkt platzieren. Als Sicherheit für die Bedienung der CDOs dienen nun die durch die Zweckgesellschaft risikofrei angelegten Emissionserlöse, nicht die als Underlying herangezogenen Kredite. Der Begriff der Asset-Backed Securities als Oberbegriff ist streng genommen insofern verfehlt, als die Begriffskomponente der Assets auf die risikobehafteten Kredite und nicht auf die risikofreien Anlagen der Zweckgesellschaft verweist. Dennoch ist die Performance der CDOs – wenn auch nur über den Umweg der Kreditderivate – wie bei klassischen Strukturen an die Performance des Forderungspools gekoppelt. Man spricht bei diesen neueren Formen von synthetischen Strukturen.

Während auf dem U.S.-amerikanischen CDO-Markt klassische CDO-Strukturen dominieren, ist der europäische CDO-Markt stark geprägt von synthetischen Strukturen.<sup>3</sup> Im letzten Jahr betrug der Anteil synthetischer CDOs am europäischen CDO-Markt ca. 40 %. In Deutschland überwiegen sogar mit der Verbriefungsplattform PROMISE der KfW die synthetischen Transaktionen. Über die Verbriefungsplattform PROMISE werden vorwiegend

---

<sup>1</sup> Vgl. J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 6-13.

<sup>2</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 27-32; S. Kümpel (2004), Bank- und Kapitalmarktrecht, S. 1838 f. (14.48-14.50) u. S. 1841 f. (14.58-14.60).

<sup>3</sup> Vgl. O. Cousseran und I. Rahmouni (2005), The CDO market, S. 50.

Bankkredite an deutsche mittelständische Unternehmen<sup>4</sup> synthetisch verbrieft und über den organisierten Kapitalmarkt einer breiten Anlegerschicht auch aus dem Ausland zugänglich gemacht. Der Erfolg der Verbriefungsplattform PROMISE unterstreicht die Bedeutung der CDOs zur (synthetischen) Investition in sonst illiquide Vermögenswerte und schwer zugängliche Branchen. Damit einhergehend kommt ihnen mit wachsender Transaktionszahl in zunehmendem Maße eine Indikatorfunktion für die Qualität mittelständischer Kreditportfolios zu.<sup>5</sup>

Asset-Backed Securities haben vermehrt die Aufmerksamkeit der Aufsichtsbehörden auf sich gezogen. Insbesondere die Bankenaufsicht musste des Öfteren beobachten, dass Kreditinstitute mit CDO-Transaktionen erfolgreich vorzuhaltendes regulatorisches Eigenkapital zur Abdeckung unerwarteter Verluste durch schlagend werdende Kreditrisiken reduzierten, ohne im selben Maße Kreditrisiken zu vermindern.<sup>6</sup> Daher hat das Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) in der neuen Eigenkapitalverordnung des BCBS (Basel II) ein spezielles Framework für ABS-Transaktionen verfasst, wonach „regulatory capital requirements on exposures arising from traditional and synthetic securitisations“<sup>7</sup> zukünftig weitgehend eigenmittelarbitragefrei zu bemessen sein werden. Im Rahmen von synthetischen Transaktionen werden häufig lediglich die Mezzanine-Tranchen am Kapitalmarkt platziert. Die Risiken der Junior-Tranchen verbleiben oft beim Originator, was den Aufsichtsbehörden – neben der Zusammensetzung der verbrieften Kreditportfolios – Sorge bereitet: „A supervisory concern with synthetic securitisations is the relative ease with which they permit banks to transfer the credit risk associated with higher quality assets while remaining exposed to those of higher risk.“<sup>8</sup> Zudem ist die aufsichtsrechtliche Behandlung der (Super-)Senior-Tranchen problematisch. Diese werden wie die Junior-Tranchen regelmäßig vom Originator einbehalten, sind daher nicht durch anerkannte Ratingagenturen geratet und werden regelmäßig durch Credit Default Swaps gesichert. Das Basler Framework für Asset-Securitisations stellt jedoch sowohl im Standardansatz als auch

---

<sup>4</sup> Den Kriterien zur Abgrenzung mittelständischer Unternehmen des INSTITUTS FÜR MITTELSTANDSFORSCHUNG (IfM) folgend, existieren in Deutschland über 3 Mio. mittelständische Unternehmen, die 70 % der Arbeitnehmer in Deutschland beschäftigen. Ein Unternehmen zählt zum Mittelstand, wenn die Umsätze 50 Mio. EUR nicht überschreiten und nicht mehr als 499 Mitarbeiter beschäftigt werden. Vgl. J. Thym und I. Barbour (2002), KfW's Promise programme, S. 3 u. 6.

<sup>5</sup> Vgl. D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 649.

<sup>6</sup> Die Senkung des vorzuhaltenden regulatorischen Eigenkapitals pro Einheit ökonomisches Kreditrisiko (z. B. CVaR) wird auch als Eigenmittelarbitrage bezeichnet. Für eine Diskussion am Beispiel einer CDO-Transaktion des PROMISE-Programms der KfW vgl. S. Jortzik und B. Müller (2002), Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate, S. 21-24.

<sup>7</sup> BCBS (2004), Basel II, Abs. 538. Siehe zur Definition synthetischer Verbriefungen i. S. d. BCBS ebenda, Abs. 540.

<sup>8</sup> BCBS (2001), 1st Working paper on securitisation, S. 19.

im Internal ratings-based (IRB) Approach for Securitisation Exposures vorrangig auf externe Ratings ab. Für (Super-)Senior-Tranchen sieht das BCBS ein Look-through Treatment vor, bei dem die Eigenkapitalunterlegung nach Maßgabe der durchschnittlichen Kreditportfolioqualität erfolgt.<sup>9</sup> Beim IRB-Ansatz kann bzw. muss unter bestimmten Voraussetzungen ein sog. Inferred Rating abgeleitet werden.<sup>10</sup> Kann kein Inferred Rating vergeben werden, sieht das BCBS zur Bestimmung der Eigenkapitalunterlegungspflicht eine sog. Supervisory Formula vor. Das BCBS ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht bereit, den Kreditinstituten – wohl aber den Ratingagenturen – die Ermittlung des Kreditrisikos einzelner Tranchen mit Hilfe von Kreditportfoliomodellen zu gestatten.<sup>11</sup> Zu groß ist die Sorge bzgl. der Qualität und Heterogenität derzeitiger Kreditrisikoportfoliomodelle sowie der Fähigkeit der Kreditinstitute, notwendige Modellparameter verlässlich und für die Bankenaufsicht nachvollziehbar zu schätzen.

Die seitens der Ratingagenturen verwendeten Modelle unterscheiden sich insbesondere in der Art und Weise der modelltheoretischen Abbildung des zu verbrieften Forderungspools. Dabei werden z. T. erhebliche Vereinfachungen vorgenommen.

Die BET-Methode<sup>12</sup> von MOODY'S transformiert ein heterogenes Kreditportfolio<sup>13</sup> mit abhängigen Ausfallereignissen in ein homogenes Kreditportfolio mit unabhängigen Ausfallereignissen. Basis der Transformation bilden MOODY'S Weighted Average Rating Factor und MOODY'S Diversity Score des Forderungspools.<sup>14</sup> MOODY'S kann anschließend wegen der (hergestellten) Unabhängigkeit der Ausfallereignisse verschiedenen Default-Szenarien mit Hilfe des Binomialkoeffizienten der Binomialverteilung Eintrittswahrscheinlichkeiten zuordnen.

Auch das Ratingverfahren von FITCH ermittelt zunächst die durchschnittliche Portfolioqualität.<sup>15</sup> Auf der Basis der durchschnittlichen Portfolioqualität wird in Abhängigkeit des Zielratings der jeweiligen Tranche eine sog. gestresste Ausfallrate ermittelt, welche den Anteil der Defaults am Volumen des Forderungspools angibt und somit das Credit Enhanc-

---

<sup>9</sup> Vgl. BCBS (2004), Basel II, Abs. 573.

<sup>10</sup> Vgl. BCBS (2004), Basel II, Abs. 617.

<sup>11</sup> Vgl. BCBS (2002), 2<sup>nd</sup> Working paper on securitisation, Abs. 7.

<sup>12</sup> Abk. f. Binomial Expansion Technique.

<sup>13</sup> Für homogene Kreditportfolios wurde von MOODY'S die lognormale Methode entwickelt. Vgl. dazu P. Mazataud und C. Yomtov (2000), Die lognormale Verteilung in der ABS-Analyse.

<sup>14</sup> Vgl. überblickshalber T. Heidorn und L. König (2003), CDOs, S. 15-24. Siehe auch A. Cifuentes und G. O'Connor (1996), BET, S. 2 (MOODY'S Report).

<sup>15</sup> Vgl. P. Cogan et al. (2000), Rating criteria for CDOs, S. 2-8 (FITCH Report). R. Hrvatin, H. Katz und J. Schiavetta (2000), Rating criteria for ABS/MBS CDOs, S. 2-7 (FITCH Report).

cement Level determiniert.<sup>16</sup> Die auf einen 10-Jahres-Horizont zielenden gestressten Ausfallraten basieren auf historischen Beobachtungen<sup>17</sup> von FITCH und sind mit einem Laufzeitanpassungsfaktor in Abhängigkeit der Laufzeit der Transaktion zu skalieren. Damit basiert das Rating von FITCH, ebenso wie das Rating von MOODY'S, auf einem homogenisierten Kreditportfolio.

STANDARD & POOR'S hingegen ermittelt die Verlustszenarien mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation. Das als CDO EVALUATOR™ umgesetzte Konzept basiert auf dem einfachen Unternehmenswertansatz nach BLACK, SCHOLES & MERTON, wonach ein Kredit ausfällt, wenn die Vermögensgegenstände des Schuldners im Fälligkeitszeitpunkt nicht mehr ausreichen, um die Schulden zu tilgen.<sup>18</sup> Abhängigkeiten zwischen einzelnen Ausfallereignissen im Referenzportfolio werden durch Korrelationen zwischen den Wertentwicklungen der Vermögensgegenstände der jeweiligen Schuldner explizit erfasst. Der wesentliche Vorteil aller Unternehmenswertmodelle ist die ökonomische Interpretierbarkeit der Ausfallereignisse. Nachteilig ist die vor allem bei erweiterten Unternehmenswertmodellen aufwendige Modellierung der Passiva der Schuldner. Problematisch erweist sich regelmäßig die Behandlung zwischenzeitlicher Tilgungs- und Zinszahlungen, wie sie üblicherweise im Rahmen von Bankdarlehensverträgen vereinbart werden. Die hohe Komplexität der Unternehmenswertmodelle zieht eine Umsetzung mit Hilfe der Monte-Carlo-Simulation meist zwingend nach sich. Monte-Carlo-Simulationen sind jedoch zeitaufwendig und weisen Simulationsfehler auf. Wünschenswert sind daher analytische, zumindest jedoch auf numerische Verfahren zurückgreifende semi-analytisch rechenbare Modelle.

In der wissenschaftlichen Forschung wurde in jüngerer Vergangenheit verstärkt die Verwendung alternativer multivariater Verteilungen für Kreditausfallzeiten zur Risikoanalyse und Bewertung von Basket Credit Derivatives und CDOs diskutiert.<sup>19</sup> Im Mittelpunkt standen dabei die verteilungsinhärenten Abhängigkeitsstrukturen und ihre Auswirkungen auf die Kreditrisikomessung derivativer Strukturen. Um semi-analytisch rechenbare Modelle konstruieren zu können, wurde zumeist auf Faktoransätze mit bedingt unabhängigen Aus-

---

<sup>16</sup> Soll bspw. eine 10 Jahre laufende Tranche mit einem „AAA“-Rating versehen werden, ist bei einer durchschnittlichen Portfolioqualität mit einer gestressten Ausfallrate von 14 % zu rechnen und das Credit Enhancement Level der Tranche entsprechend hoch anzusetzen. Vgl. zu diesem Beispiel M. Schmidtchen und H. Krämer-Eis (2002), CDO-Ratings der Agenturen, S. 3.

<sup>17</sup> Die Ausfallraten für ein AAA-Zielrating basieren auf Beobachtungen der Performance von Kreditportfolios zur Zeit der Weltwirtschaftskrise 1929. Vgl. M. Schmidtchen und H. Krämer-Eis (2002), CDO-Ratings der Agenturen, Fn. 11.

<sup>18</sup> Vgl. S. Bergman (2001), CDO Evaluator.

<sup>19</sup> Vgl. konzeptionell D. Li (2000), On default correlation, S. 48-51; U. Cherubini, E. Luciano und W. Vecchiato (2004), Copula methods in finance, S. 202-210.

fallereignissen zurückgegriffen. LAURENT & GREGORY analysieren Basket Credit Derivatives und CDOs mit GAUSSIAN und Archimedian Factor Models.<sup>20</sup> GAUSSsche Faktormodelle sind weit verbreitet und sowohl mit dem einfachen Unternehmenswertansatz als auch mit dem Modell CREDITMETRICS™ von J. P. MORGAN kompatibel. Archimedische Faktormodelle zeichnen sich durch eine große Vielfalt der modellierbaren Abhängigkeitsstrukturen aus. Häufig zur Kreditrisikomodellierung herangezogene Vertreter sind das CLAYTON- und das GUMBEL-Modell, da mit diesen den extremen Ausfallereignissen vergleichsweise hohe Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können.<sup>21</sup> Problematisch ist die Auswahl des „richtigen“ Modells. Erschwerend für eine Entscheidung ist, dass viele der theoretisch denkbaren multivariaten Verteilungen für Kreditausfallzeiten kaum ökonomisch interpretierbar sind. BLUHM<sup>22</sup> und MASHAL, NALDI & ZEEVI<sup>23</sup> konzentrieren sich dagegen auf den Unternehmenswert als den zentralen Kreditrisikofaktor und modellieren dessen Verteilung – ebenfalls mit dem Ergebnis höherer Wahrscheinlichkeiten für extreme Kreditausfallereignisse – mit STUDENT-t<sup>24</sup> Faktormodellen. GREENBERG ET AL.<sup>25</sup> untersuchen, inwieweit STUDENT-t Faktormodelle am Kapitalmarkt beobachtete Risikoprämien für CDO-Tranchen besser erklären als klassische GAUSSsche Ansätze. HULL & WHITE ziehen ein Double-STUDENT-t Faktormodell zu Vergleichszwecken heran.<sup>26</sup>

Aus kapitalmarkttheoretischer Sicht ist anzumerken, dass unterstellt wird, dass die Kapitalmarktteilnehmer die Risiken von CDOs vollständig erfassen und adäquate Risikoprämien vereinbaren. Zuweilen entsteht jedoch der Eindruck, dass im Rahmen des CDO Structuring-Prozesses von der Komplexität der CDO-Transaktionen stark abstrahiert wird. Im Vordergrund stehen dabei Renditeüberlegungen mit Blick auf die Equity-Tranche: „In a CDO, asset purchases are financed by a combination of liabilities plus equity. [...] Assets [need to be] purchased and the liabilities [need to be] sold with enough left over to provide a competitive return to equity holders. [...] However, to compute whether or not any [transaction does provide a competitive return], we do not need a complex CDO structuring model. Any hand calculator, plus a dose of common sense, will do.“<sup>27</sup> Unkritisch werden positive, attraktive Returns für die Equity-Tranche unterstellt. Fraglich ist, inwieweit

<sup>20</sup> Vgl. J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 4-6.

<sup>21</sup> Vgl. X. Burtschell, J. Gregory und J.-P. Laurent (2005), CDO pricing models, S. 7 f.

<sup>22</sup> Vgl. C. Bluhm (2003), CDO modeling, S. 20 u. S. 32-35.

<sup>23</sup> Vgl. R. Mashal, M. Naldi und A. Zeevi (2003), Extreme events, S. 22-27.

<sup>24</sup> STUDENT: Pseudonym von WILLIAM GOSSET.

<sup>25</sup> Vgl. A. Greenberg et al. (2004), Tuning correlation and tail risk, S. 4 f. u. S. 7-9.

<sup>26</sup> Vgl. J. Hull und A. White (2004), Valuation of CDOs and CDSs, S. 11, S. 13 f. u. S. 17.

<sup>27</sup> L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 235 f. Vgl. auch die Zahlenbeispiele ebenda, S. 3-7, 235-256 u. 287-315.

daneben die Risikoprämien der CDO-Kontrakte angemessen sind und mögliche Verluste sowie deren zeitliches Auftreten unter Berücksichtigung wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen widerspiegeln. Häufig anzutreffende Szenarioanalysen mit willkürlichen Front und Back-loaded Default-Szenarien sind zweifellos ein unzureichendes Bewertungsinstrument. Bei synthetischen Transaktionen tritt zudem das Problem auf, dass die Passivseite der SPVs nahezu vollständig aus Festbetragskontrakten und kaum aus Restbetragskontrakten besteht, was die Gefahr einer Insolvenz der Zweckgesellschaft durch zeitliche und betragsmäßige Abstimmungsschwierigkeiten von eingehenden und ausgehenden, zu Beginn der Transaktion (wünschenswerterweise) fair ermittelten Risikoprämien der beteiligten CDS- und CDO-Kontrakte birgt. Die zeitliche Verteilung von potentiellen Verlusten und ihre Auswirkung auf die Zahlungsströme einer synthetischen CDO-Transaktion wurde bisher unter wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen nicht betrachtet. Inwieweit am Markt beobachtete Risikoprämien etwaige Effekte der zeitlichen Verteilung potentieller Verluste berücksichtigen, wäre zu hinterfragen.

Aus modelltheoretischer Sicht ist anzumerken, dass die obigen Faktormodelle zur Modellierung der Unternehmenswertentwicklung den Kreditausfall analog zum einfachen Unternehmenswertansatz als genau dann gegeben sehen, wenn der Unternehmenswert im Risikohorizont, nicht aber vorher, jenseits einer (zeitpunktuellen) Ausfallschranke liegt.<sup>28</sup> Theoretisch lassen sich mit exogen vorgegebenen kumulativen Ausfallwahrscheinlichkeiten für verschiedene Zeiträume zeitpunktuelle Ausfallschranken ermitteln. Darauf aufbauend lassen sich – streng mathematisch betrachtet – auf Ausprägungen des Faktors bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten für verschiedene Zeiträume ableiten, die wiederum für die Bewertung der CDS- und CDO-Kontrakte herangezogen werden können.<sup>29</sup>

Diese Vorgehensweise ist jedoch bedenklich. Zunächst werden trotz zeitpunktuelle Ausfallschranken vorzeitige Kreditausfälle zugelassen. Weiterhin ist fraglich, inwieweit die einzelnen zeitpunktuellen Ausfallschranken miteinander in Beziehung stehen und als Einheit gesehen werden können. Schließlich ist im Rahmen der Berechnung bedingter Ausfallwahrscheinlichkeiten für ausgewählte Teilzeiträume unklar, wie der Faktor zu interpretieren ist. Als stochastischer Prozess kann der Faktor nicht aufgefasst werden. HULL & WHITE lösen das Problem, indem sie explizit vorzeitige Kreditausfälle zu diskreten Zeitpunkten zulassen.<sup>30</sup> Der Kreditausfall tritt ein, wenn der Unternehmenswert zu den diskre-

---

<sup>28</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden C. Bluhm (2003), CDO modeling, S. 21, Formel (8); J. Hull und A. White (2004), Valuation of CDOs and CDSs, S. 10 f., Formeln (2) und (3).

<sup>29</sup> Vgl. C. Bluhm (2003), CDO modeling, S. 30, Proposition 6.

<sup>30</sup> Vgl. Anlage 13 sowie J. Hull und A. White (2001), Valuing credit default swaps II, S. 13 f.

ten Zeitpunkten kleiner oder gleich der jeweiligen zeitpunktspezifischen Ausfallschranke ist. Die einzelnen zeitpunktspezifischen Ausfallschranken werden sukzessiv, beginnend mit dem ersten diskreten Zeitpunkt, relativ zueinander ermittelt. Im Rahmen eines Faktoransatzes kann der Faktor als stochastischer Prozess betrachtet werden. Der Rechenaufwand zur Kalibrierung der Ausfallschranken ist jedoch erheblich und steigt dramatisch mit zunehmender Anzahl der betrachteten Zeitpunkte an. Eine analytisch rechenbare Umsetzung des Ansatzes ist ebenso wenig möglich wie eine semi-analytische Lösung.

Vor diesem Hintergrund wird in dieser Arbeit zunächst ein unternehmenswertorientiertes Kreditrisikoportfoliomodell unter weit reichender Aufrechterhaltung der semi-analytischen Rechenbarkeit entwickelt, in dem explizit jederzeitige Kreditausfälle zugelassen sind. Abhängigkeiten zwischen Kreditausfallereignissen sollen, dem klassischen Unternehmenswertansatz folgend, durch Abhängigkeiten zwischen Ability-to-Pay-Prozessen der einzelnen Schuldner modelliert werden. Mit Blick auf die semi-analytische Rechenbarkeit wird dazu auch in dieser Arbeit auf ein Faktormodell zurückgegriffen. Wesentliches Anliegen ist es dabei, Bezüge zwischen den verwendeten Ability-to-Pay-Prozessen und den Unternehmenswertentwicklungen herzustellen, um die ökonomische Interpretierbarkeit des klassischen Unternehmenswertansatzes weitgehend aufrechtzuerhalten. Die Faktoren sollen jederzeit als stochastische Prozesse verstanden werden können. Das Kreditrisikoportfoliomodell soll heterogene Portfolios abbilden können, wobei sich die Heterogenität sowohl auf die Nominalwerte, auf die Ausfallwahrscheinlichkeiten als auch auf die Restlaufzeiten der einzelnen Kredite erstrecken soll. Die Restlaufzeiten sollen, erneut dem klassischen Unternehmenswertansatz folgend, mit den Laufzeiten der Ability-to-Pay-Prozesse einhergehen. Für Portfolios, bestehend aus Bankdarlehen, soll der Einfluss von Tilgungsplänen auf Portfolioverlustverteilungen ceteris paribus ermittelt werden können. Zur Modellentwicklung wird die Idee zeittransformierter BROWNScher Bewegungen mit zeitkonstanten Ausfallschranken von OVERBECK & SCHMIDT<sup>31</sup> aufgegriffen und weiterentwickelt.

Das semi-analytische Modell wird die Grundlage für die Kreditrisikoquantifizierung und Bewertung von CDO-Transaktionen bilden. Im Rahmen der Kreditrisikoquantifizierung soll die Ermittlung von Verlustverteilungen für CDO-Tranchen sowie die Berechnung von verlustverteilungsbasierten Kreditrisikokennzahlen unter Berücksichtigung von Besonderheiten synthetischer Transaktionen im Vordergrund stehen. Vermittelt werden sollen modelltheoretische Verfahren und Vorstellungen über reale Größenverhältnisse am Beispiel

---

<sup>31</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 12 f.; L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Abhängigkeitsmodellierung mit transformierten Austrittszeiten, S. 742 f.

der Verbriefungsplattform PROMISE der KfW. Erstmals wird der Einfluss von Kreditillungsplänen, Portfolioreplenishments und Portfolioreplenishment-Triggern auf die Verlustverteilungen und Kreditrisikokennzahlen der CDO-Referenzportfolios Gegenstand systematischer Untersuchungen sein. Besondere Aufmerksamkeit soll dem Konstrukt der begrenzten Zinsunterbeteiligung als Instrument zur Platzierung von First-Loss-Tranchen an den Finanzmärkten zukommen. Begrenzte Zinsunterbeteiligungen führen beim Originator dazu, dass Erfolgsrisiken in Form von Kreditrisiken in Liquiditätsrisiken umgewandelt werden. Zu hinterfragen ist, in welchem Ausmaß eine derartige Umwandlung tatsächlich stattfindet und welche Konsequenzen dies für die Investoren hat.

Im Rahmen der Bewertung werden unter Berücksichtigung vorschüssiger und nachschüssiger Zahlungsmodalitäten der CDOs Formeln zur Ermittlung von Barwerten und (fairen) Risikoprämien nach dem Arbitragefreiheitskonzept hergeleitet. Während in der Literatur CDO-Bewertungsformeln selten, wie sonst in der Kapitalmarkttheorie üblich, duplikationstheoretisch fundiert sind, sollen in dieser Arbeit die Bewertungsformeln durch duplikationstheoretische Überlegungen gestützt werden. Die Struktur der Bewertungsformeln soll detailliert analysiert werden, wobei die Herleitung von Spezialfällen der Verdeutlichung einzelner Formelkomponenten dienen wird. Basierend auf den Bewertungsformeln wird das Ziel verfolgt, eine betrags- und zeitpunktorientierte Darstellung aller Cash Flows einer synthetischen CDO-Transaktion zu erarbeiten. Verschiedene Default-Szenarien für das Referenzportfolio fließen dabei nicht unter willkürlichen Annahmen, sondern unter Wahrscheinlichkeitstheoretischen Gesichtspunkten ein. Darauf aufbauend lassen sich potentielle Abstimmungsprobleme zwischen Ein- und Auszahlungen auf der Ebene der Zweckgesellschaft problematisieren und analysieren.

## **12 Gang der Untersuchung**

Detaillierter dargelegt, werden die aufgeworfenen Probleme in dieser Arbeit wie folgt abgehandelt:

Zunächst werden in *Kapitel 2* Grundlagen zum Aufbau und zur Funktionsweise von synthetischen CDO-Transaktionen erarbeitet. Zu berücksichtigen ist, dass der Aufbau und die Funktionsweise nicht von den rechtlichen Rahmenbedingungen und den Zielen, die mit einer synthetischen CDO-Transaktion verfolgt werden, trennbar sind. Dabei wird mit Blick auf den häufigen Einsatz von CDOs im Bereich des bankbetrieblichen Kreditrisikomanagements überwiegend aus der Sicht eines Bankbetriebs argumentiert. Historisch betrachtet stellen synthetische CDO-Transaktionen eine Weiterentwicklung klassischer Strukturen

dar. Sie kombinieren Ideen und Konzepte klassischer ABS mit innovativen derivativen Finanztiteln zur Reduzierung bzw. Übertragung von Kreditrisiken. Daher kommt eine Beschreibung des grundsätzlichen Aufbaus und der prinzipiellen Funktionsweise von synthetischen CDO-Transaktionen kaum ohne eine zumindest rudimentäre Betrachtung klassischer Strukturen aus. Zudem sind wesentliche Teile der Konzepte und Modelle zur Kreditrisikomessung synthetischer CDO-Transaktionen in dieser Arbeit auf klassische Strukturen übertragbar. Der Schwerpunkt der Betrachtung liegt jedoch auf den Besonderheiten und spezifischen Konstruktionselementen synthetischer CDO-Transaktionen.

In Vorbereitung auf die Modellentwicklung in den nachfolgenden Kapiteln 3, 4 und 5 werden darüber hinaus Grundlagen der unternehmenswertorientierten Kreditrisikomessung erarbeitet. Dabei erstrecken sich die Betrachtungen sowohl auf die Einzelkreditebene als auch auf die Ebene der Kreditportfolios. Neben wesentlichen Kreditrisikokennzahlen werden insbesondere die Wirkungsweise und die Eigenschaften der dem Unternehmenswertmodell inhärenten Abhängigkeitsstrukturen auf der Basis korrelierter BROWNScher Bewegungen beleuchtet.

In *Kapitel 3* erfolgt die Entwicklung des semi-analytisch rechenbaren unternehmenswertorientierten Kreditrisikoportfoliomodells. Zunächst ist auf Einzelkreditbasis eine Kalibrierung des Modells vorzunehmen. Dazu werden – in Anlehnung an reduzierte Kreditrisiko(portfolio)modelle – Hazard Rate-Funktionen modelliert. Da die graphischen Darstellungen der Hazard Rate-Funktionen an die Zeitstruktur von Zinskurven (Yield Curves) erinnern, werden die resultierenden Graphen wie bei Li<sup>32</sup> als Credit Curves bezeichnet. Credit Curves lassen sich je nach Verwendungszweck risikoneutral oder risikoavers gestalten. In Abschnitt 32 werden ratingabhängige Credit Curves mit Hilfe von Informationen der Ratingagenturen MOODY'S sowie STANDARD & POOR'S risikoavers konstruiert, wobei drei Verfahren gegenüberstellend erörtert werden. Das zentrale Konzept zeittransformierter BROWNScher Bewegungen wird in Abschnitt 33 diskutiert. Die Zeittransformationen erfolgen nach Maßgabe der Credit Curves und ermöglichen – anders als im Modell von HULL & WHITE – die Kalibrierung von zeitkonstanten Ausfallschranken, wodurch die Ermittlung (semi-)analytisch rechenbarer Formeln erst ermöglicht wird. Die Integration der unternehmenswertmodellinhärenten Abhängigkeitsstruktur in das Konzept zeittransformierter BROWNScher Bewegungen erfolgt in Abschnitt 34. Die Basis bildet ein Ein-Faktor-Modell, das grundsätzlich jedoch auf mehrere Faktoren erweiterbar ist. Ggf. bestehende Wechsel-

---

<sup>32</sup> Vgl. D. Li (2000), On default correlation, S. 46.

wirkungen zwischen der Abhängigkeitsstruktur und der Zeittransformation werden analysiert. Die Herleitungen von bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten im Abschnitt 35 bilden die Vorstufe zur semi-analytischen Modellkonstruktion. Zunächst werden die Faktoren als BROWNSche Brücken formuliert. In Abhängigkeit von den Parametern der BROWNSchen Brücken lassen sich bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten analytisch berechnen. Dabei wird zwischen lang- und kurzlaufenden Krediten unterschieden, was genau dann von besonderem Interesse ist, wenn einzelne Kredite des Referenzportfolios bereits vor dem Risikohorizont zu tilgen sind. Darüber hinaus wird die Abhängigkeitsstruktur bedingter Ausfallereignisse einer detaillierten Analyse unterzogen. In den Abschnitten 36 und 37 werden die einzelnen Elemente des semi-analytischen Modells zusammengefügt und die Ereignis- und Verlustverteilung des Referenzportfolios in Abhängigkeit vom Risikohorizont auf der Basis von wahrscheinlichkeitserzeugenden und charakteristischen Funktionen konstruiert. Als Konstruktionsverfahren werden das Sequential Probability Shifting (SPS) und die Inverse FOURIER-Transformation (IFT) diskutiert. Beide Verfahren sind auch im Rahmen alternativer semi-analytischer Kreditrisikoportfoliomodelle mit bedingt unabhängigen Ausfallereignissen anwendbar. Das Kapitel schließt mit einer Überführung des semi-analytischen Modells in eine Monte Carlo-Simulation und einer Diskussion der Eigenschaften und Leistungsmerkmale des semi-analytischen Modells in den Abschnitten 38 und 39. Auf die Monte Carlo-Simulation wird in dieser Arbeit immer dann zurückgegriffen, wenn das Referenzportfolio oder die CDO-Transaktion Charakteristika aufweist, die nicht durch das semi-analytische Modell erfasst werden können.

In *Kapitel 4* werden anhand eines Beispielreferenzportfolios wesentliche Charakteristika von Kreditportfolioereignis- und Kreditportfolioverlustverteilungen diskutiert. Die Berechnung von Kreditrisikokennzahlen dient der besseren Anschaulichkeit. Wesentliches Anliegen ist neben der Betrachtung der Methodik die Vermittlung realer Größenverhältnisse. Zu diesem Zweck wird kein stilisiertes Beispielreferenzportfolio mit einigen wenigen Krediten, sondern ein Beispielreferenzportfolio aus dem Verbriefungsprogramm PROMISE der KfW mit mehreren tausend heterogenen Krediten verwendet. Da einem externen Analysten i. d. R. keine Informationen über die genaue Zusammensetzung der umfangreichen Referenzportfolios, sondern lediglich referenzportfolioorientierte Kennzahlen und Merkmalsverteilungen zur Verfügung stehen, werden in Abschnitt 41 Ansätze zur Rekonstruktion von Referenzportfolios erarbeitet. Die eigentliche Diskussion der Kreditportfolioereignis- und Kreditportfolioverlustverteilungen erfolgt in den Abschnitten 42 und 43. Dabei wird erstmals der Einfluss von Portfolioreplenishments und Portfolioreplenishment-

Triggern, wie sie im Rahmen von synthetischen CDO-Transaktionen weit verbreitet sind, auf die Ereignis- und Verlustverteilungen systematisch erörtert. Gegenstand der Analysen sind zudem Unterschiede im Kreditrisikoprofil von Bond- und Loan-Portfolios, wobei per Definition Loan-Portfolios aus Bankdarlehen mit regelmäßigen Tilgungszahlungen und Bond-Portfolios aus endfälligen Krediten bestehen.

In *Kapitel 5* werden die einzelnen Tranchen einer CDO-Transaktion aus risikotheorietischer und bewertungstheoretischer Sicht betrachtet. Ausgewertet werden zunächst in Abschnitt 51 die Verlustverteilungen der Tranchen sowie die Kennzahlen PD (Probability of Default), EL (Expected Loss) und LGD (Loss Given Default). Die Analysen setzen das Beispiel aus dem Verbriefungsprogramm PROMISE der KfW fort und greifen auf die semi-analytisch ermittelten Verlustverteilungen des vorhergehenden Kapitels zurück. Von besonderem Interesse ist die grundsätzliche Struktur der Recoveryverteilungen der Tranchen in Abhängigkeit der Tranchenstärken und der Credit Enhancement Levels in Abgrenzung zu typischen Recoveryverteilungen von Bonds. Mit Hilfe der Monte Carlo-Simulation erfolgt darüber hinaus eine quantitative Analyse des Instruments der begrenzten Zinsunterbeteiligung zur Platzierung des FLPs am Finanzmarkt. Von besonderem Interesse ist dabei das Ausmaß des Kreditrisikos, das nach wie vor, trotz des Verkaufs des FLPs, beim Originator verbleibt. In Abschnitt 52 werden Fragen der Bewertung von CDO-Tranchen erörtert. Dazu wird zunächst in Abschnitt 521 der semi-analytische Modellsansatz in die Systematik der risikoneutralen Bewertung eingeordnet. Zu diesem Zweck wird ein risikoneutraler Wahrscheinlichkeitsraum zur Bewertung kreditrisikofreier Zinstitel konstruiert und anschließend erweitert, um kreditrisikobehaftete Zinstitel erfassen zu können. Das erweiterte Wahrscheinlichkeitsmaß leitet sich dabei aus dem semi-analytischen Modellrahmen des Kapitels 3 ab. Im Ergebnis können sowohl kreditrisikofreie als auch kreditrisikobehaftete Finanztitel arbitrage- und präferenzfrei bewertet werden. Mit der sorgfältigen Konstruktion des Bewertungsraumes zeigt sich, dass die Semi-Analytik als reduziertes Hazard Rate-Modell umformuliert und dass somit zur Bewertung von kreditrisikobehafteten Zahlungsströmen einzelner Finanztitel auf bereits bestehende Ergebnisse zur risikoneutralen Bewertung von kreditrisikobehafteten Finanztiteln der Literatur zurückgegriffen werden kann. Die Bewertungsmodelle auf der Basis einzelner Finanztitel dienen der risikoneutralen Kalibrierung des erweiterten Wahrscheinlichkeitsraumes anhand beobachtbarer Marktdaten. Die notwendige Methodik wird in Abschnitt 522 diskutiert. Das Resultat sind risikoneutrale Credit Curves, ermittelt mit Hilfe von Preisquotierungen von Plain Vanilla Credit Default Swaps. Vorgeschlagen werden ein vollständig analytisch rechenbares und ein

numerisches Verfahren. In Abschnitt 523 erfolgt die risikoneutrale Bewertung der CDO-Tranchen. Der Begriff der Bewertung erstreckt sich sowohl auf die Ermittlung fairer Tranchenbarwerte als auch fairer Tranchenrisikoprämien. Vorangestellt wird zunächst eine umfassende duplikationstheoretische Betrachtung der CDOs, auf deren Grundlage die Herleitung der Bewertungsformeln basiert. Bewertet werden sowohl vorschüssig als auch nachschüssig zahlende CDOs. Für den Spezialfall eines homogenen Referenzportfolios werden gesonderte Bewertungsformeln hergeleitet. Diese sind wesentlich einfacher zu implementieren und erlauben mit geringem Rechenaufwand detaillierte Szenario- und Sensitivitätsanalysen der Bewertungsergebnisse in Abhängigkeit von einzelnen Kreditrisikofaktoren. Sie bilden die Grundlage für die vollständige Darstellung und Analyse der risikoadäquaten Cash Flow-Struktur einer synthetischen CDO-Transaktion auf der Basis fairer CDO-Risikoprämien in Abschnitt 524. Im Vordergrund steht vor allem die betragsmäßige Entwicklung sämtlicher Risikoprämienzahlungen unter Berücksichtigung der Ausfallereignisse im Referenzportfolio, der Zeit und der Faktorsensitivität. Unter Rückgriff auf diese Ergebnisse wird eine Diskussion der Finanzierung des Kapitaldienstes der Zweckgesellschaft an die CDO-Investoren unter dem Blickwinkel einer Insolvenzgefährdung des SPVs geführt.

Die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit werden in der *Schlussbetrachtung* noch einmal zusammenfassend dargestellt.

## 2 Synthetische CDOs aus bankbetrieblicher Perspektive und Grundlagen der Kreditrisikomessung mit Unternehmenswertansätzen

### 21 Definition und empirische Bedeutung der Kreditverbriefung mit CDOs

#### 211 Klassische CDOs

Der Begriff der Verbriefung (Securitisation) erfreut sich in der finanzwirtschaftlichen Literatur und Praxis eines häufigen Gebrauchs. Dabei ist er vormerklich im Zusammenhang mit einer besonderen Finanzierungsform anzutreffen: den Asset-Backed Securities. Allerdings ist die vom Begriff des „Security“<sup>33</sup> stammende Wortbildung eher Ausdruck des im Laufe der 80er Jahre einsetzenden Trends, traditionelle Finanzierungen über den Kreditmarkt durch Wertschriften am Geld- und Kapitalmarkt zu substituieren.<sup>34</sup> Asset Securitisation hingegen stellt eine spezifische Ausprägungsform der Securitisation dar, wobei explizit auf spezifische Aktiven eines Unternehmens<sup>35</sup> abgestellt wird.<sup>36</sup> Dazu werden möglichst homogene Aktiven (Assets) zu einem diversifizierten Pool (Asset Pool) zusammengefasst, rechtlich verselbständigt und über die Ausgabe von Wertschriften (Securities) refinanziert. Dabei dient der Asset Pool unmittelbar als Haftungsmasse der emittierten Wertschriften. Diese besondere Form der Besicherung hat den so emittierten Wertschriften ihren Namen verliehen: Asset-Backed Securities (ABS) bzw. durch Aktiven gedeckte Wertpapiere.<sup>37</sup>

Als Aktiven eignen sich grundsätzlich all jene Vermögenswerte, die zukünftige Einzahlungsüberschüsse (Cash Flows<sup>38</sup>) generieren. Die Cash Flows der Vermögenswerte werden direkt den emittierten Schuldverschreibungen zugeordnet und dienen der Befriedigung des Kapitaldienstes. Folglich eignen sich grundsätzlich Konsumentenkredite, gewerbliche Kredite, Leasingforderungen, Hypotheken- und Grundschulddarlehen, Kreditkartenforderungen, Anleihen sowie Forderungsbestände als Vermögenswerte im Rahmen einer Asset

---

<sup>33</sup> Security: engl. f. Wertpapier.

<sup>34</sup> Während an den internationalen Finanzmärkten Anfang der 80er Jahre noch ca. 64 % des Finanzierungsvolumens durch den Kreditmarkt und nur ca. 36 % durch den Geld- und Kapitalmarkt abgedeckt wurde, kehrte sich das Verhältnis Ende der 80er Jahre um: nur noch ca. 26 % der Finanzierungen erfolgte per Kreditvergabe und ca. 74 % per Emission von Wertpapieren. Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 60-66. Eine Analyse der Ursachen findet sich ebenda, S. 66-79.

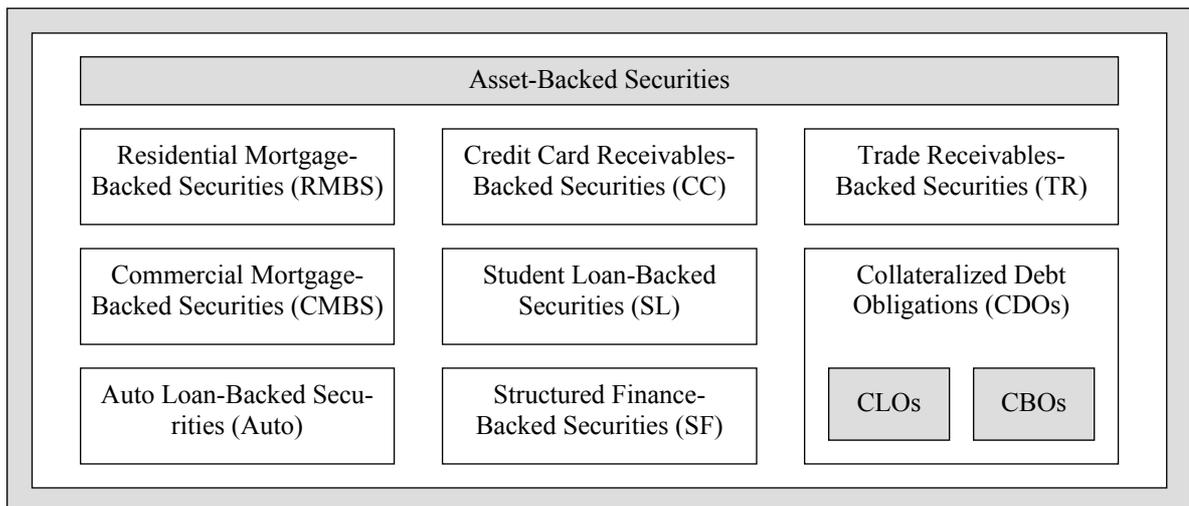
<sup>35</sup> Im Rahmen von Multi-Seller-Programmen können darüber hinaus auch Aktiven verschiedener Unternehmen Gegenstand einer Verbriefung sein. Als Unternehmen kommen Banken, aber auch Nicht-Banken in Betracht. Im Mittelpunkt der Arbeit sollen im Folgenden jedoch deutsche Banken mit einem Kreditbestand an mittelständische Unternehmen stehen.

<sup>36</sup> Aufgrund des expliziten Bezugs auf spezifische Aktiven können Asset-Verbriefungen als eine Form des Asset-Based Finance angesehen werden, wobei insbesondere das Factoring, das Leasing und die Projektfinanzierungen dieser Gruppe zugeordnet werden. Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 26 sowie die dort angegebene Literatur.

<sup>37</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 27-32; S. Kümpel (2004), Bank- und Kapitalmarktrecht, S. 1838 f. (14.48-14.50) u. S. 1841 f. (14.58-14.60).

<sup>38</sup> Unter dem Cash Flow wird im deutschsprachigen Wirtschaftsraum eine stromgrößenorientierte Kennzahl verstanden, welche den durch den operativen Bereich eines Unternehmens innerhalb einer Rechnungslegungsperiode erwirtschafteten erfolgswirksamen Zahlungsmittelüberschuss angibt. Zu Definitionsvarianten und Berechnungsmöglichkeiten siehe bspw. L. Perridon und M. Steiner (2004), Finanzwirtschaft, S. 572-577. Dieser Interpretation soll hier jedoch nicht gefolgt werden.

Securitisation. Nach dem Kriterium der Art der verbrieften Aktiven lassen sich die folgenden Asset-Backed Security-Arten unterscheiden:<sup>39</sup>



**Abb. 2-1: Arten von Asset-Backed Securities nach dem Kriterium der verbrieften Aktiven**

Ein besonderes und besonders stark wachsendes Segment der ABS stellt das der Collateralized Debt Obligations (CDOs) dar. Hierbei veräußert (meistens) ein Kreditinstitut (Originator<sup>40</sup>) einen Teil seines Forderungsbestands<sup>41</sup> regresslos (True Sale) an eine eigens zu diesem Zweck gegründete Zweckgesellschaft (Special Purpose Vehicle, SPV), die sich ihrerseits durch die Emission von Schuldtiteln (ABS bzw. CDOs) refinanziert. Die Zins- und Tilgungszahlungen der CDOs erfolgen aus den Einzahlungsüberschüssen des übertragenden Forderungsbestandes. Dabei kommen in Deutschland vorwiegend Forderungen gegenüber mittelständischen Unternehmen zur Verbriefung. Die Forderungen können in Form von Kreditdarlehen (Loans) und/oder Schuldverschreibungen<sup>42</sup> (Bonds) vorliegen. In

<sup>39</sup> Vgl. auch H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 127-144; L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 71-128, 129-158 u. 159-172.

<sup>40</sup> Im Falle von Multi-Seller-Programmen können dabei auch mehrere Originatoren auftreten. Darüber hinaus können Vermögenswerte auch eigens für den Zweck der Verbriefung am Geld- und Kapitalmarkt erworben werden. Dabei wird vor allem versucht Speculative-Grade-Forderungen am ABS-Markt in tranchierter Form mit Zins- und Kursgewinnen zu veräußern. Da die Zins- und Kursgewinne aus Marktunvollkommenheiten bezüglich der Rendite/Risiko-Struktur resultieren und folglich Arbitragegeschäfte vorliegen, werden diese Strukturen als Arbitrage-CDOs bezeichnet. Da im Unterschied zu klassischen CDOs kein zentraler Forderungsverkäufer existiert, tritt an dessen Stelle der Portfolio- oder Collateral-Manager. Dieser ist für die Zusammenstellung des Asset Pools verantwortlich und übernimmt darüber hinaus die Überwachung des Forderungsbestands sowie das Inkasso- und Mahnwesen. Vgl. S. Bund (2000), CDOs, S. 197.

<sup>41</sup> J. Rosenthal und J. Ocampo (1988), Securitization of credit, S. 4 verwenden für die Verbriefung von Forderungspools den Begriff der Credit Securitisation anstelle der Asset Securitisation.

<sup>42</sup> Der Begriff der Schuldverschreibung wird vielfältig verwendet. Juristisch wird in §793 BGB die Schuldverschreibung als verbrieftes Gläubigerrecht definiert. Dabei ist grundsätzlich von einem Inhaberpapier auszugehen. In dieser Arbeit werden unter Schuldverschreibungen insbesondere Anleihen verstanden. Bspw. werden Zertifikate oder Pfandbriefe, die ebenfalls Schuldverschreibungen darstellen, nicht betrachtet. Vgl. zum Begriff der Schuldverschreibung D. Hummel (2000), Einlagengeschäft der Banken, S. 561; S. Kümpel (2004), Bank- und Kapitalmarktrecht, S. 1280 (8.126, 8.127) u. S. 1440-1454 (9.179-9.229). Zum Zertifikatebegriff siehe ebenda, S. 1284 f. (8.140, 8.141).

Abhängigkeit vom überwiegenden Inhalt des Asset Pools werden daher die Collateralized Loan Obligations (CLOs) und Collateralized Bond Obligations (CBOs) unterschieden. Vor dem Hintergrund der obigen Ausführungen soll eine Definition der CDOs erfolgen:<sup>43</sup>

**Definition 2-1:** Klassische Collateralized Debt Obligations (CDOs) sind

- (1) verbriefte Schuldtitel,
- (2) die durch einen (diversifizierten) Pool spezifischer, ausdrücklich gekennzeichnete weitgehend homogener Vermögenswerte entweder vorwiegend in Form von Kreditdarlehen (CLOs) oder Anleihen (CBOs) gesichert sind (Collateral),
- (3) welche eigens zu diesem Zweck durch Abtretung an ein Special Purpose Vehicle rechtlich verselbständigt und vom Geschäfts- und Managementrisiko des Originators bzw. der Originatoren isoliert wurden (True Sale)
- (4) und deren Cash Flows zur Bedienung der Zins- und Tilgungszahlungen der emittierten Schuldtitel verwendet werden.

Kreditinstitute nutzen CDO-Strukturen verstärkt zum Bilanz- und Kostenmanagement. Insbesondere ermöglicht der Verkauf von Kreditforderungen die Reduzierung des regulatorischen Eigenkapitals (Eigenmittel), was die Vergabe von neuen Krediten und somit die Renditeerhöhung bezogen auf die Eigenmittel ermöglicht.<sup>44</sup> Im Rahmen der Risikosteuerung des Kreditportfolios lassen sich unerwünschte Risikopositionen<sup>45</sup> am Kapitalmarkt veräußern und über ein anschließendes diversifiziertes Investment gewünschte Risikostrukturen modellieren sowie Refinanzierungskosten senken. Finanzwirtschaftliche Erfolgskennzahlen werden verbessert.<sup>46</sup> CDOs stellen darüber hinaus ein Instrument zur Konversion illiquider Finanzaktiva (Kreditdarlehen) in liquide, kapitalmarktfähige Finanzinstrumente dar. Sie ermöglichen eine Flexibilisierung des Finanzmanagements durch vorzeitige Monetarisierung von Vermögenswerten, die langfristig finanzielle Mittel binden, unter Einbeziehung der organisierten Finanzmärkte.<sup>47</sup> Damit wird die Liquiditätsslage verbessert. Aus Sicht der Investoren eröffnen sich neue Investitionsmöglichkeiten, was zu Diversifikationseffekten führen kann.<sup>48</sup>

---

<sup>43</sup> Die Definition orientiert sich dabei an der Definition des Begriffs „Asset Securitisation“ in H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 34-42.

<sup>44</sup> M. Geurts (1999), Steuerliche Aspekte, S. 451 bezeichnet einen derartigen Vorgang als „Eigengeschäft ohne Eigenmittelunterlegung“.

<sup>45</sup> Kredit-, Zinsänderungs-, Duration- und Wechselkursrisikopositionen

<sup>46</sup> Vgl. dazu kritisch M. Kroll (1993), Liquidität und Eigenmittelrendite verbessern, S. 90.

<sup>47</sup> Vgl. W. Benner (1988), ABS, S. 403 f.; J. Wulfken und M. Weller (1992), Securitisation, S. 646.

<sup>48</sup> Ein Überblick über (weitere) Vorteile von Asset Securitisations findet sich in H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 34.

## 212 Synthetische CDOs

Je nach Zielsetzung der Originatoren können klassische CDO-Strukturen gravierende Nachteile aufweisen. Insbesondere können vertragliche Abreden zwischen dem Kreditinstitut und dem Schuldner einer Veräußerung der Schuld entgegenstehen. Zumindest könnte das Kreditinstitut aufgrund des True Sales der Forderungen gezwungen sein, den Forderungsverkauf seinem Kreditnehmer gegenüber anzuzeigen. Eine Veräußerung von Forderungstiteln führt immer in einem bestimmten Umfang zur Offenlegung von Kundeninformationen Dritten gegenüber.<sup>49</sup> Diese Eingriffe in das Kreditverhältnis zwischen dem Kreditinstitut und dem Kunden können einen Vertrauensverlust zur Folge haben, der nachhaltig zukünftige Geschäftsbeziehungen negativ beeinflusst. Unabhängig von Vertrauensverlusten können Finanzaktiven nur dann rechtsgültig veräußert werden, wenn diese frei von Belastungen und anderweitigen Rechtstiteln sind.<sup>50</sup> Eine Lösung bieten synthetische CDO-Strukturen.<sup>51</sup>

Synthetische CDOs stellen eine moderne Anlageform dar, die Ideen und Konzepte von klassischen Asset-Backed Securities mit innovativen synthetischen Verbriefungen in Form von Kreditderivaten kombinieren. Das Wesensmerkmal von synthetischen CDOs ist der Transfer des Kreditrisikos unter Umgehung des True Sales mit Hilfe von Kreditderivaten.<sup>52</sup> Kreditderivate sind außerbilanzielle Vereinbarungen, die es ermöglichen, das Kreditrisiko oder Teile des Kreditrisikos<sup>53</sup> eines Kredites oder eines Baskets von Krediten von der Ka-

---

<sup>49</sup> Ggf. sind Bestimmungen des Datenschutzes und des Bankgeheimnisses zu berücksichtigen. Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 174.

<sup>50</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 175.

<sup>51</sup> Ebenso argumentieren L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 205 f.

<sup>52</sup> Vgl. M. Herrmann (2005), Collateralized Loan Obligations, S. 95-97.

<sup>53</sup> Der Begriff des Kreditrisikos wird häufig unscharf verwendet. Das Kreditrisiko ist ein Gegenparteirisiko. Vgl. M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2001), Risk management, S. 34-39; H. Büschgen (1997), Internationales Finanzmanagement, S. 283-446. Gegenparteirisiken umfassen das Bonitätsänderungsrisiko, das Ausfallrisiko, das Länderrisiko und das Eindeckungsrisiko. Einige Autoren ordnen auch das Spreadrisiko den Gegenparteirisiken zu. Vgl. bspw. A. Becker und M. Wolf (2002), Treasury von Kreditrisiken mit Kreditderivaten, S. 711 f. Häufig werden Ausfallrisiko und Kreditrisiko synonym verwendet. Teilweise wird das Ausfallrisiko als Spezialfall des Bonitätsänderungsrisikos gesehen. Das Bonitätsänderungsrisiko ist die Gefahr eines Verlustes aufgrund der Verschlechterung der Bonität der Gegenpartei eines Finanzkontraktes. Als Bonität wird dabei die Bereitschaft und Fähigkeit des Kontraktpartners zur termingerechten Leistung der vereinbarten Zahlungen verstanden. Ein Extremfall der Bonitätsänderung ist der vollständige oder teilweise (Kredit-)Ausfall (Default). Dennoch soll das Ausfallrisiko auf Grund der Bedeutung für synthetische CDOs in dieser Arbeit separat betrachtet werden. Beim Länderrisiko ist, anders als beim Ausfallrisiko, die Ursache für den Default nicht auf die Bonität der Gegenpartei zurückzuführen, sondern auf hoheitliche Maßnahmen des ausländischen Staates. Schließlich ist das Eindeckungsrisiko als Gefahr eines Verlustes aus dem Ausfall der Gegenpartei eines noch nicht vollständig abgewickelten Finanzkontraktes abzugrenzen. Das Eindeckungsrisiko besteht bei Termin-, Options- und Swappeschäften insoweit, als der Kontrakt einen positiven Marktwert hat und Ersatzkontrakte ggf. zu ungünstigeren Terminkursen bzw. Swapsätzen abgeschlossen werden müssen. Zusammenfassend gesehen, können sich Gegenparteirisiken demnach auf (verbrieft) Schuldrechte, Anteilsrechte und derivative Kontrakte beziehen. Durch schuldrechtliche Ansprüche verursachte Gegenparteirisiken werden in dieser Arbeit als *Kreditrisiken* bezeichnet. Zum Risikobegriff und zu Risikosystematisierungen siehe auch

pitalüberlassung zu trennen, separat zu veräußern und zu handeln. Dabei wird das Kreditrisiko oder ein Teil des Kreditrisikos gegenüber einer dritten Partei von einem Begünstigten (Sicherungsnehmer) auf einen Garanten (Sicherungsgeber) übertragen. Der Garant sichert dem Begünstigten eine Ausgleichszahlung bei Eintritt eines vertraglich vereinbarten kreditrelevanten Ereignisses (Credit Event) eines Referenzaktivums (Reference-Asset) bzw. eines Pools von Referenzaktiven (Reference-Pool) zu und erhält als Gegenleistung vom Begünstigten eine Prämie (Credit Fee).<sup>54</sup>

Während üblicherweise Garanten aus Spekulations- oder Diversifikationsmotiven heraus agieren, tritt das SPV lediglich als „Leitungsröhre“ für das Kreditrisiko auf. In einer *typischen* synthetischen CDO-Struktur nimmt das SPV die Funktion des Sicherungsgebers im Rahmen eines Portfolio Credit Default Swaps wahr. Dafür entrichtet der Sicherungsnehmer eine periodische Credit Fee<sup>55</sup> und erhält das Recht, während der Laufzeit der Verbriefungstransaktion vom Sicherungsgeber einen Verlustausgleich für schlagend werdende Ausfallrisiken zu verlangen. Die Zweckgesellschaft emittiert ihrerseits Schuldtitel (ABS bzw. CDOs). Anders als bei den klassischen CDO-Strukturen dient der Emissionserlös aus der Platzierung der synthetischen CDOs nicht zur Refinanzierung des SPVs, sondern zur Investition in Anlagen bester Bonität (Staatspapiere). Die erworbenen Anlagen dienen (a) der Besicherung der Verpflichtungen des SPVs gegenüber den CDO-Investoren (Collateral) und (b) der Gewährleistung etwaiger Ausgleichszahlungen im Rahmen des CDS. Im Falle schlagend werdender Ausfallrisiken hat der Originator in der Funktion des Sicherungsnehmers einen Anspruch auf Ausgleichszahlungen gegenüber dem SPV zu Lasten der CDO-Investoren.<sup>56</sup> Die Zinszahlungen an die CDO-Investoren erfolgen aus den Cash Flows der erworbenen risikolosen Anlagen sowie aus der periodischen CDS Credit Fee.<sup>57</sup>

Vor dem Hintergrund der obigen Ausführungen muss eine Erweiterung der Definition der CDOs vorgenommen werden. Mit Blick auf die Vielfalt der Ausgestaltungsmöglichkeiten synthetischer Strukturen, soll dabei nicht auf ein spezielles Kreditderivat abgestellt werden. Vielmehr soll die direkte Verknüpfung zwischen der Performance des Forderungspools

---

L. Perridon und M. Steiner (2002), Finanzwirtschaft, S. 99-101; F. Spellmann (2001), Gesamtrisikomessung, S. 10-28; R. Hölscher (1987), Risikokosten-Management, S. 12-34.

<sup>54</sup> Vgl. P. Hüttemann (1999), Kreditderivate, S. 23 f.; C. Neske (2005), Kreditderivate, S. 55-69. Für mögliche Gestaltungsformen siehe C. Offermann (2000), Kreditderivate, S. 20-44 u. S. 48-53.

<sup>55</sup> Die Credit Fee wird i. d. R. in Basispunkten bzgl. des Nominalwertes ausgedrückt.

<sup>56</sup> Vgl. D. Rule (2001), The credit derivatives market, S. 120.

<sup>57</sup> Diese einfache Sichtweise wird in Abschnitt 524 im Rahmen einer gegenüberstellenden Betrachtung der erwarteten Zinszahlungen an die CDO-Investoren und der erwarteten Credit Fees für verschiedene Lebensphasen der CDO-Transaktion noch einmal aufgegriffen und kritisch diskutiert.

und der Bedienung der emittierten Schuldtitel unter Ausschaltung sämtlicher, nicht explizit an das SPV übertragender Risiken, wesensbestimmend sein.<sup>58</sup>

**Definition 2-2:** Collateralized Debt Obligations (CDOs) sind

- (1) verbriefte Schuldtitel,
- (2) deren Bedienung an die Performance eines (diversifizierten) Pools spezifischer, ausdrücklich gekennzeichnete, homogener Vermögenswerte entweder vorwiegend in Form von Kreditdarlehen (CLOs) oder Anleihen (CBOs) geknüpft ist,
- (3) indem die Risiken des Pools vollständig (True Sale, Total Return Swap) oder teilweise (Credit Default Swap, Credit Linked Notes) durch ein eigens zu diesem Zweck gegründetes Special Purpose Vehicle rechtlich verselbständigt und vom Originator bzw. von den Originatoren isoliert wurden.

Synthetische CDOs lassen sich wie klassische CDOs in Balance Sheet und Arbitrage CDOs unterteilen.<sup>59</sup> Als Originatoren von *Balance Sheet CDOs* treten vorwiegend Kreditinstitute mit dem Ziel auf, Risiken aus der Bilanz zu entfernen und aufsichtsrechtlich vorzuhaltendes Haftungskapital zu reduzieren.<sup>60</sup> Zu hinterfragen ist, ob eine Senkung von vorzuhaltendem Haftungskapital tatsächlich mit der Reduzierung von Risiken einhergeht. Wird durch synthetische Transaktionen lediglich das vorzuhaltende Haftungskapital gesenkt, liegt Eigenmittelarbitrage vor.<sup>61</sup> Damit nicht zu verwechseln sind *Arbitrage CDOs*. Der Begriff ist irreführend, da nicht wirklich risikofreie Arbitragegewinne erzielt werden sollen. Vielmehr stehen attraktive Renditen für die Initiatoren von CDO-Transaktionen im Vordergrund: „The key is whether or not a structure can offer a competitive return for the subordinate/equity tranche.“<sup>62</sup> Zu klären wäre, was „attraktiv“ bedeutet. Lediglich eine Benchmark von bspw. 20 % vorzugeben ist wenig hilfreich.<sup>63</sup> Vielmehr bedarf es einer risikoadjustierten Performancemessung. Synthetic Arbitrage Transactions bestimmen zunehmend das Gesicht des synthetischen CDO-Marktes.

---

<sup>58</sup> Eine Emission einer Credit Linked Note (CLN) ohne ein SPV führt zwar ebenfalls zur performanceabhängigen Bedienung, allerdings sind die CLN-Investoren zusätzlich zu den Kreditrisiken aus dem Forderungspool dem Risiko eines Ausfalls des CLN-Emittenten ausgesetzt. Vgl. D. Rule (2001), *The credit derivatives market*, S. 120.

<sup>59</sup> Für eine alternative Systematisierung siehe J. Tavakoli (2003), *CDOs and structured finance*, S. 31.

<sup>60</sup> Die risikogerechte Unterlegung von Kreditrisiken mit regulatorischem Haftungskapital ist Gegenstand der NEUEN BASLER EIGENKAPITALVEREINBARUNG. Vgl. BCBS (2004), *Basel II*. Eine aufsichtsrechtlich motivierte Diskussion von Unterlegungspflichten findet sich in S. Jortzik und B. Müller (2002), *Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate*, S. 27-56.

<sup>61</sup> Vgl. S. Jortzik und B. Müller (2002), *Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate*, S. 21-24.

<sup>62</sup> L. Goodman und F. Fabozzi (2002), *Structures and analysis of CDOs*, S. 3.

<sup>63</sup> Vgl. ebenda, S. 240 f.

### 213 Empirische Bedeutung der Kreditverbriefung mit CDOs

Die empirische Bedeutung der Kreditverbriefung mit ABS im Allgemeinen und CDOs im Besonderen lässt sich nur schwer ermitteln. Als Ursache sind fehlende verlässliche Datenquellen zu nennen, die den Markt für Kreditverbriefungen in konsistenter und repräsentativer Weise erfassen und abbilden.<sup>64</sup> Verfügbares Datenmaterial wird vorwiegend von Ratingagenturen und großen Investmentbanken erzeugt und aufbereitet. Im überwiegenden Teil der Veröffentlichungen mangelt es jedoch an notwendigen Erläuterungen zu den einzelnen Darstellungen sowie den jeweiligen verwendeten Methoden der Datenerfassung.

Schwierigkeiten ergeben sich bereits bei der Klassifizierung der ABS. Während bspw. in den USA Mortgage-Backed Securities (MBS) – insbesondere Residential Mortgage-Backed Securities (RMBS) – aufgrund ihrer Dominanz im U.S.-amerikanischen Verbriefungsmarkt eine eigene Kategorie darstellen und nicht zu den ABS gezählt werden, stellen sie in Europa lediglich eine Unterkategorie der ABS dar.<sup>65</sup> Vergleiche zwischen dem U.S.-Markt und dem europäischen Markt müssen stets unter Berücksichtigung der jeweiligen Abgrenzung der in die Überlegungen eingeflossenen Transaktionen erfolgen.

Soll die Größe der beiden Märkte verglichen werden, ist das Messkriterium sorgfältig zu wählen. Beliebte ist die Angabe von (Neu-)Emissionsvolumina.<sup>66</sup> Für True Sale Transaktionen ist das unproblematisch. Werden jedoch im Rahmen von synthetischen CDO-Transaktionen Teile des Referenzportfolios nicht durch (refinanzierende) Credit Linked Notes (CLN), sondern durch (nicht refinanzierende) Credit Default Swaps (CDS) gesichert, kann nicht von Emissionsvolumina gesprochen werden. Fraglich ist, ob die CDS neben den CLNs überhaupt als CDOs klassifiziert werden können. Die CDS stellen keine Schuldtitel im Sinne der Definition 2-2 dar. In der Literatur wird begrifflich von refinanzierten und nicht refinanzierten CDOs gesprochen.<sup>67</sup> Nicht refinanzierte CDOs sind auch unter der Bezeichnung der Collateralized Synthetic Obligations (CSO) bekannt. Werden dieser Abgrenzung folgend lediglich refinanzierte CDOs betrachtet, bleiben wesentliche Teile des transferierten Ausfallrisikos unbeachtet. Ein Vergleich zwischen dem Markt für Cash CDOs<sup>68</sup> und synthetische CDOs würde den synthetischen Markt unterschätzen.

---

<sup>64</sup> Zum selben Ergebnis gelangen O. Cousseran und I. Rahmouni (2005), The CDO market, S. 49.

<sup>65</sup> Vgl. J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 32.

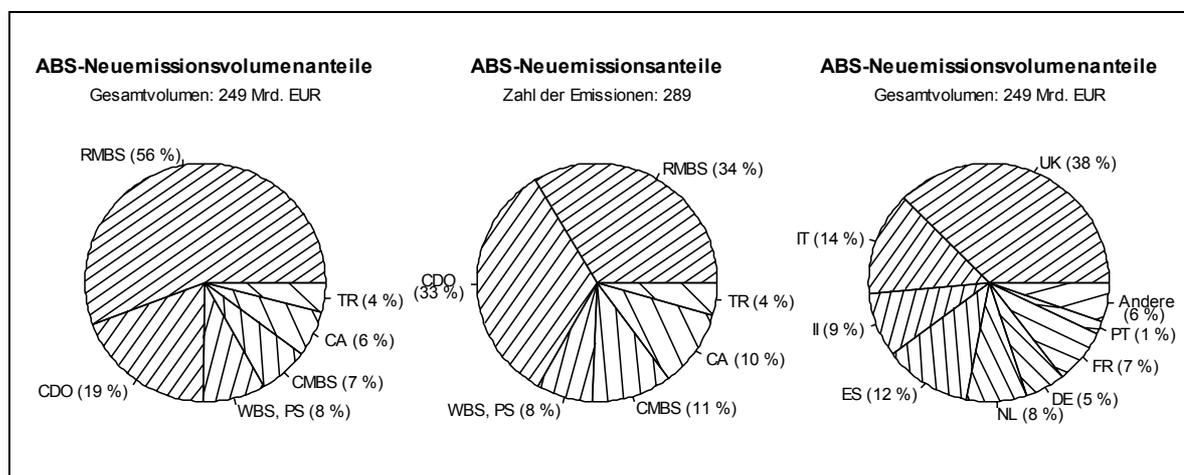
<sup>66</sup> Vgl. stellv. T. Althaus (2003), Verbriefung in Deutschland, S. 634 f.

<sup>67</sup> Engl.: unfunded and funded synthetic CDOs. In der Kombination ist der Begriff der "partially funded CDOs" anzutreffen. Vgl. O. Cousseran und I. Rahmouni (2005), The CDO market, S. 46.

<sup>68</sup> Der Begriff „Cash CDO“ wird in Abgrenzung zur „synthetischen CDO“ verwendet. Er ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff der „Cash Flow CDO“. Vgl. J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 2 u. 30 f.

Alternativ könnte das (Nominal-)Volumen der gesicherten Referenzportfolios als Messkriterium verwendet werden. Nachteilig ist diese Vorgehensweise jedoch bei sog. Single-Tranche CDOs, bei denen lediglich das Ausfallrisiko für einen Ausschnitt des Referenzportfolios transferiert wird. Mithin wird vom Risikotransfervolumen in Abgrenzung zum Referenzportfoliovolumen gesprochen.<sup>69</sup> Ratingagenturen verweisen regelmäßig auf die Entwicklung der gerateten CDO-Volumina.<sup>70</sup> Da jedoch insbesondere (Super-)Senior- und Equity Tranchen regelmäßig über kein Rating verfügen, können solche Zahlen mit Blick auf die beachtliche Größenordnung von (ungerateten) Senior-Tranchen (ca. 80 % des Referenzportfolios) allenfalls als Wachstumsindikatoren für den CDO-Markt verwendet werden. Zudem ist zu beachten, dass viele Transaktionen von mehr als nur einer Ratingagentur beurteilt werden, so dass die angegebenen Volumina nicht addiert werden können.

Weder (Neu-)Emissions- noch Risikotransfervolumina können eingetretene Verluste und vorzeitige Amortisationen von einzelnen CDOs erfassen. Darüber hinaus kann nicht zwischen länger und kürzer laufenden CDOs unterschieden werden. Zieht man hingegen das ausstehende CDO-Volumen als Messkriterium heran, fließen sowohl aktuell begebene als auch ältere, immer noch laufende CDOs in die Beurteilung eines Marktes ein.



**Abb. 2-2: Der europäische ABS-Markt in Zahlen**

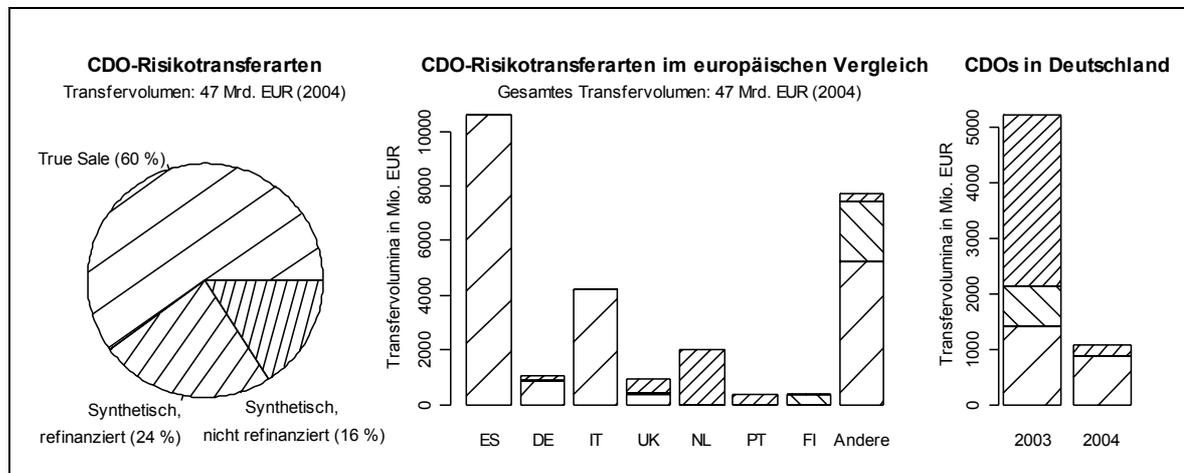
Entworfen nach einer Erhebung der Commerzbank für das Jahr 2004.<sup>71</sup> Für die Abkürzungen der ABS-Kategorien siehe Abb. 2-1. Die Ländercodes entsprechen der ISO Norm 3166. Die Länderanteile richten sich nach der Herkunft der verbrieften Kredite. Der Code „II“ steht für „International“.

<sup>69</sup> Bspw. verwendet die COMMERZBANK den Begriff des Risikotransfervolumens im Rahmen einer (im Folgenden mehrfach zitierten) Erhebung zum europäischen Verbriefungsmarkt des Jahres 2004. Problematisch ist, dass die COMMERZBANK bei einigen Transaktionen die durch CDS gesicherten sog. Sub-Mezzanine-Tranchen zum Risikotransfervolumen hinzurechnet, die (Super-)Senior-Tranchen, die ebenfalls per CDS gesichert werden, dagegen nicht mit einbezieht. Als Beispiel sei die Behandlung der PROMISE CARAVELA 2004 PLC-Transaktion angeführt. Vgl. T. Eng und A. MacKay (2005), Facts & figures 2004, S. 86 (COMMERZBANK Sector Review).

<sup>70</sup> Vgl. bspw. J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 9.

<sup>71</sup> Vgl. T. Eng und A. MacKay (2005), Facts & figures 2004, S. 1-6 (COMMERZBANK Sector Review).

Der europäische ABS-Markt weist seit Jahren starke Wachstumsraten auf und erreichte im Jahr 2004 ein Neuemissionsvolumen von 249 Mrd. EUR.<sup>72</sup> Dominiert wird der Verbriefungsmarkt durch Mortgage-Backed Securities (MBS). Residential Mortgage-Backed Securities (RMBS) und Commercial Mortgage-Backed Securities (CMBS) wiesen jeweils Marktanteile von 56 % und 7 % auf (vgl. Abb. 2-2). Den MBS folgten die CDOs mit einem Anteil am Neuemissionsvolumen von 19 %. Zieht man zum Vergleich beider Märkte die Anzahl der Emissionen hinzu, lagen der europäische RMBS-Markt mit 97 Transaktionen und der europäische CDO-Markt mit 96 Transaktionen dicht beieinander.<sup>73</sup> Die meisten ABS-Transaktionen verbrieften Kredite aus Großbritannien (76 Transaktionen), Italien (39 Transaktionen) und Spanien (35 Transaktionen). Insbesondere Spanien konnte in den Jahren 2002 bis 2004 ein starkes Wachstum verzeichnen und lag mit einem Neuemissionsvolumen von 30 Mrd. EUR (12 %) an dritter Stelle.<sup>74</sup> Die Verbriefungsaktivitäten in Deutschland fallen mit einem Neuemissionsvolumenanteil von 5 % vergleichsweise gering aus. Zudem hat im Jahr 2004 das Neuemissionsvolumen im Vergleich zum Jahr 2003 stark abgenommen. Ursache waren fehlende Transaktionen im Rahmen des Verbriefungsprogramms PROMISE der KfW. Zu Beginn des Jahres 2005 wurde dagegen wieder ein Kreditportfolio mit einem Gesamtvolumen i. H. v. 650 Mio. EUR mit Hilfe der KfW verbrieft.



**Abb. 2-3: Der europäische CDO-Markt in Zahlen**

Entworfen nach einer Erhebung der Commerzbank für das Jahr 2004.<sup>75</sup> Die Balkenteile repräsentieren True Sale-Volumina (grob schraffiert), synthetische refinanzierte Volumina (mittelgrob schraffiert) und synthetische nicht refinanzierte Volumina (fein schraffiert).

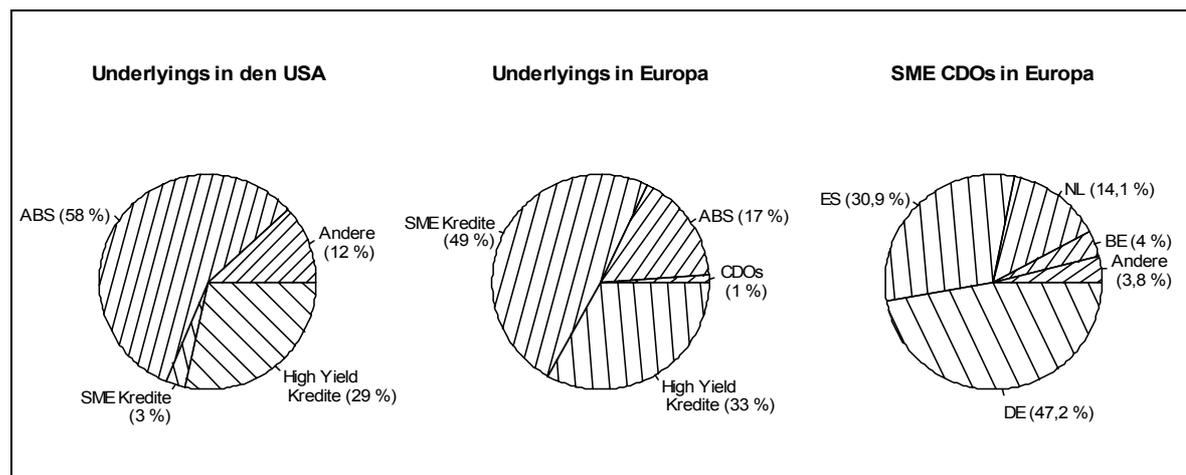
<sup>72</sup> Vgl. T. Eng und A. MacKay (2005), Facts & figures 2004, S. 6, Table 5. Das dort angegebene Volumen ist im Angesicht der obigen Diskussion vorsichtig zu beurteilen, da regelmäßig die Senior-Tranchen nicht in die Zahlen eingeflossen sind (vgl. Fn. 69). Ähnliche Größenordnungen sind in ESF (2003, 2004, 2005), ESF Securitisation, S. 1 und J. Krahen (2005), Der Handel von Kreditrisiken, S. 4 zu finden.

<sup>73</sup> Beachtet man, dass der RMBS-Markt durch True Sale-Transaktionen dominiert wird (vgl. T. Eng und A. MacKay (2005), Facts & figures 2004, S. 7) während ein Großteil der CDO-Transaktionen synthetisch ist, kann ein Vergleich allein anhand der Neuemissionsvolumina mit Blick auf die i. d. R. mit Kreditderivaten gesicherten Senior-Tranchen ein zum Nachteil des CDO-Marktes verzerrtes Bild liefern.

<sup>74</sup> Vgl. ESF (2003, 2004, 2005), ESF Securitisation, S. 2.

<sup>75</sup> Vgl. T. Eng und A. MacKay (2005), Facts & figures 2004, S. 55-58 (COMMERZBANK Sector Review).

Der europäische CDO-Markt ist – anders als der U.S.-amerikanische CDO-Markt – stark geprägt von synthetischen Transaktionen (vgl. Abb. 2-3).<sup>76</sup> Gemessen am Risikotransfer-volumen betrug der Anteil synthetischer Strukturen im Jahr 2004 ca. 40 %.<sup>77</sup> Für die einzelnen europäischen Länder fiel das Ergebnis jedoch sehr unterschiedlich aus. In Spanien und Italien wurden ausschließlich True Sale-Transaktionen durchgeführt. In den Niederlanden hingegen waren sämtliche Transaktionen synthetisch. In Deutschland dominieren mit der KfW-Verbriefungsplattform PROMISE i. d. R. synthetische CDO-Transaktionen.<sup>78</sup>



**Abb. 2-4: Verbriefung von Mittelstandskrediten in den USA und in Europa**

Quellen: O. Cousseran und I. Rahmouni (2005), *The CDO market*, S. 52 (links, mittig); H. Gallego, C. Kuti und S. Baddeley (2005), *Pan-European SME CDO performance tracker*, S. 2 (FITCH Report) (rechts).

Mit der Verbriefungsplattform PROMISE werden Kredite an (hauptsächlich) deutsche Mittelstandsunternehmen (Small and Medium-sized Entities, SMEs) synthetisch verbrieft und am Kapitalmarkt platziert. Anders als in den USA sind Mittelstandskredite in Europa ein beliebtes Underlying für CDO-Transaktionen (vgl. Abb. 2-4). Nahezu 49 % der am europäischen CDO-Markt verbrieften Kredite wurden an mittelständische Unternehmen vergeben.<sup>79</sup> Dabei nimmt Deutschland im Marktsegment der SME CDOs, gefolgt von Spanien und den Niederlanden, eine führende Position in Europa ein. Während auf Deutschland derzeit 47,2 % des ausstehenden SME CDO-Nominalvolumens entfallen, sind es im Falle von Spanien und den Niederlanden 30,9 % und 14,1 %.<sup>80</sup> Aufgrund der großen Bedeutung der synthetischen SME CDOs in Deutschland sollen im weiteren Verlauf der Arbeit vorrangig synthetische Transaktionen mit Mittelstandskreditreferenzportfolien unterstellt werden. Viele Ergebnisse sind jedoch auf True Sale-Transaktionen übertragbar.

<sup>76</sup> Vgl. O. Cousseran und I. Rahmouni (2005), *The CDO market*, S. 50.

<sup>77</sup> Zu diesem Ergebnis gelangt auch J. Krahn (2005), *Der Handel von Kreditrisiken*, S. 5. Fraglich ist, ob stets die (Super-)Senior-Tranche erfasst worden ist. Vgl. auch Fn. 69.

<sup>78</sup> Vgl. T. Althaus (2003), *Verbriefung in Deutschland*, S. 634 f.

<sup>79</sup> Vgl. O. Cousseran und I. Rahmouni (2005), *The CDO market*, S. 52.

<sup>80</sup> Vgl. H. Gallego, C. Kuti und S. Baddeley (2005), *Pan-European SME CDO performance tracker*, S. 2 (FITCH Report).

## 22 Grundlagen zum Aufbau von CDO-Transaktionen

### 221 Zusammenstellung und Zusammensetzung von CDO-Referenzportfolios

Im Zentrum einer jeden CDO-Transaktion steht der Forderungspool bzw. das Referenzportfolio.<sup>81</sup> Im Rahmen der Vorbereitung, Planung und Durchführung einer CDO-Transaktion nimmt die Analyse potentiell zu verbriefender Forderungen und die schließliche Zusammenstellung des Forderungspools eine zentrale Position ein.<sup>82</sup>

Zunächst ist zu hinterfragen, ob die Forderungen des Originators für eine Verbriefung geeignet sind und ob die als geeignet erachteten Forderungen ein ökonomisch sinnvolles Transaktionsvolumen erlauben (Critical Mass Test).<sup>83</sup> Für True Sale-Transaktionen ist es erforderlich, dass sich aus den Forderungen ein „eindeutig identifizierbarer und beständiger Zahlungsstrom ableiten lässt“<sup>84</sup>, da die lfd. Ansprüche der CDO-Anleger aus den Zahlungsströmen der Forderungen befriedigt werden müssen. Demgegenüber werden im Rahmen von synthetischen Transaktionen die CDO-Zinsforderungen aus den Risikoprämien der geschlossenen CDS-Kontrakte sowie den Zinseinzahlungen aus dem risikofreien Kollateral des SPVs bedient. Traditionelle Aussagen<sup>85</sup> wie „*If it flows, securitize it!*“ verlieren weitgehend ihre Bedeutung.

Bei True Sale-Transaktionen muss sichergestellt werden, dass die Forderungen rechtsgültig veräußert und organisatorisch vom verbleibenden Kreditportfolio getrennt werden können. Voraussetzung dafür ist, dass die Forderungen frei von Abtretungsverboten, Belastungen oder anderweitigen Rechtstiteln sind.<sup>86</sup> Bei synthetischen Transaktionen entfällt die Notwendigkeit der Abtretbarkeit, da lediglich Einzelrisiken mit Hilfe von derivativen Strukturen transferiert werden. In den synthetischen Verbriefungsprozess können auch Forderungen mit abtretungshinderlichen Abreden einbezogen werden.

Zur Schätzung der Häufigkeit und der Schwere zukünftiger Ausfallereignisse sind ausreichend vergangenheitsbezogene Daten der zu verbriefenden Kreditart notwendig. Die Verfügbarkeit und Qualität von historischen Daten bestimmt sowohl bei True Sale-Transaktionen als auch bei synthetischen Transaktionen wesentlich die Möglichkeit der modelltheoretischen Abbildung des Forderungspools und darauf aufbauend die Güte der

---

<sup>81</sup> Der Begriff des Referenzportfolios wird vorrangig bei synthetischen Strukturen verwendet.

<sup>82</sup> Zum operativen Ablauf von ABS-Transaktionen und Anforderungen an die zu verbriefenden Forderungen siehe H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 144-164 u. 165-192; S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 80-98; PWC (2004), Verbriefungen in Luxemburg, S. 8-10.

<sup>83</sup> Eine grundlegende Diskussion der Eignung verschiedener Kreditarten findet sich in S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 99-130.

<sup>84</sup> S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 80.

<sup>85</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 165.

<sup>86</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 174-179; S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 81 f.

modelltheoretischen Messung des Kreditrisikos der CDOs. Vorausgegangen sein muss eine standardisierte und objektive Bonitätsprüfung eines jeden Kreditnehmers bei der Kreditvergabeentscheidung. Die ermittelte Bonität sollte sich zudem stets in der kalkulierten Risikoprämie niederschlagen (sog. Standardrisikokosten). Bei True Sale-Transaktionen müssen die kalkulierten Risikoprämien einen risikoadäquaten Beitrag zur Bedienung der CDO-Zinsforderungen leisten. Bei synthetischen Transaktionen dienen sie zur Finanzierung der CDS-Credit Fees auf der Ebene des Originators.

Die zu verbriefenden Forderungen sollten in der Gestaltung weitgehend homogen sein und auf Standardverträgen beruhen.<sup>87</sup> Dadurch kann die Qualität des Forderungspools verhältnismäßig einfach einer Prüfung unterzogen werden, ohne jeden einzelnen Kreditvertrag einer Begutachtung zuführen zu müssen.

Für True Sale-Transaktionen sind die Fristigkeiten der zu verbriefenden Forderungen mit der Fristigkeit der CDO-Transaktion abzustimmen. Werden kurzfristige Forderungen verbrieft, sind zur Vermeidung vorzeitiger Tilgungen der CDOs getilgte Forderungen durch neue Forderungen zu ersetzen. Wünschenswert ist, dass die verbrieften Forderungen nicht länger als die CDO-Transaktion laufen, da sonst die Tilgung der CDOs am Ende der Transaktionslaufzeit durch schlagend werdende Marktpreisrisiken im Rahmen der Verwertung der langlaufenden Forderungen negativ beeinflusst werden könnte. Werden dennoch langlaufende Forderungen verwendet, können Zinsderivate zur Kurssicherung herangezogen werden. Bei synthetischen Transaktionen ist die Abstimmung von Fristigkeiten weniger von Bedeutung, da die Bedienung der CDOs nicht unmittelbar aus den Forderungen erfolgt. Sinkt das Nominalvolumen des Referenzportfolios während der Transaktionslaufzeit, sinkt damit einhergehend die Gefahr von Kompensationszahlungen durch das SPV im Rahmen der abgeschlossenen CDS. Die CDS-Credit Fees fallen ebenso wie die CDO-Risikoprämien geringer aus. Die CDOs können davon unberührt endfällig durch Verwertung des risikolosen Kollaterals des SPVs getilgt werden.

Um Risiken mit Blick auf die Performance der CDOs zu diversifizieren, sollte der Forderungspool eine geographisch und demographisch breit gestreute Schuldnerstruktur aufweisen. Die Auswirkungen von konjunkturellen Schwankungen, von branchenspezifischen Problemen oder von Insolvenzen einzelner Kreditnehmer auf den Forderungspool, respektive auf die Performance der CDOs, können so begrenzt werden. Entgegenstehen können dem jedoch die Verbriefungsziele des Originators besonders dann, wenn dieser zum Abbau

---

<sup>87</sup> Vgl. S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 82 f.

von Klumpenrisiken bewusst Kreditrisiken mit bestimmter regionaler oder branchenspezifischer Herkunft verbrieft will. Sofern es sich um eine Multi-Seller-Transaktion handelt, kann auch in einem solchen Fall der Forderungspool hinreichend diversifiziert werden.

Werden besicherte Forderungen verbrieft, sollten die gestellten Sicherheiten wertbeständig und für den Fall einer notwendig werdenden Liquidation möglichst zeitnah verwertbar sein. Ein verbleibendes Verwertungsrisiko ist bei der Beurteilung der Qualität des Forderungspools zu berücksichtigen. Bei True Sale-Transaktionen kann eine lange Zeitdauer bis zum Eingang des Liquidationserlöses zu Liquiditätsengpässen führen. Bei synthetischen Transaktionen stellt sich die Frage nach der Höhe der Kompensationszahlungen aus den CDS-Kontrakten und der Abschreibung der CDO-Nominalwerte.<sup>88</sup> In der Praxis werden regelmäßig „Late Recovery“-Klauseln vereinbart. Dabei wird der Nominalbetrag der CDOs unter Berücksichtigung des Prinzips der gestaffelten Verlustpartizipation zunächst abgeschrieben. Bei späterer Verwertung der gestellten Sicherheiten werden vorgenommene Abschreibungen um die Höhe des Liquidationserlöses der Sicherheiten zurückgenommen. Zwischenzeitliche CDO-Zinsausfälle aufgrund der vorübergehend verminderten CDO-Nominalbeträge werden nicht kompensiert.<sup>89</sup> Modelltheoretisch ist die Erfassung von Late Recoveries schwierig und wird zumeist (auch in dieser Arbeit) vernachlässigt.

Wegen der hohen Start-up-Kosten auf der Ebene des Originators<sup>90</sup>, insbesondere der Strukturierungskosten für den Forderungspool, der Rechtsanwaltskosten für die juristische Beratung und die Erstellung der Vertragsunterlagen, der Kosten für steuerliche Expertisen, der Kosten zur Errichtung des SPVs und der Kosten für Beratungs- und Serviceleistungen von Investmentbanken zur Emission der CDOs, und der laufenden Verwaltungskosten auf der Ebene des SPVs sollte die Emission ein bestimmtes Mindestvolumen nicht unterschreiten. Quantitative Angaben in der Literatur variieren stark und hängen von den jeweiligen Marktverhältnissen und den genauen Transaktionsstrukturen ab. Mit Blick auf die Diversifikation des Forderungspools sowie die Schaffung eines möglichst liquiden Sekundärmarktes für die CDOs sollte das Transaktionsvolumen ohnehin möglichst groß gewählt werden. Begrenzt wird das Transaktionsvolumen durch die Verfügbarkeit geeigneter Aktiva. Ggf. empfiehlt sich die Teilnahme an einem Multi-Seller-Programm.

---

<sup>88</sup> Vgl. zum Ablauf von CDS Settlements J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 156-158.

<sup>89</sup> Vgl. bspw. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 28, Abs. 8.2. Siehe auch die Auszüge aus diesem Dokument in Anlage 21.

<sup>90</sup> Vgl. kurz D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 648. Eine ausführlichere Betrachtung der Kosten findet sich in S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 155-161. Ein Versuch einer Kosten-Nutzen-Analyse findet sich ebenda, S. 161-180.

## 222 Konstruktion und Funktion von Zweckgesellschaften

### 2221 SPVs als Instrument der konkursrechtlichen Isolierung des Referenzportfolios

Die Refinanzierung spezifischer, ausdrücklich gekennzeichnete Vermögenswerte ermöglicht dem Originator die Beschaffung finanzieller Mittel ausschließlich auf der Basis der Qualität des zusammengestellten Forderungspools unabhängig von der eigenen Bonität.<sup>91</sup> Aus Sicht des Investors reduzieren sich mit der Herauslösung der Aktiva aus dem Umfeld des Originators die den Kapitaleinsatz betreffenden Unsicherheiten. Die Komplexität der Bewertung verringert sich erheblich, da lediglich die erwarteten Einzahlungsüberschüsse eines Pools abgegrenzter, homogener Vermögensgegenstände zu berücksichtigen sind.<sup>92</sup>

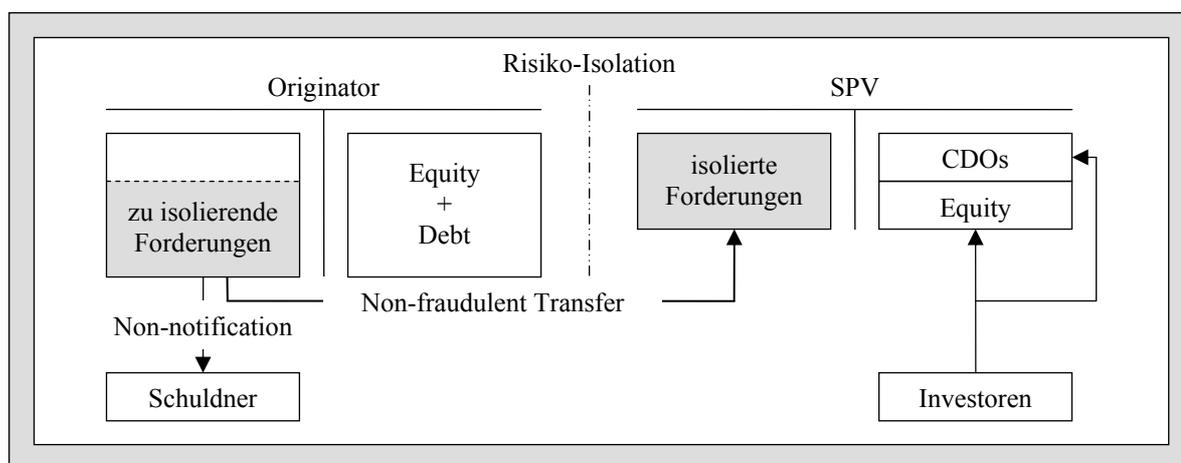


Abb. 2-5: Die bilanzielle Grundstruktur von CDO-Transaktionen (True Sale)<sup>93</sup>

Im Rahmen von klassischen CDO-Strukturen erfolgt die bonitätsmäßige Trennung der Forderungsrechte (Loans und Bonds) vom Originator durch Abtretung (Zession<sup>94</sup>) derselben gem. §§ 398-413 BGB an eine eigens zu diesem Zweck gegründete, rechtlich selbständige und vom Originator wirtschaftlich unabhängige Zweckgesellschaft (SPV).<sup>95</sup>

<sup>91</sup> Vgl. P. Roventa und S. König (2004), ABS als Finanzierungsform für den Mittelstand, S. 2; R. Lenz und L. Temme (2003), ABS als Finanzierungsinstrument für Kreditgenossenschaften, S. 660 f. u. 662-666. H. Lohneiß (2003), Unternehmensfinanzierung in Deutschland, S. 639 f. u. 642 f. Zur ABS-Finanzierung von Großbanken vgl. D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 649. Zur ABS-Finanzierung von kleinen Banken vgl. ebenda, S. 650.

<sup>92</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 28, 49 u. 101. Darüber hinaus verringern sich Informations- und Überwachungskosten, da sich die Beurteilung einzelner Vermögenswerte einfacher gestaltet als die Analyse eines gesamten Unternehmens. Vgl. W. Benner (1988), ABS, S. 409 f.

<sup>93</sup> In Anlehnung an H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 102 u. 120.

<sup>94</sup> Anders als bei der zivilrechtlichen Übertragung des Eigentums an beweglichen und unbeweglichen Sachen, wird bei der obligationenrechtlichen Übertragung des Eigentums an Forderungsrechten von einer Abtretung (Zession) gesprochen. Eine Zession ist ein zweiseitiges, dingliches Rechtsgeschäft, wodurch eine Forderung vom bisherigen Gläubiger (Zedent) auf einen neuen Gläubiger (Zessionar) übertragen wird. Der Zessionar wird Inhaber und Eigentümer der Forderung. Dabei unterscheidet man zwischen der offenen und der stillen Zession. Im Rahmen von CDOs wird meist die stille Zession gewählt, da in diesem Fall die Forderungsabtretung nicht dem Schuldner angezeigt werden muss.

<sup>95</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 90 u. 101. Zweckdienlich ist die sog. „Mantelzession“. Die Forderungen werden auf Listen erfasst und gehen zu einem vereinbarten Zeitpunkt über. Vgl. F. Engelhardt und G. Lütje (1996), Bilanzierung von ABS-Transaktionen, S. 517; C. Zumpf (2000), ABS, S. 10.

Die Gründung des SPVs hat zunächst insolvenzrechtliche Gründe. Mit ihr gelingt die rechtliche Verselbständigung der Forderungsrechte, so dass diese von Zahlungsansprüchen Dritter im Falle einer Insolvenz des Originators (*Bankruptcy-remoteness mit Blick auf den Originator*) isoliert sind. Dafür ist es erforderlich, dass die Abtretung der Forderungsrechte auf der Basis eines Verkaufsvertrages gem. § 433 HGB erfolgt (True Sale). Alternativ kann rechtlich gesehen die Abtretung im Rahmen eines Darlehensvertrages gem. § 488 HGB mit Sicherungsabrede (Pledge) erfolgen.<sup>96</sup> Das SPV würde in diesem Fall die Stellung eines gesicherten Gläubigers einnehmen. Mit der Novellierung des Insolvenzrechts im Jahre 1999 können gesicherte Gläubiger die entsprechenden Sicherheiten jedoch nicht mehr vorab der Insolvenzmasse<sup>97</sup> entziehen.<sup>98</sup> Vielmehr gehen die Verfügungsrechte auf den Insolvenzverwalter über.<sup>99</sup> Den gesicherten Gläubigern steht lediglich das Recht auf Absonderung zu, womit ihnen eine vorrangige Befriedigung ihrer Ansprüche aus den entsprechenden Verwertungserlösen zusteht.<sup>100</sup> Zudem müssen sie sich an den Insolvenzkosten i. H. d. Kosten der Feststellung und Verwertung der Sicherheiten beteiligen.<sup>101</sup> Insbesondere mit der Beteiligung des SPVs an den Insolvenzkosten kann beim Darlehensvertrag mit Sicherungsabrede nicht von einer Insolvenzferne des SPVs vom Originator ausgegangen werden. Dazu bedarf es der Gültigkeit des True Sales. Für den Fall, dass gerichtlich die Ungültigkeit des True Sales festgestellt wird, sollte das SPV jedoch zumindest die Stellung eines erstrangig gesicherten Gläubigers einnehmen können.<sup>102</sup> Dazu muss die Abtretung rechtsgültig sein, selbst wenn die Abtretung still erfolgt ist (Non-notification).<sup>103</sup> Die Abtretung darf nicht durch eine Vereinbarung zwischen dem Originator und dem Schuldner ausgeschlossen sein.<sup>104</sup> Zudem sind datenschutzrechtliche Bestimmungen zu beachten.<sup>105</sup>

---

<sup>96</sup> Zum Begriff der „Sicherungsabrede“ siehe H.-J. Lwowski (2000), *Kreditsicherung*, S. 35-39.

<sup>97</sup> Vgl. zum Begriff der Insolvenzmasse § 35 InsO und W. Zimmermann (2003), *Insolvenzrecht*, S. 19-26.

<sup>98</sup> Vgl. W. Zimmermann (2003), *Insolvenzrecht*, S. 49, Abs. bb).

<sup>99</sup> Für eine kurze Gegenüberstellung der Regelungen des alten Konkursrechts und der neuen Insolvenzordnung mit Blick auf ABS-Transaktionen vgl. W. Küppers und C. Brause (1998), *ABS*, S. 419 f.

<sup>100</sup> Vgl. §§ 49-52 InsO sowie §§ 165-173 InsO. Für Forderungsabtretungen sicherungshalber vgl. W. Zimmermann (2003), *Insolvenzrecht*, S. 59 f., Abs. b) u. S. 114 Abs. c) sowie § 51 Nr. 1 InsO.

<sup>101</sup> Vgl. §§ 170, 171 InsO. Ggf. ist ein Pauschalbetrag von 9 % des Verwertungserlöses anzusetzen.

<sup>102</sup> Vgl. B. Posch und T. DiTullio (2002), *Rating latin American RMBS*, S. 18 (MOODY'S Report).

<sup>103</sup> Im Falle einer Insolvenz des Originators kann es sich als problematisch erweisen, wenn Schuldner die Verrechnung ihrer Schuldverpflichtungen mit etwaigen Guthaben erklären. Für diesen Fall lässt sich das SPV vom Originator unterzeichnete Abtretungsanzeigen ausstellen. Im Konkursfall kann das SPV diese Abtretungsanzeigen dem Schuldner vorlegen, so dass dieser nur noch mit befreiender Wirkung an das SPV zahlen darf. Vgl. H. Bär (1997), *Asset securitisation*, S. 103, Fn. 49. Siehe zur Abtretungsbeurkundung insbesondere auch § 403 Abs. 1 sowie § 410 Abs. 1 BGB.

<sup>104</sup> Vgl. § 399 BGB. Siehe auch B. Gehring (1999), *ABS im amerikanischen und deutschen Recht*, S. 145 sowie W. Küppers und C. Brause (1998), *ABS*, S. 416 und R. Lenz und L. Temme (2003), *ABS als Finanzierungsinstrument für Kreditgenossenschaften*, S. 661.

<sup>105</sup> Vgl. W. Küppers und C. Brause (1998), *ABS*, S. 418 f.

Damit die Refinanzierung der separierten Forderungen unabhängig von der Bonität des Originators erfolgen kann, muss stets gewährleistet sein, dass kein Vorgang beim Originator die Stellung des SPVs als Forderungsinhaber konterkariert. Dazu ist es notwendig, dass der Erwerb der Forderungen durch das SPV im Nachhinein unter keinen Umständen angefochten werden kann. Insbesondere ist darauf zu achten, dass im Falle einer Insolvenz des Originators die Veräußerung der Forderungen durch den Originator nicht als schädigende Transaktion vor der Insolvenz interpretiert werden könnte (Non-fraudulent Transfer).<sup>106</sup> Die „Insolvenzferne“ zum Originator ist durch Rechtsgutachten zu bestätigen.

Die rechtliche Verselbständigung der Forderungsrechte in einem SPV soll zudem die störungsfreie Durchleitung der Cash Flows von den Schuldern über das SPV hin zu den CDO-Investoren sicherstellen. Falls der Originator auch nach der Abtretung im Rahmen eines Geschäftsbesorgungsvertrages das Mahn- und Inkassowesen besorgt, muss sichergestellt sein, dass die Cash Flows aus dem Forderungspool nicht mit den Zahlungsströmen der übrigen Geschäftstätigkeit vermischt werden (No Commingling Risk).<sup>107</sup> Der Originator wird insbesondere dann das Mahn- und Inkassowesen besorgen, wenn zur Wahrung der Kundenbeziehung die Abtretung still erfolgt ist. Zeichnet sich eine Insolvenzbedrohung für den Originator ab, sollte das SPV dennoch jederzeit in der Lage sein, die Abtretung gegenüber den Schuldnern anzuzeigen, um weitere Leistungen an den Originator zu verhindern. Zu diesem Zweck kann sich das SPV vom Originator Abtretungserklärungen ausstellen lassen.<sup>108</sup>

Die rechtliche Verselbständigung der Forderungsrechte in einem SPV ermöglicht darüber hinaus die strikte Limitierung der Geschäftsaktivitäten zur Begrenzung des eigenen Insolvenzrisikos (*Bankruptcy-remoteness mit Blick auf das SPV*). Danach ist nach Ansicht der Ratingagenturen<sup>109</sup> die Tätigkeit auf das Ankaufen des Forderungspools und das Begeben der CDOs durch die Statuten der Gesellschaft zu beschränken. Insbesondere dürfen keine weiteren, den CDOs gegenüber vorrangigen Verbindlichkeiten eingegangen werden, da eine ausbleibende Bedienung derselben zur Insolvenz des SPVs führen könnte. Darüber hinaus sind der Verkauf von Forderungen aus dem Pool sowie das Abtreten von Rechten aus dem Forderungspool an Dritte nicht zulässig.<sup>110</sup> Solange Forderungen aus der Emission

---

<sup>106</sup> Zu weiteren Aspekten siehe C. Zumpf (2000), ABS, S. 11.

<sup>107</sup> Vgl. auch die Anmerkungen zum Geschäftsbesorgungsvertrag in R. Lenz und L. Temme (2003), ABS als Finanzierungsinstrument für Kreditgenossenschaften, S. 661. Zu den Aufgaben und Anforderungen an den Originator als Service-Agenten siehe ebenda, S. 664.

<sup>108</sup> Vgl. auch Fn. 103.

<sup>109</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 111 f. sowie die dort angegebene Literatur.

<sup>110</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 112.

der CDOs gegenüber dem SPV ausstehen, darf dieses weder liquidiert, noch mit einer anderen Partei zusammengeschlossen werden.<sup>111</sup>

Als Rechtsformen für das SPV eignen sich insbesondere Kapitalgesellschaften. Nach deutschem Gesellschaftsrecht kommen die Gesellschaft mit beschränkter Haftung und die Aktiengesellschaft in Frage.<sup>112,113</sup> Zum einen isoliert die Wahl einer Gesellschaftsform mit eigener Rechtspersönlichkeit das SPV von einer Insolvenz eines Gesellschafters.<sup>114</sup> Zum anderen steht zur Befriedigung der schuldrechtlichen Ansprüche der CDO-Investoren ausschließlich das Zweckgesellschaftsvermögen, d. h. der zusammengestellte Forderungspool, zur Verfügung.<sup>115</sup>

Schließlich ist eine eigene Corporate Identity zu gewährleisten.<sup>116</sup> Sie umfasst neben einer eigenen Buchführung und einem eigenen Finanzreporting auch eigene Geschäftsräume, Telefonanschlüsse und Briefköpfe.<sup>117</sup> Die Information Memoranden zu den CDO-Emissionen weisen zudem regelmäßig deutlich die Firmenbezeichnungen der emittierenden SPVs aus.

---

<sup>111</sup> Eine vorzeitige Liquidation wird i. d. R. dadurch ausgeschlossen, dass sich alle Parteien vertraglich verpflichten, das SPV erst nach einer bestimmten zeitlichen Frist nach der Bedienung der letzten Forderung gegen das SPV aus den CDOs zu liquidieren. Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 111, Fn. 84.

<sup>112</sup> Dabei ist zu beachten, dass aus steuerlichen Gesichtspunkten die Zweckgesellschaften häufig im Ausland gegründet werden, so dass ausländische gesellschaftsrechtliche Besonderheiten Berücksichtigung finden müssen. Neben der Kapitalgesellschaft kommt in einigen Bundesstaaten der USA sowie in Liechtenstein das Treuunternehmen (Trust) in Betracht. Dabei handelt es sich um die Zusammenfassung von Vermögensgegenständen zu einem rechtlich verselbständigten Sondervermögen (Treuvermögen), das von einem Treuhänder zu Gunsten des Treugebers bzw. der Treugeber auf der Basis einer vertraglichen Vereinbarung (Trust Agreement) verwaltet wird. In der amerikanischen Form kommt dabei insbesondere der sog. Grantor Trust zum Einsatz. Dabei werden die Investoren, nicht aber das Treuvermögen besteuert. Die Steuerbefreiung wird mit der Passivität des Trusts erkaufte. Der Trust darf keine neuen Vermögenswerte erwerben oder bestehende durch neue ersetzen. Darüber hinaus können begebene Wertpapiere lediglich ein einheitliches Miteigentum verbrieft. Damit ist der Grantor Trust für CDO-Strukturen ungeeignet und wird im Folgenden nicht weiter betrachtet. Vgl. zum Grantor Trust A. Rosenthal und M. Ocampo (1988), Securitization of credit, S. 49-54. Treuunternehmen nach liechtensteinischem Recht (Art. 932.a PGR) zeichnen sich durch eine eigene Rechtspersönlichkeit aus (§1 TrUG). Die Begünstigten (Genussberechtigten) werden i. d. R. in einem Beistatut bestellt. Da das Beistatut bei keiner Behörde einzureichen ist, bleibt die Anonymität der Begünstigten gewahrt. Zu bestellen sind ein inländischer Repräsentant und mind. ein Treuhänderrat. Sofern der Sitz des Trusts das Fürstentum Liechtenstein ist, besteht keine Steuerpflicht im Ausland. Da sich der Sitz des Trusts am Verwaltungsort befindet, darf die Verwaltung des Trusts folglich nicht ins Ausland verlegt werden. Der Treufonds (Grundkapital) beträgt mindestens CHF 30.000 und muss voll einbezahlt sein.

<sup>113</sup> Für eine Diskussion der Eignung alternativer Rechtsformen siehe B. Gehring (1999), ABS im amerikanischen und deutschen Recht, S. 149-155.

<sup>114</sup> Vgl. auch R. Eichholz und M. Nelgen (1992), ABS, S. 796. Häufig wird das Eigentum der Zweckgesellschaft an eine gemeinnützige Einrichtung (Charitable Trust) übertragen. Diese Einrichtungen werden oft als verwaiste (Orphan Entity) oder vaterlose (Fatherless Entity) Rechtseinheiten bezeichnet.

<sup>115</sup> Nach deutschem Gesellschaftsrecht resultiert die beschränkte Haftung aus § 13 Abs. 2 GmbHG sowie § 1 Abs. 1 S. 2 AktG.

<sup>116</sup> Der Begriff der Corporate Identity ist hier nicht im Sinne einer Unternehmenskultur zu verstehen.

<sup>117</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 112 sowie die dort angegebene Literatur.

## 2222 SPVs als Instrument der handelsrechtlichen und aufsichtsrechtlichen Isolierung des Referenzportfolios

Vom Ziel der konkursrechtlichen Isolierung ist das Ziel der handelsrechtlichen Isolierung zu unterscheiden. Ziel des Originators ist es dabei, den verbrieften Forderungsbestand aus der Bilanz zu entfernen und Bilanzkennzahlen – insbesondere die Bilanzkennzahlen zur Kapitalstruktur – zu verbessern (Off-Balance-Sheet Transaction). Die Verbesserung der Kapitalstrukturkennzahlen erfolgt dadurch, dass die erhaltenen liquiden Mittel aus der Veräußerung des Forderungsbestandes zur Schuldentilgung verwendet werden. Es kommt zur Bilanzverkürzung. Die verbesserten Kapitalstrukturkennzahlen signalisieren den Kapitalmarktteilnehmern eine gestiegene Bonität, was günstigere Refinanzierungskonditionen zur Folge hat. Handelt es sich beim Originator um ein Kreditinstitut, kann durch die Forderungsveräußerung vorzuhaltendes aufsichtsrechtliches Eigenkapital<sup>118</sup> (Eigenmittel) reduziert werden. Anstelle zur Schuldentilgung kann der Originator die liquiden Mittel verwenden, um neue Aktiva zu generieren. Kreditinstitute müssen somit nicht länger der „Buy and Hold“-Strategie folgen, sondern können aktives Kreditportfoliomanagement durch den Kauf und den Verkauf von zuvor illiquiden Krediten betreiben.<sup>119</sup> Es entsteht ein liquider Sekundärmarkt für sonst nicht handelbare Kredite.

Wie in Abb. 2-5 exemplarisch dargestellt, ist ein durch Kaufvertrag abgetretener Forderungsbestand in der Folge bei der Zweckgesellschaft zu bilanzieren. Beim Originator findet zunächst lediglich ein Aktivtausch statt. Dabei werden die gekennzeichneten Forderungen durch den Gegenwert in Form von finanziellen Mitteln ersetzt (True Sale).<sup>120</sup> Eine anschließende Schuldentilgung ermöglicht die angestrebte Bilanzverkürzung. Erfolgt die Abtretung jedoch im Rahmen eines Darlehensvertrags mit Sicherungsabrede<sup>121</sup> (Pledge), hat das Kreditinstitut die Forderungen gem. § 246 Abs. 1 S. 2 HGB weiterhin zu bilanzieren und darüber hinaus Verbindlichkeiten gegenüber der Zweckgesellschaft auszuweisen.<sup>122</sup> Die angestrebte Bilanzverkürzung gelingt nicht.

---

<sup>118</sup> Für eine aufsichtsrechtlich motivierte Diskussion von ABS-Strukturen siehe S. Jortzik und B. Müller (2002), Kreditrisikominderungsstechniken und Kreditderivate, S. 21-24, 41-45 u. 50-53.

<sup>119</sup> Vgl. D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 649 f.

<sup>120</sup> Der Verkaufspreis ermittelt sich als Barwert aller zukünftigen Zins- und Tilgungszahlungen. Vgl. D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 649. Ggf. entsteht eine Differenz zum Buchwert. Vgl. R. Lenz und L. Temme (2003), ABS als Finanzierungsinstrument für Kreditgenossenschaften, S. 662.

<sup>121</sup> Zum Begriff der „Sicherungsabrede“ siehe H.-J. Lwowski (2000), Kreditsicherung, S. 35-39.

<sup>122</sup> Vgl. P. Rist (2003), Forderungsverkäufe, S. 386 f. Kann der Originator bei schlagend werdenden Ausfallrisiken im Rahmen der Sicherungsabrede in Anspruch genommen werden, kann die Kaufpreistrückzahlung in Höhe des übernommenen Ausfallrisikos als Darlehensrückzahlung interpretiert werden. Siehe ebenda, S. 388.

Da eine Abtretung lediglich den Forderungsübertrag zum Inhalt hat, sagt diese nichts über den Rechtsgrund<sup>123</sup> und folglich nichts über die bilanzielle Behandlung der Übertragung aus.<sup>124</sup> Daher hat das IDW im Jahr 2002 eine Stellungnahme zur handelsrechtlichen Zuordnung von Forderungsrechten im Rahmen von Asset-Securitisations bei prüfungspflichtigen und freiwillig geprüften Unternehmen veröffentlicht.<sup>125</sup> Darin folgt das IDW der h. M., wonach in Analogie zum Factoring<sup>126</sup>, jedoch im Unterschied zur oben betrachteten konkursrechtlichen Sichtweise, nicht das zivilrechtliche, sondern das wirtschaftliche Eigentum<sup>127</sup> maßgeblich ist.<sup>128</sup> Danach ist es nicht ausreichend, die Verfügungsmacht über die Forderungen auszuüben. Vielmehr muss die Veräußerung auf einem auf Dauer ausgegerichteten Rechtsgeschäft basieren. Insbesondere eine fest vereinbarte Rückübertragung würde dem entgegenstehen.<sup>129</sup> Im Rahmen eines Darlehensvertrages mit Sicherungsabrede ist der Sicherungsnehmer nach dem Wegfall des Sicherungszwecks verpflichtet, eine Rückübertragung (Retrozession) vorzunehmen. Der Sicherungsgeber kann den Sicherungsnehmer durch die Rückzahlung somit dauerhaft von der Einwirkung auf die Forderung ausschließen und bleibt wirtschaftlicher Eigentümer.<sup>130</sup>

---

<sup>123</sup> Eine Abtretung ist ein Verfügungsvertrag, der durch übereinstimmende Willenserklärung zwischen dem Zedenten und dem Zessionar zustande kommt. Dem Verfügungsvertrag liegt ein Verpflichtungsgeschäft zugrunde. Aus dem Verpflichtungsgeschäft kann der Zessionar einen vertraglichen Anspruch auf Abtretung der Forderung ableiten. Das Verpflichtungsgeschäft stellt somit den Rechtsgrund der Abtretung dar und kann sowohl ein Kaufvertrag als auch ein Darlehensvertrag mit Sicherungsabrede sein.

<sup>124</sup> Vgl. F. Engelland und G. Lütje (1996), Bilanzierung von ABS-Transaktionen, S. 518. Einen ausführlichen Vergleich beider Rechtsgründe findet sich in C. Hultsch (2000), Wirtschaftliche Zurechnung von Forderungen, S. 2130.

<sup>125</sup> Vgl. IDW (2002), Stellungnahme zur Rechnungslegung: ABS. Eine kritische Diskussion dieser Stellungnahme führen G. Dreyer, H. Schmid und O. Kronat (2003), Bilanzbefreiende Wirkung von ABS, S. 91 ff.

<sup>126</sup> Ein Vergleich zwischen ABS-Strukturen und dem Factoring findet sich in H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 53-58.

<sup>127</sup> Der Begriff des „wirtschaftlichen Eigentums“ entstammt dem Steuerrecht. Danach wird das wirtschaftliche Eigentum gem. § 39 Abs. 1 AO zunächst beim zivilrechtlichen Eigentümer vermutet. In § 39 Abs. 2 Nr. 1 AO führt der Gesetzgeber jedoch weiter aus: „Übt ein anderer als der Eigentümer die tatsächliche Sachherrschaft ... in der Weise aus, dass er den Eigentümer im Regelfall für die betriebsgewöhnliche Nutzungsdauer von der Einwirkung auf das Wirtschaftsgut wirtschaftlich ausschließen kann, so ist ihm das Wirtschaftsgut zuzurechnen“.

<sup>128</sup> Eine Diskussion des Begriffs „wirtschaftliches Eigentum“ findet sich in G. Dreyer, H. Schmid und O. Kronat (2003), Bilanzbefreiende Wirkung von ABS, S. 92 f.; W. Mellwig und M. Weinstock (1996), Zurechnung von mobilen Leasingobjekten, S. 2345-2348.

<sup>129</sup> Einen sog. Clean-up Call, d. h. eine Rückübertragungsmöglichkeit für den Fall, dass der Forderungsbestand im Zuge von Forderungstilgungen einen Umfang unterschreitet, der die Wirtschaftlichkeit des SPVs in Frage stellt, sieht das IDW dagegen nicht als hinderlich an. Vgl. IDW (2002), Stellungnahme zur Rechnungslegung: ABS, S. 1153.

<sup>130</sup> Vgl. C. Hultsch (2000), Wirtschaftliche Zurechnung von Forderungen, S. 2129 f. Vgl. auch Fn. 127. Bei einer wörtlichen Anwendung des § 246 HGB erweist sich jedoch als problematisch, dass sich die Zweckgesellschaft im Rahmen von Asset-Securitisations primär aus der Verwertung der Forderung befriedigt. Eine vereinbarte Rückübertragung erfolgt lediglich bei Untauglichkeit der Forderung zur Befriedigung des SPVs. Folglich ist, anders als beim typischen Darlehen, wo die Verwertung des Sicherungsguts lediglich den Ausnahmefall darstellt, nicht nur von einer Abtretung sicherungshalber, sondern auch erfüllungshalber auszugehen. Zur Abgrenzung des Begriffs „erfüllungshalber“ siehe H.-J. Lwowski (2000), Kreditsicherung, S. 38. Daraus wird zuweilen geschlussfolgert, dass § 246 HGB nicht anwendbar

Das IDW sieht es zudem als wesentlich an, dass das Ausfallrisiko<sup>131</sup> vollständig auf den Erwerber der Forderungen übergeht.<sup>132</sup> Hieran mangelt es u. a. dann, wenn der Originator eine First Loss-Verpflichtung eingeht, wonach dieser als Garantiegeber für Ausfälle bis zu einer bestimmten Höhe auftritt, wenn der Originator am Eigenkapital der Zweckgesellschaft beteiligt ist, womit dieser auch ohne besondere Vereinbarung von den Ausfallrisiken betroffen ist und wenn der Originator von der Zweckgesellschaft emittierte Schuldtitel zu nicht unwesentlichen Teilen übernimmt.<sup>133</sup>

Abgesehen von Aspekten der Beteiligung des Originators an der Zweckgesellschaft, knüpft das IDW auch Bedingungen an die Gestaltung des Verkaufspreises bzw. den vereinbarten Preisabschlag<sup>134</sup> gegenüber den Nenn- oder Buchwerten für das übernommene Ausfallrisiko. Damit soll verhindert werden, dass Teile des Ausfallrisikos verdeckt<sup>135</sup> durch die Preisgestaltung nach wie vor von dem Originator getragen werden.<sup>136</sup> Grundsätzlich gilt, dass der Verkaufspreis, respektive der Preisabschlag bei Vertragsabschluss, endgültig sein muss. Ist der Preisabschlag von der Performance des Forderungspools während der Transaktion abhängig, gilt das wirtschaftliche Eigentum insbesondere nur dann als übergegan-

---

sei. Zudem sei ein dauerhafter Ausschluss der Einwirkung des Sicherungsnehmers durch den Sicherungsgeber nicht mehr möglich. Lediglich bei fehlgeschlagener Verwertung kann ein Rückübertragungsanspruch abgeleitet werden. Vgl. C. Hultsch (2000), Wirtschaftliche Zurechnung von Forderungen, S. 2131. Da dieser Anspruch auf einen Vermögensgegenstand gerichtet ist, der wirtschaftlich wertlos sein kann, aufgrund positiver Wiedergewinnungsraten aber nicht wertlos sein muss, kann hier einer Zuordnung des wirtschaftlichen Eigentums zur Zweckgesellschaft nicht vorbehaltlos gefolgt werden.

<sup>131</sup> Das IDW bedient sich in der Stellungnahme zur Rechnungslegung des Begriffs des „Bonitätsrisikos“. Inhaltlich wird dabei jedoch auf das Ausfallrisiko nach der hier verwendeten Begriffsdefinition abgestellt. Vgl. auch Fn. 53.

<sup>132</sup> Eine abweichende Ansicht vertritt P. Rist (2003), Forderungsverkäufe, S. 388 f. Sie argumentiert, dass die Übernahme des Ausfallrisikos wirtschaftlich eine Versicherungsleistung darstellt. Das IDW selbst befindet, dass die Übernahme des Ausfallrisikos durch einen Dritten im Rahmen eines Forderungsverkaufs (z. B. per Kreditversicherung) nicht zu einem Eigentumsübergang im wirtschaftlichen Sinne führt. Vgl. IDW (2002), Stellungnahme zur Rechnungslegung: ABS, S. 1152. RIST sieht darin eine inkonsequente Vorgehensweise bei der bilanziellen Behandlung von Forderungsabtretungen einerseits und Ausfallrisikoversicherungen andererseits und stellt vielmehr die Finanzierungsfunktion (Betrachtung des „normalen Verlaufs der Dinge“ anstelle des Störfalls) in den Vordergrund der Betrachtung. Vgl. ebenda, S. 389 f. G. Dreyer, H. Schmid und O. Kronrat (2003), Bilanzbefreiende Wirkung von ABS, S. 94-96 befürworten das Abstellen auf die Verfügungsbefugnis.

<sup>133</sup> Für eine Auflistung hindernder Vereinbarungen bei der Übertragung des Bonitätsrisikos aus handelsrechtlicher Sicht des IDW siehe IDW (2002), Stellungnahme zur Rechnungslegung: ABS, S. 1153 f.

<sup>134</sup> Das IDW spricht von einem Abschlag für das Bonitätsrisiko. Dabei führt das IDW nicht aus, worauf ein solcher Abschlag bezogen wird. Theoretisch kann nur eine sonst mit identischen Merkmalen ausgestattete „risikofreie“ Geldanlage gemeint sein. In Betracht kommen dabei insbesondere Papiere des Bundes.

<sup>135</sup> Eine verdeckte Zurückbehaltung des Ausfallrisikos sieht das IDW insbesondere dann, wenn das SPV und der Originator die Einrichtung eines Reserve- oder Garantiekontos vereinbaren auf das überhöhte Kaufpreisabschläge einbezahlt werden. Treten Kreditausfälle ein, kann das SPV das Reservekonto entsprechend belasten. Sofern am Ende der Transaktion das Reservekonto einen positiven Saldo aufweist, wird dieser dem Originator erstattet. Damit trägt der Originator stets die Ausfallrisiken.

<sup>136</sup> Eine Auflistung von Vertragsklauseln, die einem vollständigen Ausfallrisikoubergang entgegenstehen, findet sich in IDW (2002), Stellungnahme zur Rechnungslegung: ABS, S. 1153-1156. Siehe auch die Diskussionen in K.-D. Findeisen (1998), ABS nach US-GAAP und HGB, S. 485-488 und W. Küppers und C. Brause (1998), ABS, S. 419.

gen, wenn dieser sich an den historisch tatsächlich realisierten Forderungsausfällen orientiert. Neben dem Kaufpreisabschlag sind auch zusätzliche Vereinbarungen wie Liquiditätsfazilitäten oder Serviceleistungen in die Prüfung mit einzubeziehen. Liquiditätslinien sind für den Übergang des wirtschaftlichen Eigentums unschädlich, solange diese ausschließlich der Liquiditätssicherung der Zweckgesellschaft dienen.

Die bilanzielle Ausbuchung des Forderungspools könnte durch die Konzernrechnungslegung konterkariert werden. Ggf. hat der Originator das SPV im Rahmen des Konzernabschlusses zu konsolidieren. Der Forderungspool würde in der Konzernbilanz erscheinen, womit das Ziel verbesserter Kapitalstrukturkennzahlen zumindest auf der Ebene des Konzerns verfehlt wäre. Zur Konsolidierung sind sowohl die deutschen Rechnungslegungsstandards als auch die International Accounting Standards (IAS) bzw. die International Financial Reporting Standards (IFRS) heranzuziehen.

Nach Art. 4 der Verordnung (EG) Nr. 1606/2002 des EUROPÄISCHEN PARLAMENTS und des RATES vom 19.6.2002 (IAS/IFRS-Verordnung) müssen europäische konzernrechnungslegungspflichtige, kapitalmarktorientierte Unternehmen für Geschäftsjahre, beginnend ab dem 1.1.2005<sup>137</sup>, ihre Konzernabschlüsse nach den in das EU-Recht übernommenen IAS/IFRS anstelle der nationalen Rechnungslegungsvorschriften vorlegen.<sup>138</sup> Problematisch ist, dass die IAS/IFRS-Verordnung zwar den Begriff der Kapitalmarktorientierung<sup>139</sup> klärt, aber nicht regelt, welche Unternehmen der Konzernrechnungslegungspflicht unterliegen.<sup>140</sup> Speziell bleibt ungeklärt, ob die Pflicht zur Aufstellung eines Konzernabschlusses aus den IAS/IFRS oder aus den jeweiligen nationalen Rechnungslegungsvorschriften abzuleiten ist. Der deutsche Gesetzgeber schlussfolgert daraus, dass die Konzernrechnungslegungspflicht „weiterhin nach den einzelstaatlichen Vorschriften zur Umsetzung der EG-Konzernbilanzrichtlinie 83/349/EWG, also [im Fall der deutschen Rechnungslegungsvorschriften] den §§ 290-293 HGB“<sup>141</sup> zu prüfen ist und kodifiziert dies als eine Ergänzung zur IAS/IFRS-Verordnung in § 315a HGB. Für Kredit- und Finanzdienstleistungsinstitute sind ergänzend die Vorschriften des § 340i zu beachten.<sup>142</sup> Die Anwendung der §§ 290-292

---

<sup>137</sup> Für bestimmte Unternehmen gilt eine Übergangsfrist bis zum 01.01.2007. Vgl. Art. 9 der IAS/IFRS-Verordnung.

<sup>138</sup> Die Verordnung (EG) 1606/2002 des EUROPÄISCHEN PARLAMENTS und des RATES vom 19. Juli 2002 ist im Amtsblatt der Europäischen Gemeinschaften L 243/1 vom 11.09.2002 veröffentlicht.

<sup>139</sup> Sofern Wertpapiere des fraglichen Unternehmens am Bilanzstichtag in einem beliebigen Mitgliedsstaat zum Handel an einem geregelten Markt zugelassen sind, liegt eine Kapitalmarktorientierung vor. Vgl. Art. 4 der Verordnung (EG) 1606/2002.

<sup>140</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden S. Blaschke und S. Schildbach (2005), Konzernrechnungslegung, S. 310.

<sup>141</sup> Regierung der Bundesrepublik Deutschland (2004), Bilanzrechtsreformgesetzentwurf, S. 34.

<sup>142</sup> Vergleichbare Regelungen existieren für Versicherungsunternehmen und Pensionsfonds. Vgl. § 341j Abs. 1 S. 4 i. V. m. § 315a Abs. 1 HGB.

HGB erfolgt bei Kredit- und Finanzdienstleistungsinstituten gem. § 340i Abs. 1 S. 1 rechtsformunabhängig<sup>143</sup>. Der § 293 HGB zur größenabhängigen Befreiung von der Konzernrechnungslegungspflicht findet gem. §340i Abs. 2 S. 2 HGB keine Anwendung.<sup>144</sup>

Nach § 290 HGB entsteht die Pflicht zur Aufstellung eines Konzernabschlusses mit der Begründung eines Mutter-Tochter-Verhältnisses entweder nach dem Konzept der einheitlichen Leitung (§ 290 Abs. 1 HGB, ökonomisches Konzept) oder dem Control-Konzept (§ 290 Abs. 2 HGB, juristisches Konzept). Voraussetzung für das Vorliegen der einheitlichen Leitung ist eine Beteiligung gem. § 271 Abs. 1 S. 1 HGB des Mutterunternehmens an der Tochter. Eine derartige Beteiligung liegt vor, wenn Anteile der Mutter an der Tochter dazu bestimmt sind, dem Geschäftsbetrieb der Mutter durch die Herstellung einer dauernden Verbindung zur Tochter zu dienen. Im Rahmen von ABS-Transaktionen wird oft das Eigentum der Zweckgesellschaft an eine gemeinnützige Einrichtung (Charitable Trust) übertragen.<sup>145</sup> Der Originator hält keine Anteile und folglich keine Beteiligung i. S. d. § 271 Abs. 1 S. 1 HGB. Wird eine Beteiligung festgestellt, ist der Tatbestand der einheitlichen Leitung zu prüfen. Nach h. M. setzt „die einheitliche Leitung kein Weisungsrecht voraus, sondern ist bereits dann gegeben, wenn [der Originator] die Geschäftspolitik [des SPVs] und sonstige grundsätzliche Fragen der Geschäftsführung aufeinander abstimmt“<sup>146</sup>. Dazu genügt es, die Geschäftspolitik bei Gründung des SPVs im Gesellschaftsvertrag vorwegzunehmen, und somit die Entscheidungsmacht des SPV-Managements dauerhaft zu beschränken (sog. Autopilot).<sup>147</sup> Während des Bestehens des SPVs werden vom Originator keine Leitungsaufgaben übernommen. Problematisch ist, dass nach h. M. die einheitliche Leitung nur bei einem einzigen Unternehmen liegen kann. Dem dürfte entgegenstehen, dass bei Gründung des SPVs sowohl der Originator als auch die Investoren ihre Interessen in den Gesellschaftsvertrag einbringen. Im Ergebnis wird das Konzept der einheitlichen Leitung regelmäßig keine Konzernrechnungslegungspflicht mit Blick auf SPVs auslösen.

---

<sup>143</sup> Da § 315a den erg. Vorschriften für Kapitalgesellschaften zugeordnet wurde, beschränkt sich die Konzernrechnungslegung nach deutschem Recht auch nach IAS/IFRS weiterhin grds. auf (kapitalmarktorientierte) Kapitalgesellschaften. Eine andere Auffassung vertritt das IDW, wonach „– dem Gedanken der IAS-Verordnung folgend – alle Unternehmen unabhängig von ihrer Rechtsform diese Verordnung anwenden [müssen], soweit sie kapitalmarknotiert sind“. Vgl. IDW (2004), Stellungnahme zum Referentenentwurf des BilReG, S. 10. Das IDW räumt jedoch ein, dass weder das BilReG noch die Gesetzesbegründung zum BilReG hinreichend Klarheit schaffen. Für Kredit- und Finanzdienstleistungsinstitute finden die erg. Vorschriften des § 340i Abs. 1 S. 1 und des § 340i Abs. 2 S. 2 HGB Anwendung, wonach die Pflicht zur Aufstellung eines Konzernabschlusses sowohl rechtsform- als auch größenunabhängig zu prüfen ist. Vgl. auch S. Blaschke und S. Schildbach (2005), Konzernrechnungslegung, S. 310 f.

<sup>144</sup> Eine vergleichbare Bestimmung findet sich in § 341j Abs. 1 S. 4 für Versicherungsunternehmen und Pensionsfonds.

<sup>145</sup> Diese Einrichtungen werden auch als verwaiste (Orphan Entity) oder vaterlose (Fatherless Entity) Rechtseinheiten bezeichnet.

<sup>146</sup> H. Adler, W. Düring, K. Schmaltz (1996), Rechnungslegung und Prüfung: Teilband 3, S. 60.

<sup>147</sup> Vgl. R. Schmidbauer (2002), Konsolidierung von SPEs, S. 1016.

Nach dem Control-Konzept in § 290 Abs. 2 HGB entsteht die Pflicht zur Aufstellung eines Konzernabschlusses mit der rechtlichen Möglichkeit der Beherrschung der Tochter durch die Mutter. Der Gesetzgeber sieht die Möglichkeit der Beherrschung der Tochter als gegeben, wenn der Mutter die Mehrheit der Stimmrechte zustehen (§ 290 Abs. 2 Nr. 1 HGB), der Mutter das Recht zusteht, die Mehrheit der Mitglieder des Verwaltungs-, Leitungs- oder Aufsichtsorgans zu bestellen oder abzuberufen (§ 290 Abs. 2 Nr. 2 HGB), oder die Mutter das Recht hat, aufgrund eines geschlossenen Beherrschungsvertrages oder einer Satzungsbestimmung einen beherrschenden Einfluss auszuüben (§ 290 Abs. 2 Nr. 3 HGB).<sup>148</sup> Üblicherweise besitzt der Originator einer ABS-Transaktion nur eingeschränkte bzw. keine Stimmrechte am SPV. Auch verzichtet der Originator – um eine Konsolidierung zu vermeiden – auf Rechte gem. § 290 Abs. 2 Nr. 2 HGB und sieht zumeist vom Abschluss eines Beherrschungsvertrages ab.<sup>149</sup>

Sofern gem. §§ 290-293 HGB kein Mutter-Tochter-Verhältnis begründet wird, kann auch keine Konzernrechnungslegungspflicht nach IAS/IFRS entstehen. Das gilt selbst dann, wenn die Anwendung der IAS/IFRS eine Konzernrechnungslegungspflicht vorsehen. Dadurch besteht die Möglichkeit, dass nach derzeitiger Gesetzeslage ein kapitalmarktorientiertes Unternehmen als Initiator mehrerer SPVs nach §§ 290-293 HGB nicht IAS/IFRS-konzernrechnungslegungspflichtig wird, obwohl eine Anwendung der IAS/IFRS u. U. zu einer Konsolidierung sämtlicher SPVs führen würde.<sup>150</sup> Sofern mind. ein Mutter-Tochter-Verhältnis festgestellt wird und Kapitalmarktorientierung vorliegt, fällt das Unternehmen in den Anwendungsbereich des § 315a HGB und ist zur Aufstellung eines IAS/IFRS-Konzernabschlusses verpflichtet. Der Konsolidierungskreis ist dann nach den IAS/IFRS festzustellen. Dies folgt aus dem Wortlaut des § 315a Abs. 1 S. 1, wonach die Regelungen des HGB zur Feststellung des Konsolidierungskreises (§ 394 Abs. 1 mit Verweis auf das Mutter-Tochter-Verhältnis gem. § 290) nicht weiter zu beachten sind. SPVs, die im Rahmen der Prüfung der Konzernrechnungslegungspflicht nach §§ 290-293 HGB keine Tochterunternehmen darstellen, sind nun ggf. nach IAS/IFRS zu konsolidieren.

---

<sup>148</sup> Vgl. H. Adler, W. Düring, K. Schmaltz (1996), Rechnungslegung und Prüfung: Teilband 3, S. 64-74.

<sup>149</sup> Vgl. hierzu auch R. Schmidbauer (2002), Konsolidierung von SPEs, S. 1015. Schmidbauer argumentiert weiter, dass die gesellschaftsrechtliche Ausgestaltung von SPVs ein fiktives Treuhandverhältnis ohne explizite Treuhandabrede begründet. Den (Equity-)Investoren wird kein eigenes unternehmerisches Interesse unterstellt. Das SPV wäre i. S. d. § 290 Abs. 3 S. 1 HGB zu konsolidieren. Voraussetzung ist jedoch, dass die wirtschaftlichen Chancen und Risiken beim Originator verbleiben. Dies führt jedoch dazu, dass der Forderungbestand gar nicht erst aus der Bilanz des Originators ausgebucht werden kann.

<sup>150</sup> Zum gleichen Ergebnis gelangt auch das IDW. Vgl. IDW (2004), Stellungnahme zum Referentenentwurf des BilReG, S. 10 f. Das IDW regt an, den § 290 HGB an die Regelungen der IAS/IFRS anzupassen. Geschehen könnte dies im Rahmen des Bilanzrechtsmodernisierungsgesetzes (BilMoG). Anhaltspunkte für die Ausgestaltung des neuen Gesetzestextes könnte mit Blick auf die Konsolidierung von SPVs die Formulierung des SIC 12.8 liefern.

### 2223 SPVs als Instrument zur Separation von Einzelrisiken aus dem Referenzportfolio

Synthetische Konstruktionen dienen nicht zur Beschaffung finanzieller Mittel auf der Basis der Qualität eines zusammengestellten Forderungspools. Insofern kann es nicht die Funktion der Zweckgesellschaft sein, Forderungen rechtlich zu verselbständigen und von Zahlungsansprüchen Dritter im Falle einer Insolvenz des Originators zu isolieren. Synthetische Konstruktionen separieren vielmehr regelmäßig Einzelrisiken aus dem Forderungspool und übertragen diese an dritte Parteien. Zur Separation von Kreditrisiken kommen dabei Kreditderivate zum Einsatz.<sup>151</sup> Fraglich bleibt dabei die Funktion des SPVs.

Die Separation des Kreditrisikos könnte ausschließlich auf der Basis von Kreditderivaten durchgeführt werden. Eine Emission von schuldrechtlichen CDOs fände nicht statt (fully unfunded transaction).<sup>152</sup> Werden CDS verwendet, weisen diese im Zeitpunkt des Abschlusses bei fairer Konditionenbildung einen Barwert von null auf. Es bestünde keine Möglichkeit für Versicherungen, Fonds, öffentliche Stellen oder andere potentielle Investoren liquide Mittel in CDO-typische Risk-Return-Profile zu investieren.<sup>153</sup> Werden CLNs (ohne SPV) verwendet, unterliegen diese dem Ausfallrisiko des Originators.

Mit dem Ziel, CDOs über ein SPV zu emittieren, kann der Originator mit Hilfe von CDS das Ausfallrisiko des Forderungspools (Referenzportfolio) an das SPV übertragen. Das SPV sichert dem Originator Ausgleichszahlungen bei Eintritt von Ausfallereignissen im Referenzportfolio zu und erhält dafür vom Originator eine Risikoprämie. Als Sicherheit für potentielle Ausgleichszahlungen dient dem SPV der Emissionserlös der CDOs (fully funded transaction). Die Emissionserlöse werden in kreditrisikofreie Anlagen am Geld- und Kapitalmarkt investiert und dienen zugleich als Sicherheit für die Tilgung der CDOs. Die risikofreien Geldanlagen des SPVs sind frei von Zahlungsansprüchen Dritter und dienen insbesondere nicht der Befriedigung von Gläubigern des Originators im Falle von dessen Insolvenz (*Bankruptcy-remoteness mit Blick auf den Originator*). Die Tilgung der CDOs ist durch eine mögliche Insolvenz des Originators nicht in Gefahr. Der Originator hat lediglich im Rahmen des abgeschlossenen CDS Anspruch auf Befriedigung aus dem Vermögen des SPVs zu Lasten der CDO-Anleger. Damit unterliegt die Tilgung der CDOs, ähnlich wie beim True Sale, ausschließlich dem Kreditrisiko des Referenzportfolios.

---

<sup>151</sup> Vgl. die Ausführungen in Abschnitt 212.

<sup>152</sup> Vgl. S. Bund et al. (2001), Synthetic securitisation, S. 3 f.

<sup>153</sup> Gegenüberstellungen von Return-Profilen von Bonds und weitgehend risikoäquivalenten CDOs finden sich in L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 271-286 (Chapter 12). Dabei hängt die Performance von Bonds im Vergleich zu (Mezzanine) CDOs wesentlich vom unterstellten Default-Szenario ab.

Fraglich ist, inwieweit die Zinszahlungen an die CDO-Anleger von einer möglichen Insolvenz des Originators unberührt bleiben. Bei einer Insolvenz des Originators wären die Risikoprämienzahlungen aus dem CDS in Gefahr. Die CDS-Risikoprämienzahlungen dienen zusammen mit den Zinseinnahmen aus den risikofreien Anlagen des SPVs der Bedienung der Zinsansprüche der CDO-Anleger, wobei der ausfallrisikovergütende Teil der CDO-Zinszahlungen (über die Laufzeit der Transaktion hinweg) durch die CDS-Prämienzahlungen finanziert wird.<sup>154</sup> Da das SPV mit dem Ausbleiben der CDS-Risikoprämienzahlungen von möglichen Kompensationszahlungen befreit ist, könnte die Transaktion mit den (verbleibenden) CDO-Nominalbeträgen als risikofreie Anlage aufgefasst werden. Zum selben Ergebnis gelangt man, wenn die Transaktion sofort liquidiert wird und die CDO-Anleger die (verbliebenen) Nominalbeträge durch die Verwertung der risikofreien Anlagen des SPVs zur eigenständigen risikofreien Geldanlage zurückerhalten. Die Anleger würden dabei die vereinbarten Risikoprämien verlieren.

Alternativ könnte das SPV den ausgefallenen CDS durch einen Neuabschluss mit einer dritten Partei ersetzen. Zu beachten wäre jedoch, dass ein Neuabschluss nicht notwendigerweise zu identischen Konditionen, d. h. mit identischer Risikoprämie, möglich ist. Soll die Risikoprämie ungeachtet der aktuellen Markteinschätzung unverändert bleiben, wird der CDS keinen Barwert von null aufweisen. Aus der Sicht des SPVs kann der Barwert positiv oder negativ sein. Ist der Barwert positiv, würde die dritte Partei eine entsprechende Ausgleichszahlung vom SPV fordern. Das SPV unterliegt damit einem sog. Eindeckungsrisiko.<sup>155</sup> Das Eindeckungsrisiko ist in den CDS-Konditionen zu berücksichtigen.<sup>156</sup> Das Entgelt ist an die CDO-Anleger weiterzugeben. Damit werden die CDO-Anleger für eine mögliche frühzeitige Liquidation der Transaktion entschädigt.

In der Praxis wird zumeist nur ein Teil der Transaktion durch CDOs verbrieft. Üblicherweise werden dazu mehrere CDS mit einer nach dem Prinzip der Subordination gestaffelten Verlustkompensation abgeschlossen. Dabei tritt lediglich im Rahmen des Mezzanine-CDS zum Zwecke der Emission von CDOs ein SPV als Sicherungsgeber auf (partially

---

<sup>154</sup> Zur Höhe und zur zeitlichen Struktur der CDS-Risikoprämienzahlungen auf der einen Seite und der CDO-Risikoprämienzahlungen auf der anderen Seite sowie zu damit verbundenen Fragestellungen siehe die Ausführungen in Abschnitt 5241. Das wesentliche Ergebnis ist, dass i. d. R. die eingehenden und ausgehenden Risikoprämienzahlungen lediglich in der Erwartung über die Laufzeit der Transaktion hinweg einander entsprechen. In einem einzelnen Zeitpunkt bestehen betragsmäßige Unterschiede.

<sup>155</sup> Vgl. zum Eindeckungsrisiko Fn. 53.

<sup>156</sup> Zur modelltheoretischen Berücksichtigung des Eindeckungsrisikos bei ausfallrisikobehafteten Swaps siehe D. Duffie und M. Huang (1996), Swap rates and credit quality, S. 923-930.

funded transaction).<sup>157</sup> Zudem wird aus regulatorischen Gründen in der Praxis häufig eine OECD-Bank mit einem Back-to-Back Swap zwischen den Originator und das SPV geschaltet.<sup>158</sup> Sofern die OECD-Bank eine erstklassige Bonität (ggf. durch Staatsgarantien) aufweist, ist das Eindeckungsrisiko des SPVs vernachlässigbar gering.

### **223 Refinanzierung der Zweckgesellschaft durch die Emission von CDOs**

CDOs verbriefen schuldrechtliche Ansprüche gegenüber der Zweckgesellschaft und unterliegen damit dem Pay-Through-Konzept.<sup>159</sup> Wesensbestimmendes Merkmal des Pay-Through-Konzepts ist neben dem schuldrechtlichen Anspruch die betragsmäßige und zeitliche Umstrukturierung der Zahlungsströme des SPVs im Rahmen eines internen Cash-Managements.<sup>160</sup> Besonders deutlich wird das Prinzip der Umstrukturierung bei synthetischen Transaktionen. Das SPV erhält Einzahlungen in Form von Credit Fees aus abgeschlossenen CDS-Kontrakten und in Form von Zinsen aus dem risikofreien Kollateral. Das SPV finanziert damit die Auszahlungen an die CDO-Investoren zu den vertraglich vereinbarten CDO-Zinszahlungsterminen. Zeitliche Umstrukturierungen bergen jedoch Zinsänderungsrisiken. Synthetische Strukturierungen erlauben es, die CDS und die CDOs so abzuschließen, dass die Termine der Einzahlungen genau mit den Terminen der Auszahlungen übereinstimmen. Zwischenzeitliche Anlagen der Credit Fees sind nicht nötig. Es bleibt die betragsmäßige Umstrukturierung der Zahlungen nach Maßgabe der Tranchenstärke und der Tranchen seniorität.

Die CDOs können nach dem Prinzip der zunehmenden Nachrangigkeit (Subordination) in mehrere Tranchen aufgeteilt werden. Verluste aus dem Forderungspool werden zuerst von den Investoren der untersten Tranche getragen. Bei klassischen CDO-Transaktionen stellt die unterste Tranche kein Fremdkapital, sondern Eigenkapital dar. Das Volumen der sog. Equity-Tranche beträgt regelmäßig ca. 5 % des Portfolionominalvolumens und dient den CDO-Investoren als *Credit Enhancement*.<sup>161</sup> Die Equity-Investoren partizipieren erst dann an den Zins- und Tilgungszahlungen des Forderungspools, nachdem die CDO-Investoren entsprechend ihrer Seniorität bedient worden sind. Die Zuordnung von Zahlungen zu den

---

<sup>157</sup> Vgl. L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 206-208. Vgl. auch die Transaktionsstruktur in Abb. 2-6.

<sup>158</sup> Vgl. S. Jortzik und B. Müller (2002), Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate, S. 21-24; L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 203 f.

<sup>159</sup> Vom Pay-Through-Konzept ist das Pass-Through-Konzept abzugrenzen, bei dem es im Rahmen von Miteigentumsrechten zur unveränderten Durchleitung von Zahlungen zu den Investoren nach Maßgabe der Miteigentumsanteile kommt. Das Pass-Through-Konzept ist für CDOs nicht relevant und soll nicht weiter diskutiert werden. Vgl. bspw. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 130 (Abb. 4/6) u. S. 130-138.

<sup>160</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 130 (Abb. 4/6) u. S. 138 f.

<sup>161</sup> Vgl. L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 35 f. Eine detaillierte Diskussion der Equity-Tranche findet sich ebenda, S. 287-315 (Chapter 13).

einzelnen Tranchen wird als *Waterfall* der Transaktion bezeichnet. Der Waterfall beinhaltet sog. *Coverage Tests* zur Überprüfung der Credit Enhancements, die zum Schutz der CDO-Investoren Tranche für Tranche durchgeführt werden müssen. Besteht eine Tranche die Coverage Tests nicht, werden die Cash Flows „umgeleitet“ und zunächst zur (frühzeitigen) Tilgung vorrangiger Tranchen verwendet. Der Waterfall mit den zugehörigen Coverage Tests ist ein wichtiges Element der Transaktionsstruktur, das bei der Beurteilung des Risikogehalts einer Investition in die CDOs stets zu berücksichtigen ist.<sup>162</sup> Bei synthetischen Transaktionen dagegen werden die Zahlungen an die CDO-Investoren nicht aus den Zins- und Tilgungszahlungen des kreditrisikobehafteten Forderungspools gespeist. Coverage Tests im Rahmen des Waterfalls sind wenig sinnvoll. Die Zahlungen an die CDO-Investoren richten sich unmittelbar nach den Ausfallereignissen sowie den daraus resultierenden Verlusten des mit Hilfe von Kreditderivaten gesicherten Referenzportfolios. Abschreibungen der CDO-Nominalbeträge können direkt den Verpflichtungen zu Kompensationszahlungen aus den Kreditderivaten zugeordnet werden. Die Beurteilung des Risikogehalts einer Investition in die CDOs kann demzufolge ausschließlich<sup>163</sup> auf der Basis der Verlustverteilung des Referenzportfolios erfolgen.<sup>164</sup> Daher ist der Modellierung der Verlustverteilung des Referenzportfolios besondere Aufmerksamkeit zu widmen.<sup>165</sup> Darüber hinaus kommen synthetische Transaktionen fast vollständig ohne Eigenkapital aus. Die Höhe des Eigenkapitals bestimmt sich nicht nach Maßgabe einer notwendigen Besicherung der CDO-Investoren, sondern richtet sich nach rechtlichen Bestimmungen zur Errichtung der Zweckgesellschaft und Emission der CDOs.<sup>166</sup> Von einer Equity-Tranche kann kaum gesprochen werden. Die unterste Tranche ist bei synthetischen Transaktionen häufig durch einen Credit Default Swap gesichert (partially funded transaction) und wird, der Tatsache Rechnung tragend, dass sie zuerst von Verlusten des Referenzportfolios betroffen ist, als First Loss Piece (FLP) bezeichnet.

Die CDOs werden ihrer Seniorität entsprechend mit unterschiedlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten<sup>167</sup> am Kapitalmarkt platziert. Jede Tranche erhält eine eigene Wertpapierkenn-

---

<sup>162</sup> Ein Beispiel für einen Transaktionswaterfall und eine Betrachtung der Coverage Tests findet sich in L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 16-21.

<sup>163</sup> Anstelle der Coverage Tests treten oft Trigger-Events, die zur frühzeitigen Beendigung der Transaktion führen. Diese Trigger können durch die Verlustverteilung des Referenzportfolios nicht erfasst werden.

<sup>164</sup> Ein Vergleich des Waterfalls klassischer und synthetischer Transaktionen findet sich in J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 136-140. Auch TAVAKOLI kommt zu dem Schluss, dass synthetische Strukturen einfacher zu modellieren sind.

<sup>165</sup> Vgl. zur theoretischen Konzeption Kapitel 3 und zur transaktionsbezogenen Anwendung Kapitel 4.

<sup>166</sup> Soll bspw. das SPV in Irland als Public Limited Company errichtet und die CDOs an der IRISH STOCK EXCHANGE als eine der größten europäischen Börsen für ABS gelistet werden, sind mind. (ca.) 10.000 EUR als Eigenkapital einzubezahlen. Vgl. Arthur Cox (2005), Establishing SPVs in Ireland, S. 4.

<sup>167</sup> Vgl. hierzu ausführlich Abschnitt 51.

nummer und wird durch mind. eine namhafte Ratingagentur mit einem Bonitätsrating versehen. Das Rating der einzelnen CDO-Tranchen schafft potentiellen Investoren gegenüber mit Blick auf die äußerst komplexen rechtlichen und finanzwirtschaftlichen Strukturen von CDO-Transaktionen ein Mindestmaß an Transparenz.<sup>168</sup> Der Gesamtbetrag einer Tranche wird zur Emission mit Blick auf private Investoren und Kleinanleger in Analogie zur herkömmlichen Anleihe gestückelt und in Teilschuldverschreibungen verbrieft. Den Teilschuldverschreibungen einer Tranche werden die Verluste pari passu zugeordnet.

Die Subordination stellt für synthetische Transaktionen die bedeutendste Credit-Enhancement-Technik dar. Sie dient der Abstimmung der Verbriefungsziele des Originators mit den Anlagezielen der Investoren. CDOs mit Investment-Grade-Ratings werden vorrangig von Versicherungs-, Asset-Management- und Fondsgesellschaften gekauft.<sup>169</sup> Nachrangige Tranchen werden oft von den Originatoren einbehalten. Eine dritte Partei würde mit Blick auf Informationsasymmetrien bzgl. der Qualität des Forderungspools eine verhältnismäßig hohe Risikoprämie für die Risikoübernahme fordern.<sup>170</sup> Zur Gestaltung der Risikoprämien nach den Bedürfnissen der Investoren kommen weitere Credit Enhancement-Techniken zum Einsatz.<sup>171</sup> Speziell zur Veräußerung des FLPs an Dritte wurden in jüngerer Vergangenheit des Öfteren begrenzte Zinsunterbeteiligungen verwendet.<sup>172</sup> Als Investoren traten dabei auf FLP-Tranchen spezialisierte Banken und sonstige Institutionen auf.<sup>173</sup>

Grundsätzlich dienen Credit Enhancements zur Deckung von Ausfallrisiken oder zur Überbrückung von Liquiditätsengpässen.<sup>174</sup> Unterschieden werden können die einzelnen Credit Enhancement-Techniken wie folgt:<sup>175</sup>

- (1) Credit Enhancement durch die Transaktionsstruktur,
- (2) Credit Enhancement durch den Originator,
- (3) Credit Enhancement durch Dritte.

---

<sup>168</sup> Zum Rating von ABS siehe H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 231-255. Im Vordergrund stehen dabei jedoch klassische ABS-Transaktionen.

<sup>169</sup> Vgl. zum Investorenkreis PWC (2004), Verbriefungen in Luxemburg, S. 5; O. Cousseran und I. Rahmouni (2005), The CDO market, S. 52 f.

<sup>170</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden S. Langner (2002), ABS, S. 661.

<sup>171</sup> In der Literatur wird zuweilen der Eindruck vermittelt, dass Credit Enhancement-Techniken die Risikoprämien senken. In einer fair bewerteten Transaktion kann es aber nur um Verteilungswirkungen gehen.

<sup>172</sup> Vgl. Abschnitt 234.

<sup>173</sup> Bspw. tritt der EUROPEAN INVESTMENT FUND (EIF) des Öfteren als FLP-Investor in europäischen SME ABS-Transaktionen auf.

<sup>174</sup> Genauer wäre von Credit- und Liquidity-Enhancements zu sprechen. Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 207.

<sup>175</sup> Vgl. S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 38-44. Alternativ wird oft zwischen externen und internen Credit Enhancement-Techniken unterschieden. Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 207-220.

Die Subordination ist eine Technik der ersten Kategorie. Dieser Kategorie werden zudem das Prinzip der Overcollateralisation und die Spread Accounts zugeordnet. Das Prinzip der Overcollateralisation<sup>176</sup> ist nur bei True Sale-Transaktionen relevant und beinhaltet, dass die abgetretenen Forderungen zusammen ein höheres Nominalvolumen aufweisen als die emittierten Wertschriften. Damit soll sichergestellt werden, dass der Cash Flow des Forderungspools bei Kreditausfällen kleineren Umfangs ausreicht, um die Zins- und Tilgungszahlungen an die Investoren leisten zu können. Der Originator erhält für die überschüssig abgetretenen Forderungen keinen Kaufpreis. Vielmehr wird der Gegenwert auf einem Reserve- oder Garantiekonto gutgeschrieben, das im Falle von Kreditausfällen durch das SPV belastet werden kann. Nicht benötigte Überschüsse stehen am Ende der Transaktion dem Originator zu. Damit behält der Originator einen Teil des Ausfallrisikos.<sup>177</sup>

Für synthetische Transaktionen sind Spread Accounts bedeutsam. Auf Spread Accounts fließen positive Überschüsse (engl.: Spreads) aus den CDS Credit Fees, den Zinseinzahlungen aus dem risikofreien Kollateral und den Zinsauszahlungen an die CDO-Investoren.<sup>178</sup> Überschüsse werden akkumuliert und dienen zur Deckung von Kompensationszahlungen und zur Überbrückung von Liquiditätsengpässen. Ein verbleibender Betrag am Ende der Transaktion steht den Eigenkapitalgebern zu. Voraussetzung ist jedoch, dass tatsächlich Überschüsse erwirtschaftet werden. Dies wird in der Literatur stets unkritisch unterstellt.<sup>179</sup> Die modelltheoretischen Betrachtungen in den folgenden Kapiteln zeigen dagegen, dass bei fairer Kalkulation der Risikoprämien gerade zu frühen Zeitpunkten einer Transaktion nicht mit positiven Überschüssen zu rechnen ist. Ursache ist die Art und Weise, mit der Kreditausfälle im Referenzportfolio auf die Entwicklung der Höhe der Risikoprämienzahlungen der Kreditderivate einerseits und der CDOs andererseits wirken.<sup>180</sup>

Formen des Credit Enhancements durch den Originator und durch Dritte sind u. a. Garantien, Patronatserklärungen, Cash Collateral Accounts und Akkreditive.<sup>181</sup>

---

<sup>176</sup> Vgl. H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 211 f.; L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 88.

<sup>177</sup> Eine Alternative stellt die Discount-Lösung dar. Dabei werden im Rahmen der Bewertung der Forderungen vor dem Verkauf Aufschläge auf den Kalkulationszinssatz vorgenommen. Die resultierenden Kaufpreisabschläge können wiederum einem Reserve- oder Garantiekonto gutgeschrieben werden. Eine kritische Stellungnahme zu Kaufpreisabschlägen aus bilanzieller Sicht findet sich in IDW (2002), Stellungnahme zur Rechnungslegung: ABS, S. 1154-1156.

<sup>178</sup> Vgl. S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 41. Siehe auch die beispielhafte Betrachtung in J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 139.

<sup>179</sup> Vgl. die angegebene Literatur in Fn. 178. Siehe auch die Zahlenbeispiele in L. Goodman und F. Fabozzi (2002), Structures and analysis of CDOs, S. 3-7, 235-256 u. 287-315.

<sup>180</sup> Vgl. ausführlich die Ausführungen in Abschnitt 5241.

<sup>181</sup> Vgl. S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 4138-44; H. Bär (1997), Asset securitisation, S. 216-220.

## 224 Überblick über weitere CDO-Transaktionselemente und -beteiligte

Neben den unmittelbar an der Transaktion beteiligten Parteien, d. h. dem Originator, dem SPV und den Anlegern/Investoren, ist eine Vielzahl weiterer Parteien am Erfolg einer CDO-Transaktion beteiligt.<sup>182</sup> Diese als Servicedienstleister zusammengefassten Parteien sollen zum Zwecke der Vollständigkeit überblicksartig dargestellt werden.

Aufgabe des *Servicers* ist das Betreiben des Mahn- und Inkassowesens, respektive die Verwaltung des Forderungspools nach Abschluss der Transaktion. Im Fall einer synthetischen Transaktion verbleibt das Servicing beim Originator. Bei True Sale-Transaktionen wäre das SPV selbst für das Servicing verantwortlich, überträgt diese Aufgabe jedoch regelmäßig – insbesondere dann, wenn die Abtretung still erfolgt ist – im Rahmen eines Geschäftsbesorgungsvertrags an den Originator. Liegen der Transaktion sog. non-performing Loans zugrunde, greifen Originatoren häufig auf spezialisierte Service Agents zurück. Für ihre Dienstleistung erhalten sie eine Servicing-Fee.

Aufgabe des *Treuhänders* ist die Abwicklung und Überprüfung der Transaktionszahlungsströme. Der Treuhänder wird zwischen den Originator/Service Agent, das SPV und die Anleger/Investoren geschaltet und handelt im Interesse der Anleger/Investoren. Im Fall der Insolvenz des Originators oder des SPVs obliegt dem Treuhänder die Aufgabe der Verwertung der gestellten Sicherheiten.

Aufgabe der *Investmentbanken* ist die Vermarktung und ggf. die vorherige Übernahme der CDOs. Sie unterstützen den Originator bei der Portfoliozusammenstellung und der Strukturierung der Transaktion.

Aufgabe der *Ratingagenturen* ist die Bonitätsprüfung der CDO-Transaktion. Sie schätzen die erwartete Performance des Referenzportfolios sowie die Ausfallrisiken anhand historischer und aktueller Informationen ab. Die Ratingagenturen wirken beratend auf die Festlegung der Credit Enhancement Levels ein, so dass die gewünschten Ratings der zu emittierenden CDOs vergeben werden können. Begutachtet wird ebenfalls die Abwicklungsfähigkeit der Transaktion. Dazu wird neben dem Referenzportfolio auch die rechtliche Ausgestaltung einer Transaktion geprüft. Ein Rating der einzelnen CDO-Tranchen durch ein oder zwei der namhaften Ratingagenturen schafft gegenüber potentiellen Investoren mit Blick auf die äußerst komplexen rechtlichen und finanzwirtschaftlichen Strukturen derartiger Transaktionen ein Mindestmaß an Transparenz. Das Rating wird damit zum entscheidenden

---

<sup>182</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden S. Langner (2002), ABS, S. 657-665; PWC (2004), Verbriefungen in Luxemburg, S. 6 f.; S. Bund (2000), Asset Securitisation, S. 15-34.

den Kriterium für die Anlageentscheidung der Investoren. Häufig sind Investoren wie Versicherungen und Fonds aufgrund gesetzlicher Bestimmungen oder aufsichtsrechtlicher bzw. interner Vorgaben gehalten, nur in Emissionen mit mind. einem Rating von einer bekannten Ratingagentur von bestimmter Mindestqualität (z. B. Investment-Grade) zu investieren.<sup>183</sup> Darüber hinaus hat das Rating als Indikator für das Kreditrisiko der CDOs maßgeblichen Einfluss auf die zu zahlenden Risikoprämien. Werden CDOs im Rahmen von True Sale-Transaktionen zu Finanzierungszwecken verwendet, bestimmt letztlich das Rating über die Finanzierungskosten.

Aufgabe der *Tax, Accounting und Legal Advisors* ist die Beratung des Originators hinsichtlich der steuerlichen Wirkung der geplanten Transaktionsstruktur, der Aspekte der Rechnungslegung sowie der rechtlichen Ausgestaltung der Transaktion. Ggf. sind Rechtsgutachten bzgl. der Insolvenzferne des SPVs vom Originator und der Wirkung der Forderungsübertragung im Rahmen von True Sale-Transaktionen zu erstellen. Darüber hinaus sind die Vertragsunterlagen sowie das Information Memorandum zur Emission der CDOs vorzubereiten.

Aufgabe des *Paying Agents* ist die Auszahlung der Tilgungs- und Zinsdienste an die Anleger. Üblicherweise übernehmen Banken die Funktion eines Paying Agents.

Aufgabe eines *Credit Enhancement Providers* ist die Sicherung der Tilgungs- und Zinsdienste an die Anleger durch Garantien, Ausfallbürgschaften, Patronatserklärungen, Akkreditive und Credit Default Swaps. Üblicherweise nehmen dritte Parteien wie Versicherungsgesellschaften die Funktion von Credit Enhancement Providern wahr. Gefragt sind Parteien von exzellenter Bonität, um das Gegenparteirisiko so gering wie möglich zu halten. Teilweise übernimmt auch der Originator diese Aufgabe durch die Übernahme des First-Loss-Piece (FLP), um eine hohe Risikoprämie für die Übernahme des FLPs durch einen Dritten zu vermeiden.<sup>184</sup> Alternativ kann der Originator ein Reserve- bzw. Garantiekonto anlegen. Treten Kreditausfälle ein, kann das SPV das Reservekonto entsprechend belasten. Sofern am Ende der Transaktion das Reservekonto einen positiven Saldo aufweist, wird dieser dem Originator zugeteilt. Übernimmt der Originator die Funktion eines Credit Enhancement Providers, können bestimmte Ziele der Transaktion, wie die Bilanzbefreiung im Rahmen von True Sale-Transaktionen oder die Verminderung des zu hinterlegenden regulatorischen Eigenkapitals, konterkariert werden.

---

<sup>183</sup> Vgl. S. Langner (2002), ABS, S. 663 f.

<sup>184</sup> Ein Ausweg kann eine begrenzte Zinsunterbeteiligung sein. Vgl. Abschnitt 234.

## 23 Struktur synthetischer CDO-Transaktionen am Beispiel des PROMISE-Programms der KfW

### 231 Zur Motivation des PROMISE-Programms<sup>185</sup>

Im September 2000 kündigte die KREDITANSTALT FÜR WIEDERAUFBAU<sup>186</sup> (KfW) erstmals an, in Zusammenarbeit mit der IKB DEUTSCHE INDUSTRIEBANK<sup>187</sup>, der HYPOVEREINSBANK und der DRESDNER BANK, Kredite an deutsche Mittelstandsunternehmen via synthetische CDO-Strukturen verbrieften und am Kapitalmarkt platzieren zu wollen.<sup>188</sup> Bis zum heutigen Tage wurden mit Hilfe der KfW in mittlerweile 13 Transaktionen Mittelstandskredite mit einem Nominalwertvolumen i. H. v. insgesamt 21,443 Mrd. EUR verbrieft.<sup>189</sup> Im Falle der CARAVELA-Transaktion im Jahre 2004 befanden sich darunter auch Kredite an ausländische mittelständische Unternehmen.

Traditionell vergibt die KfW nach dem Durchleitungsprinzip Förderkredite an kleine und mittelgroße Unternehmen des deutschen Mittelstandes zu besonderen Konditionen.<sup>190</sup> Förderungsfähig sind Unternehmen der gewerblichen Wirtschaft, die sich mehrheitlich in Privatbesitz befinden und deren Jahresumsatz 500 Mio. EUR nicht überschreitet.<sup>191</sup> Dazu kreditiert ein kommerzielles<sup>192</sup> Kreditinstitut im Rahmen der Förderprogramme ein mittelständisches Unternehmen und refinanziert sich anschließend über die KfW.<sup>193</sup> Um die Förderung des deutschen Mittelstandes auch in Zukunft erfolgreich fortsetzen zu können, suchte die KfW nach Wegen, um die Attraktivität des Mittelstandskredits aus der Sicht der deutschen Kreditwirtschaft unter Beibehaltung des Durchleitungsprinzips auch unter schwierigen ökonomischen Rahmenbedingungen aufrecht zu erhalten.<sup>194</sup>

---

<sup>185</sup> Siehe hierzu und im Folgenden H. Krämer-Eis, C. Schneider und C. Tiskens (2001), Die Verbriefung von Mittelstandskrediten durch die KfW.

<sup>186</sup> Die KfW wurde 1948 mit Sitz in Frankfurt gegründet und ist die Förderbank für die deutsche Wirtschaft und Entwicklungsbank für die Entwicklungsländer. Am Grundkapital sind der Bund mit 80 % und die Länder mit 20 % beteiligt.

<sup>187</sup> Die KfW und die IKB arbeiten darüber hinaus eng in den Bereichen der Projektfinanzierung, der Finanzierung durch Unternehmensanleihen sowie der Finanzierung durch Mezzaninekapital zu Gunsten des deutschen Mittelstandes zusammen. Vgl. A. von Tippelskirch (2002), Strategische Allianz für den Mittelstand, S. 110 f.

<sup>188</sup> Vgl. Pressemitteilung der KfW vom 07. September 2000: KfW mandatiert zwei Großbanken für die Verbriefung von Förderkrediten an den Deutschen Mittelstand.

<sup>189</sup> Vgl. Tab. 2-2.

<sup>190</sup> Das KfW-Mittelstandsprogramm ist nur eines unter mehreren Förderprogrammen. Weitere Programme dienen der Förderung des Umweltschutzes, der Wohnraumfinanzierung, der Exportfinanzierung sowie der Entwicklungshilfe. Vgl. WWW: <http://www.kfw.de> (geladen am 10. September 2005).

<sup>191</sup> Siehe hierzu und im Folgenden Merkblatt der KfW vom Februar 2002: Mittelstandsprogramm.

<sup>192</sup> Der Begriff des „kommerziellen Kreditinstituts“ wird in Abgrenzung zur KfW und DtA verwendet.

<sup>193</sup> KfW-Förderungsfinanzierungen werden üblicherweise als Tilgungs- oder Amortisationsdarlehen mit einer Laufzeit von ca. 10 Jahren (max. 20 Jahren) und festen Zinssätzen gewährt. Aktuelle Konditionen finden sich regelmäßig in der Konditionenübersicht der KfW unter WWW: <http://www.kfw-formularsammlung.de/Konditionen/Konditionentabelle1.pdf> (geladen am 22. Oktober 2005).

<sup>194</sup> Vgl. H. Krämer-Eis, C. Schneider und C. Tiskens (2001), Die Verbriefung von Mittelstandskrediten durch die KfW, S. 24.

Das Kreditgeschäft von Banken befindet sich in Deutschland seit Jahren in einer strukturellen Krise.<sup>195</sup> Ein wesentlicher Grund hierfür ist die anhaltende Konjunkturschwäche Deutschlands und das damit einhergehende hohe Niveau der Unternehmensinsolvenzen.<sup>196</sup> Dies sowie die besonderen Herausforderungen der zunehmenden Globalisierung zu Beginn des neuen Jahrtausends haben zu einer Sensibilisierung der Kreditinstitute bezüglich ihrer Risiko-Ertragssituation geführt.<sup>197</sup> Das traditionelle Geschäftsmodell des „Buy and Hold“ wird zunehmend durch ein aktives Portfoliomanagement ersetzt.<sup>198</sup> Klumpenrisiken werden durch Kreditverkäufe beseitigt und Diversifikationseffekte durch Kreditzukaufe erzielt. Die Wandlung des Kreditgeschäfts wird zudem durch die Novellierung der aufsichtsrechtlichen Rahmenbedingungen beschleunigt. Im Juni 2004 veröffentlichte der BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF SICHT (BCBS) nach drei Konsultationsrunden schließlich die NEUE BASLER EIGENKAPITALVERORDNUNG (Basel II).<sup>199</sup> Ziel ist eine erhöhte Stabilität des Finanzsystems durch eine adäquate Unterlegung der Kreditrisiken der Kreditinstitute mit regulatorischem Eigenkapital (Eigenmitteln). Bankinterne Quersubventionierungen durch überhöhte Margen für bonitätsmäßig einwandfreie Kreditnehmer werden weitestgehend der Vergangenheit angehören. Bereits jetzt ist eine Rationierung von Krediten an bonitätsmäßig schlechtere Kreditnehmer zu beobachten.<sup>200</sup> Insbesondere für mittelständische Unternehmen<sup>201</sup> wird eine Verteuerung von Krediten und eine Zurückführung der Kreditlinien befürchtet.<sup>202</sup>

<sup>195</sup> Vgl. bspw. Zeitungsartikel von H. Steltzner vom 29. Januar 2002: Wetterleuchten am Finanzplatz Frankfurt.

<sup>196</sup> Die Entwicklung der Zahl der Unternehmensinsolvenzen hat mit Beginn der 90er Jahre stetig zugenommen. Betrug die Zahl der Unternehmensinsolvenzen im Jahr 1991 gerade 8.837, erreichte sie im Jahr 2003 einen Höhepunkt mit 39.320 Unternehmensinsolvenzen. Während im Jahr 2004 mit 39.213 kaum eine Entlastung zu spüren war, gehen aktuell die Unternehmensinsolvenzen (gemessen anhand der Zahlen der Vormonate) langsam zurück:

1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
22.344	25.530	27.474	27.828	26.476	28.235	32.278	37.579	39.320	39.213

Vgl. Destatis (2004), Statistisches Jahrbuch 2004, S. 451. Für aktuelle Zahlen siehe die im WWW bereitgestellten Tabellen des STATISTISCHEN BUNDESAMTS: <http://www.destatis.de/indicators/d/ins110ad.htm> (geladen am 27. Juli 2005). Siehe auch Zeitungsartikel von M. Walker vom 09. April 2002: Kirch's Media's failure illustrates German bank's big exposures.

<sup>197</sup> Siehe zur Änderung des Bankgeschäfts im Rahmen der Globalisierung R. McCauley, J. Ruud und P. Wooldridge (2002), Globalisierung des internationalen Bankgeschäfts, S. 47-56.

<sup>198</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 646.

<sup>199</sup> Vgl. BCBS (2004), Basel II.

<sup>200</sup> Vgl. G. Kayser und L. Kokalj (2002), Mittelständische Unternehmen und Basel II, S. 115.

<sup>201</sup> Die Bonität mittelständischer Unternehmen ist zumeist im Grenzbereich zwischen dem Investment-Grade und dem Speculative-Grade einzuordnen. Als Mittelstand werden dabei Unternehmen bis maximal 499 Mitarbeitern bezeichnet. Für eine typische Bonitätsstruktur eines Mittelstandsportfolios siehe G. Taistra, C. Tiskens und M. Schmidtchen (2001), Basel II vs. Mittelstandsportfolios, S. 515, Abb. 1.

<sup>202</sup> Vgl. M. Munsch (2002), Mittelstand und Basel II, S. 127. Eine Verschärfung der Kreditkonditionen wird vor allem für mittelständische Unternehmen aus den neuen Bundesländern erwartet. Vgl. ebenda, S. 130.

Das von der KfW initiierte Programm zur Verbriefung von Mittelstandskrediten (**Promotional Mittelstand Loan Securitisation®**, Abk.: PROMISE) – bei dem die KfW als wettbewerbsneutraler Intermediär zwischen den kommerziellen Kreditinstituten und den Investoren am Kapitalmarkt auftritt – ermöglicht den an den Förderprogrammen der KfW teilnehmenden Kreditinstituten (vgl. Tab. 2-2) den Transfer der mit den Mittelstandskrediten verbundenen Ausfallrisiken<sup>203</sup> zum Kapitalmarkt und erlaubt ihnen somit eine Verringerung der aufsichtsrechtlich zu hinterlegenden Eigenmittel. Durch die synthetische Struktur der PROMISE-Transaktionen bedarf es dazu keiner Veräußerung der Mittelstandskredite. Damit wird ein störender Eingriff in das Kreditverhältnis zwischen dem Kreditinstitut und dem Kunden vermieden. Zudem werden Transaktionskostenvorteile geltend gemacht.<sup>204</sup> Je nach Zielsetzung des Kreditinstituts kann jedoch der geringere bzw. ausbleibende Mittelzufluss im Vergleich zu einer True Sale-Transaktion als Nachteil gesehen werden.<sup>205</sup>

Potentiellen Investoren sollen attraktive Renditen durch die (synthetische) Investition in Unternehmen des deutschen Mittelstandes – die ihnen aufgrund der im Mittelstand vorherrschenden Rechtsformen der GmbH und der KG nicht oder nur über den Umweg der Kapital- und Unternehmensbeteiligungsgesellschaften<sup>206</sup> offen stehen – geboten werden. Dem einzelnen Anleger bleiben zudem aufwendige Prüfungen der Vermögens-, Finanz- und Ertragslage einzelner Unternehmen erspart. CDO-Ratings erlauben den Investoren ohne nennenswerte Informationskosten nach individuellem Risikoappetit Mittelstandsrisiken mit Aussicht auf lukrative Risikoprämien zu erwerben. Da dem Prinzip der Subordination folgend, Verluste zunächst von Investoren mit höherer Risikoneigung zu tragen sind, eignen sich CDOs auch für konservative Anleger. I. d. R. entsprechen über 80 % gut diversifizierter Mittelstandsportfolios unter Berücksichtigung der Portfolioeffekte und des Prinzips der Subordination der CDOs mit der daraus resultierenden gestaffelten Verlustpartizipation einem Tripel-A Rating.<sup>207</sup>

Da alle PROMISE-Transaktionen der KfW einer einheitlichen Struktur folgen, wird zum einen die Verteilung der gerade am Anfang durch die außerordentlich hohe rechtliche und finanzwirtschaftliche Komplexität der Transaktionen im Rahmen der Entwicklung und

---

<sup>203</sup> Obwohl die Kredite beim Durchleitungsprinzip von der KfW finanziert werden, wird der Kreditvertrag zwischen dem Originator und dem Firmenkunden abgeschlossen. Das Kreditrisiko liegt beim Originator.

<sup>204</sup> Vgl. H. Krämer-Eis, C. Schneider und C. Tiskens (2001), Die Verbriefung von Mittelstandskrediten durch die KfW, S. 24.

<sup>205</sup> Vgl. D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 648.

<sup>206</sup> Zu den Schwierigkeiten der Private-Equity-Industrie siehe Zeitungsartikel von D. Weber-Rey vom 18. Juli 2002: Finanzmarktförderungsgesetz stärkt UBGs nur unzureichend.

<sup>207</sup> Vgl. D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 647 f.

Initiierung verursachten Kosten auf eine Vielzahl von Geschäften und zum anderen eine Standardisierung der synthetischen SME CDOs und somit Schaffung eines liquiden „Sekundärmarktes“ für Mittelstandskredite ermöglicht. Dabei kann zur Durchführung der Transaktionen auf spezialisierte Management- und Holdinggesellschaften mit deren Expertise im Bereich des Structured Finance zurückgegriffen werden.<sup>208</sup>

### **232 Typische Charakteristika von PROMISE-Referenzportfolios**

Die Basis aller „PROMISE“-Transaktionen bildet jeweils ein Referenzportfolio, bestehend aus Krediten, die durch den Originator im Rahmen der Förderprogramme der KfW sowie – wenn auch nur zu einem kleinen Teil – im Rahmen der Tätigkeiten der DEUTSCHEN AUSGLEICHSBANK<sup>209</sup> (DtA) an Unternehmen des Mittelstandes vergeben wurden.<sup>210</sup> In Einzelfällen können auch Kredite herangezogen werden, die nicht im Rahmen der Förderprogramme der KfW oder der DtA vergeben worden sind. Die Referenzportfolios erreichen z. T. Nominalwerte, die 1 Mrd. EUR weit übersteigen. Dabei kann es sich um

(1) einen statischen Pool<sup>211</sup> oder

(2) einen revolvingenden<sup>212</sup> Pool

handeln. Im Gegensatz zum statischen Pool können bei einem revolvingenden Pool über einen vordefinierten Zeitraum hinweg „Nachbesserungen“ (Replenishments) bei Veränderungen der Kreditqualität des Pools, bei vollständig/teilweise amortisierten Krediten und/oder bei Vorfälligkeitszahlungen aufgrund sich ändernder Zinsbedingungen oder veränderter Förderanreize seitens der KfW unter Einhaltung bestimmter Kriterien vorgenommen werden. Diese Kriterien betreffen insbesondere die Portfoliodiversifikation in geogra-

---

<sup>208</sup> Im Beispiel der nachfolgend häufig zitierten PROMISE-K 2001-1 Plc-Transaktion wurde – aus den Namen der Shareholder des SPVs schlussfolgernd (vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 85) – mit der Management- und Holdinggesellschaft SPV MANAGEMENT LTD. zusammengearbeitet. WWW: [www.spvmanagement.com](http://www.spvmanagement.com) (abgerufen am 26. Juli 2005).

<sup>209</sup> Während die KfW auf die Förderung von Unternehmen ausgerichtet ist, leistet die DtA i. d. R. personenbezogene Förderung.

<sup>210</sup> In Abhängigkeit von den jeweiligen Transaktionsvereinbarungen kann das Referenzportfolio auch Garantien seitens des Originators gegenüber Verbindlichkeiten von mittelständischen Unternehmen sowie Unterbeteiligungen enthalten. Vgl. stellvertretend Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 67-70. u. S. 57 ff. (Description of the Reference Pool). Auszüge aus dem INFORMATION MEMORANDUM finden sich in Anlage 21.

<sup>211</sup> Folgende KfW-Transaktionen wiesen statische Referenzportfolios auf: PROMISE-A-2002-1, PROMISE AUSTRIA-2002-1, PROMISE COLOR-2003-1, PROMISE-XXS-2003-1. Im Fall der PROMISE CARAVELA 2004 PLC-Transaktion sind zwar Replenishments erlaubt, jedoch gilt: „Certain replenishment criteria must be met to ensure that the reference portfolio behaves like a static portfolio during the replenishment period.“ (G. Moloney und E. Gatfield (2005), Promise Caravela 2004 plc, S. 4 (FITCH Report)). Vgl. Tab. 2-2.

<sup>212</sup> Folgende KfW-Transaktionen wiesen revolvingende Referenzportfolios auf: PROMISE-I 2000-1, PROMISE-A 2000-1, PROMISE-K 2001-1, PROMISE-Z 2001-1, PROMISE-G 2001-1, PROMISE-I 2002-1, PROMISE-C 2002-1, PROMISE-I MOBILITY 2005-1. Vgl. Tab. 2-2.

phischer Hinsicht und die Portfoliodiversifikation hinsichtlich der Branchen, in denen die kreditierten Unternehmen tätig sind. Zudem sind Mindestanforderungen an die Konzentration von Krediten bezüglich der Exposures, der Schuldner, der geschätzten Ausfallwahrscheinlichkeiten und der geforderten Kreditsicherheiten einzuhalten.

Am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion wurden 2.916 Kredite der DRESDNER BANK an Unternehmen des deutschen Mittelstandes mit einem Gesamtnominalvolumen i. H. v. 1 Mrd. EUR zu einem Referenzportfolio zusammengefasst. Der überwiegende Teil der Kredite (96 %) wurde im Zuge der KfW- und DtA-Förderprogramme vergeben. Das Referenzportfolio<sup>213</sup> ist geographisch gut diversifiziert. Kein Schuldner ist mit mehr als einem Prozent; keine Branche ist mit mehr als 8 % des Nominalvolumens im Referenzportfolio vertreten. Alle Kredite sind im Durchschnitt zu 54,8 % besichert.

Um eine hinreichende Qualität und Diversifikation des Referenzportfolios über die Laufzeit der Transaktion hinweg zu gewährleisten, müssen im Zuge der „Nachbesserungen“ sog. „Replenishment Conditions“ befolgt werden.<sup>214</sup> Sie lassen sich grob unterteilen in

- (1) Kriterien zur Portfoliokonzentration/Portfoliodiversifikation,
- (2) Kriterien zur Portfoliobonität,
- (3) Kriterien zur Portfoliobesicherung,
- (4) Kriterien zur Portfoliorestlaufzeit.

Insbesondere die Kriterien zur Portfoliokonzentration und -diversifikation treten in unübersichtlicher Anzahl und Vielfalt auf. Die wichtigsten Kriterien seien hier nur kurz erwähnt: Keine Branche darf mit mehr als 8 % des Nominalvolumens vertreten sein.<sup>215</sup> Bezüglich der Schuldner-Konzentration wird auf ein bank-internes Risikomaß (FK-Rating<sup>216</sup>) als Resultat eines Credit-Scoring-Verfahrens zurückgegriffen. Dabei dürfen Schuldner bestimmter Klassenzugehörigkeit paarweise lediglich mit maximal genau festgelegten Nominalwertanteilen in das Referenzportfolio aufgenommen werden. Mit Blick auf potentielle In-

---

<sup>213</sup> Die Daten beziehen sich auf den Tag des Abschlusses des Referenzportfolios (Closing Date).

<sup>214</sup> Unabhängig von den Replenishment Conditions müssen alle neu aufgenommenen Schuldtitel – ebenso wie alle Schuldtitel aus dem Ursprungsreferenzportfolio – bestimmten Eligibility Criteria entsprechen. Dies sind eher formale Kriterien wie die Denomination in Euro oder die Freiheit von Ansprüchen Dritter.

<sup>215</sup> Eine Ausnahme bilden die drei größten Branchen, die zusammengenommen mit nicht mehr als  $3 \cdot 8 \% = 24 \%$  des Nominalvolumens des Referenzportfolios in diesem vertreten sein dürfen.

<sup>216</sup> Das FK-Rating der DRESDNER BANK reicht vom besten Rating „1“ bis zum schlechtesten Rating „8“. Im Referenzportfolio dürfen lediglich Schuldner mit einem Rating zwischen 1 und 5 vertreten sein.

vestoren wäre ein erhöhter Grad an Transparenz erreicht worden, hätte man es bei dem Limit i. H. v. 1 % bezogen auf den Nominalwert jedes einzelnen Schuldners belassen.

Das anfängliche Referenzportfolio hat eine gewichtete<sup>217</sup> durchschnittliche Restlaufzeit von 2,4 Jahren. Die längste Restlaufzeit im Kreditportfolio von 5 Jahren stimmt mit der Laufzeit der gesamten PROMISE-Transaktion überein. Vorausgesetzt der aggregierte Wert der Kreditsicherungen fällt nicht unter die Grenze von 30 % des Portfolionominalvolumens, darf die gewichtete durchschnittliche Restlaufzeit den Wert von 2,5 Jahren nicht überschreiten. Andernfalls ist ein Maximum von 1,75 Jahren einzuhalten.

Eine besondere Schwierigkeit besteht in der Ermittlung der Qualität des Referenzportfolios bezüglich des Ausfallrisikos. Mittelständische Unternehmen besitzen im Allgemeinen kein Rating einer international anerkannten Ratingagentur. Allerdings haben alle Kreditanträge – gleich ob sie im Rahmen der Förderprogramme der KfW oder der DtA gestellt wurden oder nicht – den Kreditwürdigkeitsprozess des Originators durchlaufen. Hat der Originator ein verlässliches internes Ratingsystem installiert, lassen sich die internen Ratings des Kreditinstituts zur Beurteilung heranziehen und unter Verwendung von internen und externen Rating Korrelationen<sup>218</sup> sowie historischen Ausfall- und Migrationswahrscheinlichkeiten der internen Ratingklassen<sup>219</sup> auf die Ratingklassen der Agenturen „mappen“.<sup>220</sup> Das Referenzportfolio der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion weist ein gewichtetes durchschnittliches Rating von Ba1/Ba2 (MOODY'S) auf.

Um die Qualität des Referenzportfolios während der Replenishmentperiode aufrechtzuerhalten, darf das gewichtete<sup>221</sup> durchschnittliche FK-Rating den Wert von 3,71 nicht unterschreiten. Darüber hinaus dürfen die aggregierten Referenzportfolioanteile schlechterer FK-Ratingklassen, errechnet mit Nominalwerten, bestimmte Grenzen nicht überschreiten. Das hat zur Folge, dass trotz des geforderten minimalen FK-Ratings von 3,71 Schuldtitel aus den oberen Ratingklassen im Referenzportfolio nicht fehlen dürfen.

---

<sup>217</sup> Die Gewichtung der Restlaufzeiten erfolgt mit den Anteilen des entsprechenden Titels am Referenzportfolio, gemessen in Nominalwerten.

<sup>218</sup> Voraussetzung dafür ist eine ausreichend große Anzahl von extern gerateten Unternehmen im Referenzportfolio.

<sup>219</sup> Voraussetzung dafür sind historische Zeitreihen aus der sich Ausfall- und Migrationswahrscheinlichkeiten für verschiedene Zeithorizonte ermitteln lassen.

<sup>220</sup> Zu internen Ratingsystemen siehe [BCBS \(2000\)](#), Banks' internal ratings systems, S. 8-22. Für ein Beispiel siehe [T. Jacobson, J. Lindé und K. Roszbach \(2003\)](#), Consistency of banks' risk classification policies, S. 11-20. Zu alternativen Lösungsmöglichkeiten abseits des Mappings von Ratingsystemen siehe [S. Bund, M. van der Weijden und M. Lench \(2001\)](#), European SME CDOs, S. 3 f.

<sup>221</sup> Die Gewichtung der Restlaufzeiten erfolgt mit den Anteilen des entsprechenden Titels am Referenzportfolio, gemessen in Nominalwerten.

Sollten einzelne Qualitätskriterien bspw. aufgrund der Amortisation einzelner Titel verletzt sein, müssen die Replenishments zu einer Verbesserung bis hin zur Heilung der Kriterien führen. Die Verletzung bestimmter Kriterien (Replenishment-Trigger bzw. Suspension Events) kann bis zu deren Heilung zu einer vorübergehenden Aussetzung der Portfolio-replenishments führen. Dazu gehört regelmäßig das Überschreiten der kumulierten Verluste ex post der Sicherheitsverwertungen (Recoveries). Insbesondere zeitlich verzögerte Sicherheitsverwertungen können zur Heilung derartiger Kriterien führen.

Verluste in bestimmten Größenordnungen können darüber hinaus zur vorzeitigen Amortisation der CDOs führen (Early Amortisation Trigger).

### **233 Zur synthetischen Verbriefung von PROMISE-Referenzportfolios mit CDOs**

Das Wesensmerkmal von synthetischen CDOs ist der Transfer des Kreditrisikos unter Umgehung des True Sale mit Hilfe von Kreditderivaten.<sup>222</sup> Am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion übernimmt zunächst die KfW (Protection Seller) durch den Verkauf eines Credit Default Swaps (CDS) an den Originator (Protection Buyer) das Ausfallrisiko des gesamten Referenzportfolios. Der Originator erwirbt damit als Halter der risikobehafteten Forderungspositionen gegen Zahlung einer periodischen Risikoprämie (Swap-satz) an den Protection Seller das Recht, bei Eintritt eines oder mehrerer Kreditausfälle (Credit Events), eine Kompensation für die daraus entstandenen Verluste von der KfW zu erhalten.<sup>223</sup> Der Credit Default Swap ähnelt daher in der Wirkung einer von der KfW übernommenen Garantie gegen Kreditausfälle. Anders als bei einem Plain Vanilla CDS liegt hier eine Basket-Struktur vor. Da das gesamte Referenzportfolio als Underlying für den CDS fungiert, wird im Weiteren häufig der Begriff des Master Basket CDS verwendet.<sup>224</sup>

Die KfW agiert lediglich als Intermediär und transferiert ihrerseits das Ausfallrisiko weiter.<sup>225</sup> Zu diesem Zweck wird das Referenzportfolio nach dem „Prinzip der zunehmenden Nachrangigkeit“ (Subordination) in einzelne Tranchen unterteilt, wobei Kreditausfälle zuerst von den Investoren der untersten Tranche (First Loss Piece, FLP) und erst danach in Reihenfolge zunehmender Seniorität von den Investoren der oberen Tranchen getragen werden:

---

<sup>222</sup> Vgl. Abschnitt 212.

<sup>223</sup> Kreditereignisse und Verlustausgleichszahlungen im Rahmen der PROMISE-Transaktionen sind im Folgenden noch näher zu spezifizieren.

<sup>224</sup> Vgl. auch die quantitativen Ausführungen zum Master Basket CDS in Abschnitt 524.

<sup>225</sup> Die Zwischenschaltung der KfW hat regulatorische Gründe. Vgl. S. Jortzik und B. Müller (2002), Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate, S. 21-24.

Tranche	Nominalvolumen	In %	Rating	Verbriefungsform
Senior Tranche	894.750.000 EUR	89,475	NR <sup>226</sup>	CDS
Class A+	250.000 EUR	0,025	AAA	CLN
Class A	10.000.000 EUR	1,000	AA	CLN
Class B	11.000.000 EUR	1,100	A	CLN
Class C	26.500.000 EUR	2,650	BBB	CLN
Class D	10.000.000 EUR	1,000	BB	CLN
Junior Tranche	47.500.000 EUR	4,750	NR	CDS

**Tab. 2-1: Tranchenbildung am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 Plc-Transaktion**

Am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion wurde das Referenzportfolio i. H. v. 1 Mrd. EUR Nominalvolumen in eine Junior-Tranche i. H. v. 47,5 Mio. EUR, 5 Mezzanine-Tranchen i. H. v. respektive 10, 26.5, 11, 10 und 0.25 Mio. EUR sowie eine Senior-Tranche i. H. v. 894.75 Mio. EUR aufgespaltet.

Das Ausfallrisiko der *Senior-Tranche* reicht die KfW per CDS an eine kommerzielle Bank weiter. Aus regulatorischen Gründen kommen dafür nur OECD-Banken in Frage.<sup>227</sup>

Ähnlich wie bei den traditionellen CDOs werden die *Mezzanine-Tranchen*, dem Prinzip der Subordination folgend, über eine zwischengeschaltete Zweckgesellschaft am Kapitalmarkt platziert. Die rechtliche Selbständigkeit ermöglicht den Haftungsausschluss des Originators sowie der KfW und die gezielte Steuerung der Bonität der einzelnen Mezzanine-Tranchen. Jede einzelne Tranche kann anschließend durch eine namhafte Ratingagentur mit einem Bonitätsrating versehen werden, das – wie bei den traditionellen CDOs – mit Blick auf die äußerst komplexen rechtlichen und finanzwirtschaftlichen Rahmenbedingungen den potentiellen Investoren gegenüber das notwendige Mindestmaß an Transparenz schafft.

Anders als bei den traditionellen CDOs, wird das Kreditrisiko nicht in Form eines True Sales an das SPV übertragen, sondern entweder in Form von credit-linked Certificates of Indebtedness (Schuldscheine) oder einem weiteren CDS.

Wird das Kreditrisiko über Schuldscheine auf das SPV übertragen, werden die Erlöse aus der Platzierung der Mezzanine-Tranchen am Kapitalmarkt verwendet, um Schuldscheine<sup>228</sup> mit identischer Laufzeit von der KfW zu erwerben. Die Rückzahlung ist an die Performance des Referenzportfolios gekoppelt. Realisierte Verluste aus dem Referenzportfolio, die

<sup>226</sup> Not Rated.

<sup>227</sup> OECD-Banken haben derzeit ein Bonitätsgewicht von 20 %. Vgl. § 13 Grundsatz I.

<sup>228</sup> Die Schuldscheine begründen ein Schuldversprechen gem. § 780 BGB.

an Umfang das FLP übertreffen, werden den Schuldscheinen zugeordnet und führen zu deren sukzessiven Abschreibung. Die Schuldscheine ähneln daher in ihrer Wirkung einer Credit Linked Note (CLN). Sie dienen zugleich als Besicherung der Verpflichtungen des SPV gegenüber den Investoren der Mezzanine-Tranchen (Collateral).

Wird das Kreditrisiko in Form eines weiteren CDS auf das SPV übertragen, werden die Erlöse aus der Platzierung der Mezzanine-Tranchen am Kapitalmarkt verwendet, um in Anlagen bester Bonität (Staatspapiere, Medium-Term Notes der KfW<sup>229</sup>) zu investieren. Die erworbenen Anlagen dienen wiederum der Besicherung der Verpflichtungen des SPV gegenüber den Investoren der Mezzanine-Tranchen.

Das SPV transferiert das Kreditrisiko der einzelnen Mezzanine-Tranchen mit Hilfe von Credit Linked Notes. Diese gehören ebenso wie die CDSs zu den Kreditderivaten. Eine CLN stellt im einfachsten Fall eine strukturierte Anleihe dar, die als Kombination eines CDS mit einer Schuldverschreibung aufgefasst werden kann. Sie wird zum Nennwert zurückgezahlt, wenn ein vorher festgelegtes Kreditereignis beim Referenzaktivum nicht eintritt.<sup>230</sup> Kommt es zum Kreditereignis, wird die CLN unter Abzug eines Ausgleichsbetrags zurückgezahlt. Der Ausgleichsbetrag hat die Verluste aus dem Referenzaktivum aufgrund des Kreditereignisses zu kompensieren. Der Investor zahlt den Ausgabepreis an das SPV als Emittenten der CLN und erhält während der Laufzeit eine risikoadäquate Verzinsung (Kupon). Die CLNs stellen die eigentlichen CDOs der Transaktion dar.

Die Emissionserlöse aus den CLNs werden, wie oben bereits beschrieben, entweder zum Erwerb der credit-linked Certificates of Indebtedness der KfW oder der bonitätsrisikofreien Anlagen als Unterlegung bzw. Besicherung (Collateral) der CLNs verwendet.

Die Zinszahlungen aus den Certificates of Indebtedness bzw. die Zinszahlungen aus den risikofreien Geldanlagen zuzüglich der CDS-Prämie verwendet das SPV, um die Kuponverpflichtungen aus den umlaufenden Notes zu bedienen.<sup>231</sup>

Am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion wurden von der KfW credit-linked Certificates of Indebtedness begeben, die das SPV unter Verwendung der Emissionserlöse der CLNs als Collateral erworben hat.

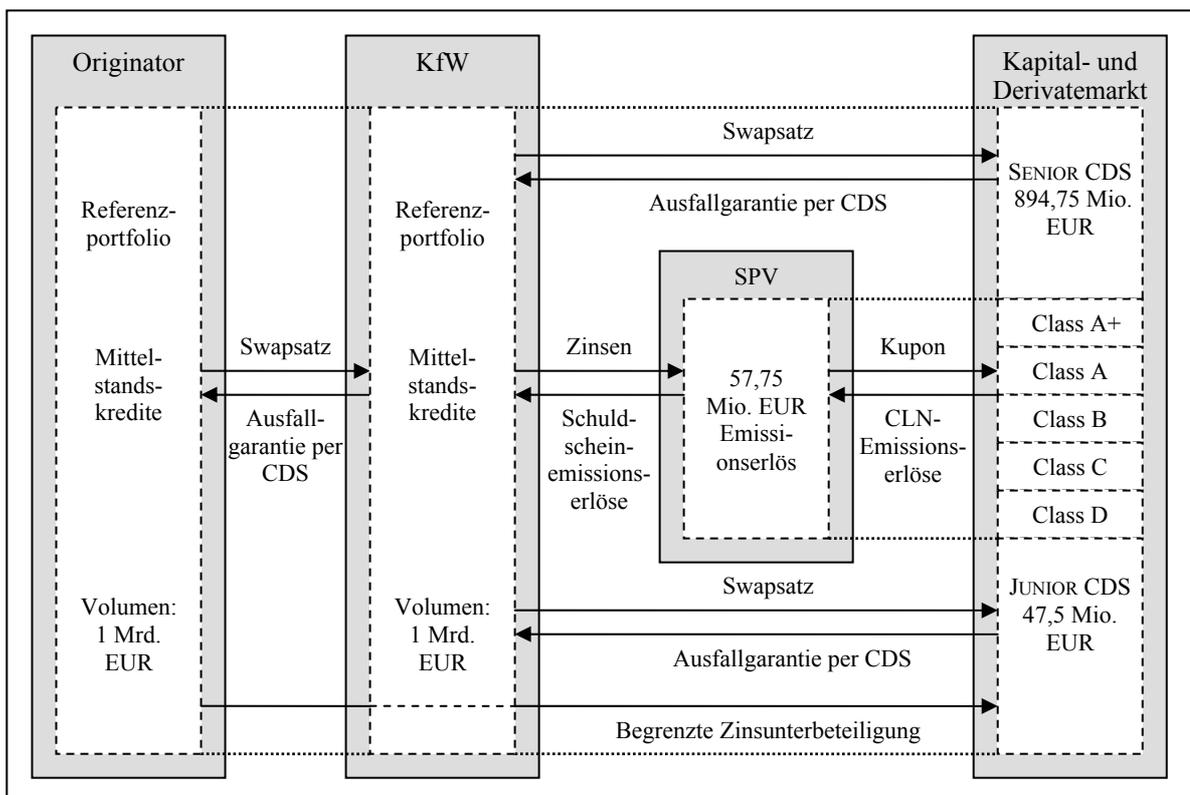
---

<sup>229</sup> Die KfW kann eine Staatsgarantie vorweisen und erhält daher regelmäßig ein Tripel-A Rating.

<sup>230</sup> Vgl. hierzu ausführlicher die duplikationstheoretischen Überlegungen in Abschnitt 5231.

<sup>231</sup> Vgl. hierzu ausführlicher die Ausführungen in Abschnitt 524.

Das Ausfallrisiko der *Junior-Tranche* reicht die KfW in Analogie zur Senior-Tranche mit einem CDS weiter. Da erwartungsgemäß ein beträchtlicher Teil der Junior-Tranche ausfallbedroht<sup>232</sup> ist, wird es nicht ohne weiteres möglich sein, diese per Junior-CLN oder per Junior-CDS am Kapital- bzw. Derivatemarkt zu platzieren. Die Lösung besteht in einer Unterbeteiligung der Investoren der Junior-Tranche an den Zinserträgen des Referenzportfolios (Interest Subparticipation). Dabei haben Investoren der Junior Tranche Anspruch auf Zahlungen i. H. d. von ihnen zu tragenden realisierten Verluste, soweit ausreichend Zinserträge über die jeweilig zuzuordnende und zuvor vertraglich spezifizierte Zinsunterbeteiligungsperiode (Interest Subparticipation Period) angesammelt wurden.<sup>233</sup>



**Abb. 2-6: Struktur einer synthetischen CDO-Verbriefung am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 Plc-Transaktion**

Beispielhaft ist in Abb. 2-6 die Struktur der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion dargestellt. Dabei sind (potentielle) Zahlungsströme durch Pfeile symbolisiert. Die grau unterlegten Felder stellen Transaktionsbeteiligte dar. Die gestrichelten Kästen symbolisieren das Referenzportfolio bzw. Tranchen des Referenzportfolios.

<sup>232</sup> Vgl. hierzu auch die quantitativen Analysen in den Abschnitten 432 und 511.

<sup>233</sup> Bei synthetischen CDOs, bei denen die Junior-Tranche ebenso wie die Mezzanine-Tranchen als CLN am Kapitalmarkt verbrieft wurden, lässt sich aus den beobachtbaren Zins-Spreads schlussfolgern, dass ihr aufgrund der Zinsunterbeteiligung durchaus eine höhere Bonität als die ihr unmittelbar übergeordnete(n) (vorrangige(n)) Tranche(n) beigemessen werden kann. Vgl. hierzu auch die quantitativen Analysen in Abschnitt 513.

### 234 Zur Struktur und Funktion von Zinsunterbeteiligungen

Im Rahmen einer begrenzten Zinsunterbeteiligung (Interest Subparticipation, ISP) sieht diese für die Sicherungsgeber der Junior-Tranche (First Loss Piece, FLP) vor, dass im Falle von schlagend werdenden Ausfallrisiken die Sicherungsgeber zu Kompensationszahlungen berechtigt sind. Die Kompensationszahlungen sollen die der Junior-Tranche zugeordneten realisierten Verluste nach Berücksichtigung und Verwertung von zur Verfügung stehenden Besicherungen ausgleichen. Als Quelle dienen die zukünftigen, über die verbleibende Restlaufzeit hinweg aus dem Referenzportfolio eingehenden Zinseinnahmen.

Die für evt. Kompensationszahlungen zur Verfügung stehenden Zinseinnahmen können in verschiedener Weise abgegrenzt werden. Zunächst können die gesamten Bruttozinszahlungen (Available Interest Income) aus dem Referenzportfolio herangezogen werden, um Forderungen aus der Zinsunterbeteiligung zu bedienen. Unter einer momentanen Vernachlässigung der besonderen Struktur der Zinsunterbeteiligung – insbesondere der Tatsache, dass nur Zinseinnahmen ab dem Zeitpunkt des Ausfalls zur Bedienung der Zinsunterbeteiligung herangezogen werden können, was dem Junior-Sicherungsgeber einen Zugriff auf bereits erwirtschaftete Zinseinnahmen und im Falle eines Ausfalls unmittelbar vor Ende der gesamten CDO-Transaktion jegliche Kompensationszahlungen verwehrt – und der Existenz von Early Amortisation und Replenishment Trigger sowie der Voraussetzung, dass das FLP den über den gesamten CDO-Transaktionszeitraum erwarteten Verlust des Referenzportfolios nicht unterschreitet, erhält der Junior-Sicherungsgeber im langfristigen Mittel, d. h. unter dem Eintritt von exakt den erwarteten Verlusten, Kompensationen in Höhe der in den vereinbarten Zinssätzen einkalkulierten Risikoprämien für Kapitalverluste (Standardrisikokosten<sup>234</sup>). Im Einzelfall ermöglicht eine Konstruktion der Zinsunterbeteiligung dieser Art jedoch nicht nur einen Zugriff auf die kalkulierten Standardrisikokosten durch die Sicherungsgeber, sondern auch auf die Refinanzierungskomponente, auf die Komponente für die Verwaltungs- und Personalkosten und auf die Komponente für die unerwarteten Verluste.<sup>235</sup> Das lässt vermuten, dass stets ausreichend Zinseinnahmen für Kompensationszahlungen aus Kapitalverlusten zur Verfügung stehen.<sup>236</sup>

Eine Ausweitung der zur Verfügung stehenden Zinseinnahmen kann durch eine Einbeziehung von Bruttozinszahlungen aus Forderungen erfolgen, die nicht zum CDO-Referenzportfolio gehören (Extended Reference Pool). Das kann insbesondere durch den

---

<sup>234</sup> Vgl. T. Hartmann-Wendels, A. Pfingsten und M. Weber (2004), Bankbetriebslehre, S. 565-571.

<sup>235</sup> Die Auswirkungen dieser Konstruktion auf das beim Initiator verbleibende wirtschaftliche Risiko werden im Rahmen der Diskussion der Ergebnisse aus der Simulation der Portfolioverluste betrachtet.

<sup>236</sup> Vgl. zur weitgehenden Bestätigung dieser These die quantitativen Analysen in Abschnitt 513.

Aufbau eines zusätzlichen Referenzportfolios für den Zeitraum zwischen dem ökonomischen und dem juristischen Fälligkeitstag erfolgen. Der zusätzliche Zeitraum<sup>237</sup> dient primär der Feststellung von Ausfällen und Recoveries gegen Ende der Restlaufzeit der CDO-Transaktion. In diesem Fall würden jedoch Zinserträge aus Krediten zur Verlustkompensation herangezogen werden, die nicht durch den Junior-CDS besichert sind.

Praktisch werden monatlich oder quartalsweise die von den Sicherungsgebern des FLPs zu tragenden Verluste, respektive die Ansprüche aus der Zinsunterbeteiligung auf der Grundlage realisierter Verluste, ermittelt. Da nur zukünftige Zinseinnahmen für Kompensationszahlungen zugelassen sind, können Zinseinnahmen des aktuellen Monats bzw. Quartals nicht für Kompensationszahlungen verwendet werden. Vielmehr ist zur Ermittlung möglicher Kompensationszahlungen aus Zinseinnahmen der aktuellen Periode auf die Verluste der Vorperiode abzustellen. Diese werden den zur Verfügung stehenden Zinseinnahmen gegenübergestellt. Bei vollständiger Deckung werden die Kompensationen sofort und vollständig getätigt. Im Falle einer mangelnden Deckung werden nicht befriedigte Ansprüche auf den Folgemonat vorgetragen, nicht jedoch über den wirtschaftlichen Verfallstag hinaus. Dabei werden in chronologischer Reihenfolge die ältesten (d. h. aus früheren Monaten mangels Deckung vorgetragenen) Ansprüche zuerst befriedigt.<sup>238</sup>

In Abschnitt 513 dieser Arbeit wird die zeitliche Struktur der ISP-Zahlungen quantitativ untersucht. Die kumulierten ISP-Zahlungen werden mit den tatsächlich realisierten und von den Sicherungsgebern auszugleichenden Verlusten verglichen. Die obige Vermutung, dass regelmäßig ausreichende Zinseinnahmen für Kompensationszahlungen aus Kapitalverlusten zur Verfügung stehen, soll entweder bestätigt oder verworfen werden.

---

<sup>237</sup> Im Falle der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion beträgt die Länge dieses Zeitraumes zwei Jahre.

<sup>238</sup> Da im INFORMATION MEMORANDUM der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion keine Informationen zur Struktur der Zinsunterbeteiligung enthalten sind (Das Memorandum betrifft im Wesentlichen die von der PROMISE-K 2001-1 PLC emittierten Credit Linked Notes (CLNs). Insbesondere enthält es keine Angaben zur Privatplatzierung des FLP in Form eines Junior-CDS (vgl. Abb. 2-6). Die Dresdner Bank als Initiator war aus Vertraulichkeitsgründen nicht bereit, nähere Informationen zum Junior-CDS zur Verfügung zu stellen.), wurde zur Analyse der ISP auf Informationen aus dem INFORMATION MEMORANDUM der FÖRDE 2000-1-Transaktion (Im Rahmen der FÖRDE 2000-1-Transaktion wurden nicht nur die Senior-Tranchen, sondern auch das FLP als CLN am Kapitalmarkt platziert und wird dementsprechend vom INFORMATION MEMORANDUM mit abgedeckt.) zurückgegriffen. Vgl. Landesbank Schleswig-Holstein Girozentrale (2000), Förde 2000-1, S. 9 u. 20-22. Insbesondere heißt es darin: „'Available' Interest Income' means...the aggregate amount of interest payments received by the Issuer on the Reference Pool during the period...from (but excluding) the end of the calendar month in which such Reference Claim became a Defaulted Reference Claim to (and including) the end of the calendar month preceding the relevant Determination Date, as reduced...by any other Interest Subparticipation Amounts previously paid or payable on the same Payment Date...” (Vgl. § 6, (6), (a)) sowie “To the extent an Interest Subparticipation Amount exceeds the relevant Available Interest Income on any Payment Date, its payment shall be deferred until the next Payment Date on which such Interest Subparticipation Amount (or any part thereof) can be paid out of the then applicable Available Interest Income...” (Vgl. § 6, (6), (c)). Vgl. in knapper Form zur FÖRDE 2000-1 Transaktion J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 220 f.

### 235 SPVs am Beispiel des PROMISE-Programms

Da das SPV vorrangig der risikopolitischen Separation des Referenzportfolios dient, sollten die damit verbundenen Kosten möglichst gering gehalten werden.<sup>239</sup> Insbesondere würde jede steuerliche Belastung der Verbriefung oder des SPVs die Kosten der CDO-Transaktion erhöhen. Infolgedessen ist das SPV weitgehend steuerneutral zu gestalten.<sup>240</sup>

In Deutschland unterliegt eine Zweckgesellschaft in der Rechtsform einer Kapitalgesellschaft grundsätzlich der Gewerbeertragsteuerpflicht.<sup>241</sup> Der Gewerbeertrag ist der Gewinn aus dem Gewerbebetrieb nach den Vorschriften des Körperschaftsteuergesetzes.<sup>242</sup> Zur Ermittlung der Bemessungsgrundlage sind 50 % der Dauerschuldzinsen hinzuzurechnen.<sup>243</sup> Dauerschuldzinsen sind Entgelte für Schulden, die wirtschaftlich mit der Gründung des SPVs einhergehen oder langfristig<sup>244</sup> der Stärkung des Betriebskapitals dienen. Bei True Sale-Transaktionen emittiert das SPV CDOs, um damit einen Forderungspool anzukaufen. Die CDOs dienen damit der Gründung des SPVs. Bei synthetischen Transaktionen entfällt zwar der Ankauf des Forderungspools, jedoch stärkt die Emission der CDOs das Betriebskapital des SPVs dauerhaft insofern, dass dadurch liquide Mittel für mögliche Kompensationszahlungen aus den geschlossenen Kreditderivaten zur Übertragung und Verbriefung des Ausfallrisikos während der gesamten Transaktionslaufzeit bereitgestellt werden.

Durch Gründung einer Zweckgesellschaft im Ausland, lässt sich insbesondere die Gewerbeertragsteuerpflicht vermeiden.<sup>245</sup> Als Firmensitz kommen Niedrigsteuer-Finanzzentren (Tax Havens) in Frage.<sup>246</sup> Damit sind jedoch Reputationsrisiken verbunden. Einige Investoren sind zudem gehalten, ausschließlich in Emissionen von Gesellschaften mit Sitz in der EU oder einem OECD-Mitgliedsland zu investieren.<sup>247</sup>

<sup>239</sup> Zu Finanzierungskosten im Rahmen von ABS-Strukturen siehe W. Benner (1988), ABS, S. 413-416.

<sup>240</sup> Ggf. ist im Vorfeld der Transaktion eine steuerliche Unbedenklichkeitsbescheinigung von der zuständigen Steuerbehörde einzuholen. Vgl. PWC (2004), Verbriefungen in Luxemburg, S. 8.

<sup>241</sup> Die Gewerbesteuerpflicht aufgrund der Rechtsform ergibt sich aus § 2 Abs. 2 GewStG. Eine Ausweitung der Diskussion auf weitere Steuerarten findet sich in M. Geurts (1999), Steuerliche Aspekte. Für eine aktuelle Analyse vgl. J. Bosak (2005), Steuerrechtliche Konsequenzen einer Asset-Backed Securitisation.

<sup>242</sup> Bei Personengesellschaften ist das Einkommensteuergesetz heranzuziehen. Vgl. § 7 Abs. 1 S. 1 GewStG.

<sup>243</sup> Vgl. § 7 S. 1 i. V. m. § 8 Abs. 1 Nr. 1 GewStG. „Der Sinn dieser Regelung liegt darin, dass die Verschuldung eines Unternehmens diesem nicht zu Steuervorteilen gereichen soll.“ B. Gehring (1999), ABS im amerikanischen und deutschen Recht, S. 187. Da dem Namen des Gesetzes folgend ein Ertrag besteuert werden soll, müssten sämtliche Aufwendungen hinzugerechnet werden. Insofern könnte auch von einer Abzugsfähigkeit von 50 % der Dauerschuldzinsen gesprochen werden.

<sup>244</sup> Eine Verbindlichkeit ist in diesem Zusammenhang als langfristig anzusehen, wenn die Laufzeit zwölf Monate übersteigt. Vgl. B. Gehring (1999), ABS im amerikanischen und deutschen Recht, S. 187.

<sup>245</sup> Vgl. R. Eichholz und M. Nelgen (1992), ABS, S. 796. Zu berücksichtigen ist, dass ein Einbezug gem. § 7 GewStG i. V. m. §§ 7 ff. AStG in Betracht kommt. Vgl. M. Geurts (1999), Steuerliche Aspekte, S. 453. Siehe zu diesem Problem auch H. Schmid und T. Dammer (2003), ABS und KFG, S. 819.

<sup>246</sup> Zu den wichtigsten Offshore Finance Centres und Tax Havens vgl. M. Lewis (1999), Offshore finance.

<sup>247</sup> Vgl. J. Tavakoli (2003), CDOs and structured finance, S. 55.

Closing	Zweckgesellschaft	Volumen <sup>248</sup>	Originator
14.12.2000	PROMISE-I 2000-1 Plc	2,583 Mrd. EUR	IKB
22.12.2000	PROMISE-A 2000-1 Plc	1,000 Mrd. EUR	HVB / VuW
03.05.2001	PROMISE-K 2001-1 Plc	1,000 Mrd. EUR	Dresdner Bank
09.08.2001	PROMISE-Z 2001-1 Plc	1,000 Mrd. EUR	DG Bank
23.11.2001	PROMISE-G 2001-1 Plc	0,650 Mrd. EUR	BW Bank
26.03.2002	PROMISE-I 2002-1 Plc	3,650 Mrd. EUR	IKB
22.03.2002	PROMISE-A-2002-1 Plc	1,618 Mrd. EUR	HVB / VuW
05.11.2002	PROMISE-C 2002-1 Plc	1,500 Mrd. EUR	Commerzbank
19.12.2002	PROMISE Austria-2002-1 Plc	1,009 Mrd. EUR	Bank Austria Creditanstalt
04.06.2003	PROMISE COLOR-2003-1 Plc	1,130 Mrd. EUR	HVB / VuW
07.11.2003	PROMISE-XXS-2003-1 Plc	2,153 Mrd. EUR	HVB
06.12.2004	PROMISE Caravela 2004 Plc	3,500 Mrd. EUR	BCP
23.03.2005	PROMISE-I Mobility 2005-1	0,650 Mrd. EUR	IKB

**Tab. 2-2: Zweckgesellschaften im Rahmen der PROMISE-Verbriefungsstruktur der KfW**

Sämtliche Zweckgesellschaften im Rahmen des PROMISE-Programms (Tab. 2-2) der KfW haben ihren Sitz in Dublin, Irland. Irland besitzt ein entwickeltes Rechts- und Steuersystem, ist Mitglied der EU und gehört der OECD an. Das Fehlen einer Gewerbeertragsteuer, die weitgehend steuerneutralen Gestaltungsmöglichkeiten hinsichtlich der Körperschaftsteuer (Corporation Tax) im Rahmen von ABS-Strukturen und ein weit reichendes Netz von Doppelbesteuerungsabkommen<sup>249</sup> sind wesentliche Gründe für die Attraktivität Irlands als Sitz von Zweckgesellschaften.<sup>250</sup>

Erste gesetzliche Regelungen zur Verbriefung in Irland wurden bereits 1991 getroffen und in den folgenden Jahren mehrfach erweitert und angepasst.<sup>251</sup> Gem. den Regelungen des Taxes Consolidation Acts (TCA) ist das SPV mit 25 % körperschaftssteuerpflichtig. Das SPV lässt sich jedoch weitgehend körperschaftssteuerneutral gestalten, da sowohl Finanzierungskosten (funded part of transaction) als auch Credit Default Swap-Prämienzahlungen (unfunded part of transaction) von der Bemessungsgrundlage abzugsfähig sind. Der resultierende Net Taxable Profit sollte vernachlässigbar sein.<sup>252</sup> Irland erhebt keine Quellensteuer (Withholding Tax) auf Zinszahlungen des SPVs an die Investoren der CDOs, sofern es sich bei den Investoren um Personen aus der EU (nicht Irland) oder einem

<sup>248</sup> Das Volumen bezieht sich auf das Referenzportfolio (Forderungspool).

<sup>249</sup> Alle Doppelbesteuerungsabkommen sind im WWW unter <http://www.revenue.ie/> (geladen am 15. August 2005) einsehbar.

<sup>250</sup> Vgl. P. Henahan (2001), Taxing issues, S. 34 f.

<sup>251</sup> Vgl. S. Smyth und C. Blaney (2003), Domiciling SPVs in Ireland, S. 7.

<sup>252</sup> Vgl. Arthur Cox (2005), Establishing SPVs in Ireland, S. 2. Damit das Ziel der Steuerneutralität erreicht wird, sollten insbesondere eingehende und ausgehende Risikoprämienzahlungen einander entsprechen. Vgl. zu Problemen in diesem Zusammenhang die Ausführungen in Abschnitt 5241.

Land mit einem Doppelbesteuerungsabkommen mit Irland handelt. Die Quellensteuer entfällt unabhängig vom Herkunftsland des Investors, wenn die CDOs an einer europäischen Börse gelistet und in einem anerkannten Clearing System geführt werden.<sup>253</sup> Die Emission und die Weiterveräußerung der CDOs führen nicht zu einer Vermögensverkehrssteuerbelastung (Stamp Duty). Unterstützt durch das (steuer)rechtliche Umfeld hat sich die IRISH STOCK EXCHANGE (ISE) neben der BOURSE DE LUXEMBOURG in den letzten Jahren zur größten europäischen Börse für ABS entwickelt. Eine schnelle Abwicklung der Emissionen, geringe Listinganforderungen an die SPVs sowie ein breiter europäischer Investorenkreis haben maßgeblich zu dieser Entwicklung beigetragen.<sup>254</sup>

Zur Stärkung der Wettbewerbsfähigkeit des deutschen Verbriefungsmarkts hat die Bundesregierung am 26. Februar 2002 den Entwurf eines Gesetzes zur Förderung von Kleinunternehmen und zur Verbesserung der Unternehmensfinanzierung beschlossen.<sup>255</sup> Das sog. Kleinunternehmerförderungsgesetz (KFG) wurde am 31.07.2003 verabschiedet<sup>256</sup> und erweitert die gewerbesteuerrechtliche Sonderstellung der Kreditinstitute<sup>257</sup> bzgl. der Hinzurechnung von Dauerschuldentgelten zur Bemessungsgrundlage der Gewerbeertragsteuer auf Zweckgesellschaften, die Kredite oder Kreditrisiken von Banken erwerben und zur Refinanzierung des Kaufpreises der Kredite bzw. der für die Kreditrisikouibernahme zu stellenden Sicherheiten Schuldtitel ausgeben.<sup>258</sup> Damit sind Zweckgesellschaften unabhängig davon, ob ein True Sale-Geschäft oder eine synthetische Transaktionen vorliegt, von der Gewerbeertragsteuer auf Dauerschuldzinsen befreit. Voraussetzung ist jedoch, dass die Kredite des zu verbriefenden Forderungspools bei True Sale-Transaktionen bzw. des Referenzportfolios bei synthetischen Transaktionen durch ein Kreditinstitut i. S. d. § 1 Abs. 1 KWG bzw. § 3 Nr. 2 GewStG begründet worden sind.<sup>259</sup> Verbriefungstransaktionen außerhalb des Bankensektors bleiben durch das KFG folglich unberührt.

---

<sup>253</sup> Alternativ zum Clearing House kann auf jede Zahlstelle außerhalb Irlands zurückgegriffen werden. Vgl. Arthur Cox (2005), Establishing SPVs in Ireland, S. 3; S. Smyth und C. Blaney (2003), Domiciling SPVs in Ireland, S. 7.

<sup>254</sup> Vgl. Arthur Cox (2005), Establishing SPVs in Ireland, S. 4.

<sup>255</sup> Vgl. C. Koch-Weser (2003), Rahmenbedingungen, S. 624.

<sup>256</sup> Das KFG wurde im BGBl I 2003 Nr. 39 vom 8.8.2003 bekannt gemacht.

<sup>257</sup> Die gewerbesteuerliche Sonderstellung der Kreditinstitute trägt mit Blick auf das Einlagengeschäft dem Umstand Rechnung, dass der Fremdkapitaleinsatz im Vergleich zu sonstigen Unternehmen ausgesprochen hoch ausfällt. Zu den Dauerschulden zählt nur Fremdkapital, welches zur Finanzierung von nicht-bankspezifischen Wirtschaftsgütern (vgl. § 19 GewStDV) aufgenommen wurde. Vgl. H. Schmid und T. Dammer (2003), ABS und KFG, S. 820.

<sup>258</sup> Vgl. KFG, Art. 3, Nr. 1 u. Art 4. Siehe auch § 35c Abs. 1 Nr. 2e GewStG i. V. m. § 19 GewStDV. Eine ausführliche Diskussion der Auswirkung des KFGs auf ABS-Transaktionen findet sich in H. Schmid und T. Dammer (2003), ABS und KFG, S. 820 ff.

<sup>259</sup> Kreditrisiken, die nicht durch ein Kreditinstitut begründet, sondern lediglich an eine Bank weiterveräußert worden sind, werden durch den Wortlaut des § 35c Abs. 1 Nr. 2e GewStG nicht erfasst.

## 24 Grundlagen der unternehmenswertorientierten Kreditrisikomessung

### 241 Kreditrisikomessung mit Kreditrisikomodellen

Kreditrisiken werden i. d. R. mit mathematischen Modellen<sup>260</sup> quantifiziert. Alternativ kann versucht werden, auf empirischer Basis die Performance eines rückwirkend zusammengestellten Vergleichsportfolios heranzuziehen und auf die gegenwärtige Problemstellung zu übertragen.<sup>261</sup> Ziel ist die gedankliche Vorwegnahme zukünftiger, möglicher Portfoliowerte sowie ggf. die Ableitung potentieller Verluste in Relation zu einem vorher zu definierenden Referenzwert. Die Vorwegnahme zukünftiger, möglicher Portfoliowerte muss für alle denkbaren relevanten Umweltzustände erfolgen. Die erfassten Umweltzustände werden einer ursachenbezogenen Betrachtungsweise des Risikos<sup>262</sup> folgend durch Umweltfaktoren<sup>263</sup> charakterisiert. Dazu sind alle Umweltfaktoren zu identifizieren, die einen wesentlichen Einfluss auf den Portfoliowert haben. Die modellmäßig abbildbaren Umweltfaktoren werden als Risikofaktoren bezeichnet. Die verwendeten Risikofaktoren können Marktrisikofaktoren<sup>264</sup>, Kreditrisikofaktoren, Liquiditätsrisikofaktoren u. a. Risikofaktoren darstellen. Im Rahmen der Kreditrisikoquantifizierung sind (messbare) *Kreditrisikofaktoren* von Interesse.<sup>265</sup> Die Kreditrisikofaktoren sind mit dem Portfoliowert mathematisch zu verknüpfen, so dass resultierende Konsequenzen für den Wert des Portfolios aufgrund von Kreditrisikofaktoränderungen bezüglich des gegenwärtigen Betrachtungszeitpunkts wertmäßig quantifiziert werden können. Wesentlicher Bestandteil der Kreditrisikoquantifizierung ist die Verknüpfung der erfassten Umweltzustände mit Eintrittswahrscheinlichkeiten. Das Ergebnis der Kreditrisikoquantifizierung ist folglich eine Wahrscheinlichkeitsverteilung des Portfoliowerts in einem zukünftigen, auch als Risikohorizont bezeichneten Zeitpunkt  $t_H$ . Aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung lassen sich Aussagen über die zukünftige Erfolgslage des Kreditinstituts oder – sofern das Kreditinstitut das Portfolio an ein SPV im Rahmen einer CDO-Transaktion abgetreten oder (Ausfall-)Risiken aus dem

---

<sup>260</sup> Bei einem Modell handelt es sich um eine strukturgleiche bzw. strukturähnliche Abbildung eines Realitätsausschnitts der Wirklichkeit. Neben der Beschreibung eines Sachverhalts bzw. Problems, erlaubt die Reduktion der Komplexität der Realität das Aufzeigen wesentlicher Ursache-Wirkung-Zusammenhänge. Einen besonderen Stellenwert nehmen mathematische Modelle ein. Sie erlauben eine besonders präzise Abbildung des interessierenden Sachverhalts, sofern quantitativ abbildbare Strukturen vorhanden sind. Vgl. F. Bea, E. Dichtl und M. Schweitzer (2000), Allgemeine BWL I, S. 71 f.

<sup>261</sup> Bspw. leitet die Ratingagentur FITCH sog. gestresste Ausfallraten zur Einschätzung des Kreditrisikos von CDO-Referenzportfolios aus historischen Beobachtungen ab. Vgl. M. Schmidtchen und H. Krämer-Eis (2002), CDO-Ratings der Agenturen, S. 2-4.

<sup>262</sup> Neben der ursachenbezogenen Risikobetrachtung wird häufig eine wirkungsbezogene Betrachtungsweise verwendet. Vgl. J. Völker (2000), VaR-Modelle, S. 33 f.

<sup>263</sup> Umweltfaktoren können als Gegebenheiten bezeichnet werden, die außerhalb der Kontroll- und Einflußmöglichkeiten des Wirtschaftssubjekts liegen und für das Ergebnis einer Entscheidung wichtig sind. Vgl. K. Spremann (2002), Wirtschaft, Investition und Finanzierung, S. 109.

<sup>264</sup> Als Marktrisikofaktoren kommen insbesondere Zinssätze für die Überlassung von Geld in Betracht.

<sup>265</sup> Grds. können auch nicht/schwer messbare Risiken bestehen. Dazu gehören bspw. mögliche Reputationsverluste. Vgl. A. Burger und A. Buchhart (2002), Risiko-Controlling, S. 46.

Portfolio mit derivativen Finanztiteln an Dritte übertragen hat – über den Risikogehalt emittierter CDOs ableiten. Bei Bedarf besteht die Möglichkeit, für Zwecke der Kommunikation und Interpretation (Risiko-)Kennzahlen (Risikomaße) zu berechnen.<sup>266</sup>

Die Wahl des *Risikohorizonts* ist abhängig vom Zweck der Kreditrisikoquantifizierung und kann prinzipiell Zeiträume von wenigen Tagen bis mehreren Jahren umfassen. Für die aufsichtsrechtliche Unterlegung von Kreditrisiken mit Eigenmitteln wird üblicherweise ein Zeitraum von einem Jahr zugrunde gelegt. Der gewählte Zeitraum repräsentiert die unterstellte maximale Haltedauer der Finanztitel im Falle schlagend werdender Kreditrisiken und berücksichtigt somit in begrenztem Maße das Liquiditätsrisiko.<sup>267</sup> Im Rahmen des Kreditrisikomanagements sind z. T. kürzere als auch mehrere geeignet gestaffelte Zeiträume auf Monatsbasis nicht nur sinnvoll, sondern auch notwendig. Beispielsweise ändert sich die Zusammensetzung revolvingender Referenzportfolios von synthetischen CDO-Strukturen im Zeitablauf nach Maßgabe zwischenzeitlich eintretender Ausfälle und/oder Bonitätsänderungen. Darüber hinaus sehen die Vertragsbedingungen häufig eine vorzeitige Amortisation vor, wenn kritische Verlusthöhen überschritten werden. Die Wahrscheinlichkeit der vollständigen Tilgung emittierter CDOs wird in diesen Fällen von Replenishmentmaßnahmen des CDO-Managements beeinflusst. Diese gilt es bei der Kreditrisikomessung zu berücksichtigen. Unabhängig von ökonomischen oder aufsichtsrechtlichen Gesichtspunkten kann der Risikohorizont durch die Verfügbarkeit von entscheidungsrelevantem Datenmaterial abhängen.<sup>268</sup>

Die Verknüpfung von Umweltzuständen und *Eintrittswahrscheinlichkeiten* kann auf der Basis der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der umweltzustandsbeschreibenden (Kredit-) Risikofaktoren erfolgen. Dabei ist zu beachten, dass die einzelnen Kreditrisikofaktoren bzw. die Kreditrisikofaktoränderungen nicht notwendigerweise unabhängig voneinander sind. Sämtliche Abhängigkeiten zwischen einzelnen Kreditrisikofaktoren und Kreditrisikofaktorgruppen werden durch eine multivariate Wahrscheinlichkeitsverteilung erfasst. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Abbildung von Kreditrisikofaktoränderungen ist als zentrale Aufgabe eines Kreditrisikomodells zu sehen.<sup>269</sup> Abhängigkeiten zwischen Kreditrisikofaktoränderungen sind die Ursache für Diversifikations- bzw. Portfolioeffekte. Mit dem

---

<sup>266</sup> Vgl. zu Kreditrisikomaßen R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 13-24.

<sup>267</sup> Vgl. M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2001), Risk management, S. 36.

<sup>268</sup> Im KMV-Modell sind mit der Verwendung von Marktdaten flexible Zeiträume auf Tagesbasis denkbar. Im Modell CREDITMETRICS™ hingegen sind aufgrund der Verwendung von Bonitätsänderungswahrscheinlichkeiten auf jährlicher Basis nur unter restriktiven Annahmen kürzere bzw. längere Zeiträume möglich. Ähnlich argumentieren M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2001), Risk management, S. 326.

<sup>269</sup> Vgl. P. Grundke (2000), Kreditrisikomodelle, S. 101 f.

Begriff des Portfolioeffekts ist die Risikoreduktion bei geeigneter Mischung der Kontrakte des Kreditportfolios gemeint. Lediglich positiv-deterministische Beziehungen zwischen allen Kontrakten des Kreditportfolios, bedingt durch identische Kreditrisikofaktorsensitivitäten, erlauben keine Risikoreduktionen.

Auf ökonomisch interpretierbare Kreditrisikofaktoren greifen die Unternehmenswertmodelle zurück. Die grundlegende Idee der Unternehmenswertmodelle besteht darin, die Wertentwicklung des Kreditportfolios an die Wertentwicklung der Aktiva der einzelnen Schuldner zu koppeln.<sup>270</sup> Kreditausfälle können auf unternehmensendogene Größen zurückgeführt werden. Der Klasse der Unternehmenswertmodelle steht die Klasse der reduzierten Modelle gegenüber.<sup>271</sup> Kennzeichnend für die reduzierten Modelle ist, dass Kreditausfälle durch unternehmensexogene Größen ausgelöst und nicht durch unternehmensendogene Größen erklärt werden. Die Wertentwicklung des Kreditportfolios ist nicht direkt mit der Wertentwicklung der Aktiva der einzelnen Schuldner verknüpft. Stattdessen wird die Vielzahl der möglichen Umweltfaktoren auf einige wenige Kreditrisikofaktoren reduziert.<sup>272</sup> Zu nennen ist zunächst die Ausfallwahrscheinlichkeit (engl.: Probability of Default, PD).<sup>273</sup> Die (kumulative) Ausfallwahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Schuldner innerhalb eines festgelegten Zeitraums insolvent wird. Der Begriff der „Insolvenz“ wird in den in der Literatur diskutierten Kreditrisikomodellen unterschiedlich interpretiert und definiert. Hier soll darunter der Zustand des Schuldners verstanden werden, in dem er nicht mehr in der Lage ist, seinen Zahlungsverpflichtungen fristgerecht und in voller Höhe nachzukommen. Die Begriffe Ausfall und Insolvenz werden z. T. synonym verwendet.<sup>274</sup> Sie sind jedoch zu trennen, wenn Kredite an einen einzelnen Schuldner eine unterschiedliche Seniorität aufweisen. Als zweiter Kreditrisikofaktor

---

<sup>270</sup> Die Klasse der Unternehmenswertmodelle wurde durch MERTON begründet. Vgl. R. Merton (1974), Pricing corporate debt, S. 450-455. Vorarbeiten leisteten F. Black und M. Scholes (1973), Options and corporate liabilities, S. 649 f. und R. Merton (1973), Option pricing, S. 160-169. Alternativ findet man die Bezeichnung „Structural Models“, „Firm’s Value Models“, „Asset-Value Models“ und „Contingent-Claims Models“. Für eine Übersicht verschiedener Modellansätze siehe J. Bohn (2000), Contingent-claims approaches, S. 56-65; G. Hayt (2000), How to price credit risk, S. 87 f. Prägnante Modellbeschreibungen und -beurteilungen – insbesondere der wichtigsten Unternehmenswertportfoliomodelle – finden sich in R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 27-45.

<sup>271</sup> Die Klasse der Reduced-Form Models geht auf P. Artzner und F. Delbaen (1995), Default risk insurance, S. 188-194, A. Jarrow und S. Turnbull (1995), Pricing credit risky derivatives, S. 55-82 sowie D. Duffie und K. Singleton (1999), Term structures of defaultable bonds, S. 690-700 zurück.

<sup>272</sup> Vgl. M. Beutler (2001), Kreditrisikomanagement von Banken, S. 23-24 u. 38-40.

<sup>273</sup> Anstelle der Ausfallwahrscheinlichkeiten werden im Rahmen von Reduced-Form Models häufig Intensitätsraten modelliert. Intensitätsraten lassen sich stets in Ausfallwahrscheinlichkeiten überführen. Deshalb wird z. T. anstelle des Begriffs der „Reduced-Form Models“ der Begriff der „Intensity-Rate Models“ verwendet. Beachtet werden sollte jedoch, dass nicht alle Reduced-Form Models Intensitätsraten (engl.: Intensity Rates, Hazard Rates) zulassen. Vgl. zur Definition von Intensitätsraten M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2000), Default risk: Mathematical tools, S. 4 f. Siehe auch Abschnitt 321.

<sup>274</sup> Vgl. bspw. R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 13.

ist der Verlust bei Ausfall (engl.: Loss Given Default, LGD) zu betrachten. Er gibt den erwarteten Anteil der ausstehenden Schuld an, der im Falle einer Insolvenz im Zuge des Insolvenzverfahrens nach Verwertung etwaiger Sicherheiten uneinbringlich verloren geht. Schließlich ist der ausstehende Betrag bei Ausfall (engl.: Exposure at Default, EAD) anzuführen. Er gibt unter Berücksichtigung von Kreditlimiten und -zusagen die zu erwartende Höhe der Schuld im Zeitpunkt der Insolvenz an. Während bei Unternehmenswertmodellen die Größen PD, LGD und EAD modellendogen<sup>275</sup> ermittelt werden (können), werden bei reduzierten Modellen modellexogene Kalibrierungstechniken mit Hilfe beobachteter Marktpreise und Marktdaten vorgenommen.

Abhängigkeiten zwischen Kreditrisikofaktoränderungen eines Schuldners bzw. Schuldtitels<sup>276</sup> und Abhängigkeiten zwischen Kreditrisikoparametern verschiedener Schuldner bzw. Schuldtitel werden mit variierender Präzision und modelltheoretischer Konzeptionen erfasst. Teilweise werden die Kreditrisikofaktoren in Abhängigkeit eines Ratings als universellen Kreditrisikoindikator modelliert.<sup>277</sup> Ratings teilen Kreditnehmer (Emittentenrating) und/oder deren Schuldtitel (Emissionsrating) gemäß ihrer Bonität in einzelne ordinal klassifizierte Bonitätsabstufungen ein.<sup>278</sup> Ratingagenturen wie MOODY'S oder STANDARD & POORS'S veröffentlichen regelmäßig historische Ausfallraten bezogen auf bestimmte Zeiträume.<sup>279</sup> Die historischen Ausfallraten dienen als Schätzer für die Ausfallwahrscheinlichkeiten. Modellerte Ratingmigrationsabhängigkeiten schlagen sich nieder in Abhängigkeiten zwischen den Ausfallwahrscheinlichkeiten von Schuldnern bzw. Schuldtiteln.

Dem Kreditportfolio ist ausgehend vom gegenwärtigen Betrachtungszeitpunkt für alle erfassten Umweltzustände am Risikohorizont ein Wert beizumessen. Für den Wert eines Portfolios bzw. der im Portfolio enthaltenen Positionen kommen mehrere Ansätze in Betracht. In der Bilanz nach HGB werden Kreditverträge üblicherweise als „Forderung an Kreditinstitute“ bzw. „Forderungen an Kunden“<sup>280</sup> in Höhe des *Nominalwertes* buchungstechnisch angesetzt.<sup>281</sup> Der Portfoliowert am Risikohorizont würde unter Berücksichtigung laufender Tilgungszahlungen aus den fortgeschriebenen *Buchwerten* der einzelnen Kredite

---

<sup>275</sup> Vgl. bspw. M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2001), Risk management, S. 360-366.

<sup>276</sup> Häufig bedient man sich hierbei der Einfachheit halber der Annahme der Unabhängigkeit.

<sup>277</sup> Als Beispiel dient das Kreditrisikomodell CREDITMETRICS™ von J. P. MORGAN. Vgl. JPMorgan (1997), CM™ Technical Document, S. 53-102.

<sup>278</sup> Am Beispiel von STANDARD & POOR'S reichen die Ratingklassen von „AAA“ (geringes Ausfallrisiko) bis „D“ (Ausfall bzw. Default). Vgl. H. Schierenbeck (2001), Bankmanagement I, S. 320 f.

<sup>279</sup> Vgl. Standard & Poors's (2001), Ratings performance 2000, S. 17.

<sup>280</sup> Vgl. Formblatt 1 zum RechKredV sowie §2 RechKredV (Formblätter).

<sup>281</sup> Vgl. §253 Abs. 1 HGB (Wertansätze der Vermögensgegenstände und Schulden) i. V. m. §340e HGB (Bewertung von Vermögensgegenständen).

ermittelt werden. Unterstellte Änderungen der Qualität einzelner Schuldtitel würden sich in Form von (Einzel-)Wertberichtigungen niederschlagen. Veränderungen der Kreditwürdigkeit eines Schuldners, die nicht zu Wertberichtigungen führen, werden von einer Kreditrisikomessung auf Basis von Buchwerten nicht erfasst. Es ließen sich lediglich Ausfallrisiken, nicht aber Bonitätsänderungsrisiken abbilden. Daher wird regelmäßig vom „Two-State“- bzw. „Default-Mode“-Ansatz gesprochen.<sup>282</sup> Der Default-Mode-Ansatz scheint lediglich für Kreditpositionen sinnvoll, die auf keinem Sekundärmarkt gehandelt werden können (sollen) und bis zum Verfall gehalten werden (Buy and Hold Strategie). Im Rahmen von synthetischen CDO-Transaktionen stehen jedoch gerade die Ausfallrisiken im Mittelpunkt des Interesses. Der Begriff des Sekundärmarktes ist unter Berücksichtigung derivativer Strukturen weiter zu fassen.

Als alternativer Wertansatz kommen *Marktpreise* in Betracht. Insbesondere im Rentenhandel bilden Marktpreise zeitnah die Einschätzung der Summe aller Marktteilnehmer bezüglich der Kreditwürdigkeit eines Schuldners bzw. der Qualität eines einzelnen Schuldtitels ab. Erkenntnisse über Kreditrisikoänderungen – auch marginaler Natur – würden sich unmittelbar in Marktpreisänderungen niederschlagen. Im Gegensatz zum „Two-State“-Ansatz, wird hier vom „Multi-State“-Ansatz gesprochen. Zwar erfassen synthetische CDOs keine Bonitätsänderungsrisiken, jedoch stellen Marktpreise, einen unverzichtbaren Inputfaktor im Rahmen der Modellkalibrierung dar.<sup>283</sup> Ziel ist es, eine Einschätzung des Marktes über Kreditrisikofaktorverteilungen zu bekommen. Ausgangspunkt bilden theoretische Bewertungsmodelle, wobei die Verteilungen der interessierenden Kreditrisikofaktoren so zu kalibrieren sind, dass die ermittelten *Modellpreise* mit den beobachteten Marktpreisen übereinstimmen.

Auf Basis der einführenden Diskussion sei präzisierend eine Definition des Begriffs „Kreditrisikomodell“ gegeben:

**Definition 2-3 (Kreditrisikomodell):** Ein Kreditrisikomodell ist ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell, das für einen bestimmten Risikohorizont die Verteilung des Wertes eines Portfolios kreditrisikobehafteter Finanztitel bzw. derivativer Strukturen, geschrieben auf das Portfolio der kreditrisikobehafteten Finanztitel, durch quantitative Erfassung des (gesamten) Kreditrisikos oder von Teilen des Kreditrisikos mit Hilfe von Kreditrisikofaktoren unter Berücksichtigung von Kreditrisikofaktorabhängigkeiten ermittelt.

---

<sup>282</sup> Vgl. FRSTF on Internal Credit Risk Models (1998), Credit risk models at U.S. banks, S. 18-21.

<sup>283</sup> Vgl. bspw. Abschnitt 522.

## 242 Unternehmenswertorientierte Kreditrisikomessung für einzelne Schuldtitel

### 2421 Verlustdefinitionen im einfachen Unternehmenswertansatz

Ausgangspunkt für die Überlegungen zur quantitativen Erfassung des Kreditrisikos im Rahmen des einfachen Unternehmenswertansatzes bildet eine Unternehmung  $i$  deren Vermögensgegenstände (Assets,  $A_i$ ) durch idealtypisches Eigenkapital (Equity,  $E_i$ ) einerseits und idealtypisches, gleichrangiges Fremdkapital (Debt,  $D_i$ ) andererseits finanziert ist. Annahmegemäß sind sämtliche Schuldtitel im Zeitpunkt  $T$  vollständig zu tilgen. Zwischenzeitliche Zinszahlungen fallen nicht an.<sup>284</sup> Darüber hinaus haften die Eigenkapitalgeber des Unternehmens nur beschränkt. Nachschusspflichten bestehen nicht. Unter diesen Annahmen kann die Unternehmung ihren Zahlungsverpflichtungen im Zeitpunkt  $T$  nicht vollständig nachkommen, wenn der Wert der Vermögensgegenstände (Unternehmenswert)  $A_{i,T}$  die nominellen Ansprüche der Gläubiger  $D_i^{NW}$  aus den Schuldtiteln in  $T$  unterschreitet. Die Ausfallindikatoren  $I_i$  lassen sich wie folgt definieren:

**Definition 2-4 (Ausfallindikator im einfachen Unternehmenswertmodell):** Eine Unternehmung  $i$  kann im Zeitpunkt  $T$  ihren Zahlungsverpflichtungen nicht vollständig nachkommen, d. h. es kommt zu Zahlungsausfällen, wenn gilt:

$$I_i = \begin{cases} 1 & \text{für } A_{i,T} < D_i^{NW}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Aus Sicht der Gegenwart ist der Unternehmenswert  $A_i$  in  $T$  jedoch unbekannt und stellt eine Zufallsvariable dar. Folglich ist auf (2.1) eine Wahrscheinlichkeitsfunktion zu definieren. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Unternehmung  $i$  ihren Zahlungsverpflichtungen im Zeitpunkt  $T$  nicht mehr nachkommen kann, wird als Ausfallwahrscheinlichkeit bezeichnet:

**Definition 2-5 (Ausfallwahrscheinlichkeit im einfachen Unternehmenswertmodell):** Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_i$  der Unternehmung  $i$  ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Marktwert der Vermögensgegenstände  $A_i$  im Verfallszeitpunkt  $T$  nicht hinreichend hoch ist, um die Ansprüche der Fremdkapitalgeber  $D_i^{NW}$  vollständig zu befriedigen:

$$p_i = \Pr[A_{i,T} < D_i^{NW}]. \quad (2.2)$$

Damit ist der Ausfallindikator  $I_i$  BERNOULLIVerteilt mit einer Erfolgswahrscheinlichkeit in Höhe von  $p_i$ :

$$I_i \sim Be(p_i). \quad (2.3)$$

---

<sup>284</sup> Das Fremdkapital der Unternehmung  $i$  kann folglich als ein einzelner Zerobond aufgefasst werden.

Ein Zahlungsausfall entsprechend der Definition 2-4 führt aus Gläubigersicht nicht notwendigerweise zum vollständigen Ausfall der gesamten Forderungen. Die Gläubigeransprüche können in Abhängigkeit vom Wert der Vermögensgegenstände zumindest teilweise befriedigt werden. Für den Verlust im Falle eines Ausfalls (Shortfall,  $S_{i,T}$ ) bzw. die Wiedergewinnung (Recovery,  $R_{i,T}$ ) bezogen auf den Nominalwert  $D_i^{NW}$  gelten:

$$S_{i,T}^{NW} = \begin{cases} D_i^{NW} - A_{i,T} & \text{für } A_{i,T} < D_i^{NW}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \text{ bzw.} \quad (2.4)$$

$$R_{i,T} = D_i^{NW} - S_{i,T} = \begin{cases} A_{i,T} & \text{für } A_{i,T} < D_i^{NW}, \\ D_i^{NW} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.5)$$

Für den Wert des Fremdkapitals im Verfallszeitpunkt  $T$  ergibt sich demzufolge:

$$D_{i,T} = \begin{cases} A_{i,T} & \text{für } A_{i,T} < D_i^{NW}, \\ D_i^{NW} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Alternativ könnte prinzipiell der Verlust auf den erwarteten Kapitaldienst bezogen und einer formalen Risikodefinition gefolgt werden:<sup>285</sup>

$$S_{i,T}^{EW} = \begin{cases} E(A_{i,T}) - A_{i,T} & \text{für } A_{i,T} < E(A_{i,T}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Sei zunächst der Einfachheit halber der Risikohorizont  $t_H$  der Kreditrisikoquantifizierung mit dem Verfallszeitpunkt  $T$  des Fremdkapitals identisch. Dann ergibt sich aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Werts des Fremdkapitals (2.6), respektive der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Verlustes (2.4) bzw. (2.7), das Potential des Kreditrisikos in Form des Ausfallrisikos. Den möglichen Fremdkapitalwerten, respektive den Verlusten, werden dazu im Folgenden Eintrittswahrscheinlichkeiten zuzuordnen sein.

Liegt der Verfallszeitpunkt jedoch nach dem Risikohorizont, liegt im einfachen Unternehmenswertansatz kein Ausfallrisiko vor. Es folgt lediglich aus der Veränderung des Unternehmenswertes innerhalb des Zeitabschnitts  $[0, t_H]$  eine Veränderung der Fähigkeit des Schuldners zur termingerechten Leistung der vereinbarten Zahlung in  $T$ . Zur Verdeutlichung kann in Abhängigkeit der unterstellten Entwicklung des Unternehmenswertes bis zum Zeitpunkt  $t_H$  das Fremdkapital unter Berücksichtigung des unsicheren Kapitaldienstes in  $T$  bewertet werden:

<sup>285</sup> Das formale Risiko ist die Gefahr einer zufälligen Abweichung des realisierten Ergebnisses vom Erwartungswert. Davon ist das materielle Risiko abzugrenzen. Vgl. J. Völker (2000), VaR-Modelle, S. 33 f.

$$D_{i,t_H} = D_{i,t_H}(A_{i,t_H}). \quad (2.8)$$

Die Neubewertung in  $t_H$  in Abhängigkeit des Unternehmenswertes berücksichtigt das Bonitätsänderungsrisiko und erfolgt nach Maßgabe der Fähigkeit des Schuldners zur termingerechten Leistung der vereinbarten Zahlungen in  $T$  unter Berücksichtigung möglicher Veränderungen des Unternehmenswertes innerhalb des Zeitabschnitts  $[t_H, T]$ , ausgehend von  $A_{i,t_H}$ . Eine Verlustdefinition per  $t_H$  unter Berücksichtigung des Bonitätsänderungsrisikos ist auf der Basis des Erwartungswertes des Fremdkapitals in  $t_H$  vorzunehmen:

$$S_{i,t_H}^{EW} = \begin{cases} E(D_{i,t_H}) - D_{i,t_H} & \text{für } D_{i,t_H} < E(D_{i,t_H}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.9)$$

## 2422 Unternehmenswertentwicklung als geometrisch BROWnsche Bewegung

Das Kreditrisiko im Unternehmenswertansatz ist direkt mit der Marktwertentwicklung des Unternehmenswertes  $A_i$  verbunden. Marktwerte verhalten sich jedoch nicht deterministisch. Ihre zukünftige Entwicklung ist aus gegenwärtiger Sicht unbekannt. Sie lässt sich als Sequenz von Zufallsvariablen in Abhängigkeit von der Zeit darstellen, respektive mittels eines stochastischen Prozesses beschreiben. Stochastische Prozesse können diskret als auch stetig in Bezug auf die Zeit definiert werden.<sup>286</sup> Der Prozess ist zeit-diskret, wenn die Prozessvariable nur zu bestimmten Zeitpunkten  $t=t_0, t_1, t_2 \dots t_n$  Wertänderungen erfahren kann. Der Prozess ist demgegenüber zeit-stetig, wenn Wertänderungen zu beliebigen Zeitpunkten  $t \in [0, T]$  möglich sind. Darüber hinaus können stochastische Prozesse diskret als auch stetig in Bezug auf die Prozessvariable sein, je nachdem ob diese lediglich bestimmte oder beliebige Werte innerhalb eines Wertebereiches annehmen kann:

**Definition 2-6 (Stochastischer Prozess):** Eine Folge von Zufallsvariablen  $\{X_t\}_{t \in \mathcal{I}}$ , induziert durch einen Parameter  $t$  aus einer geeigneten Indexmenge  $\mathcal{I}$ , definiert auf einen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , heißt stochastischer Prozess.<sup>287</sup>

In der Kapitalmarkttheorie haben sich die BROWnschen Bewegungen wegen der impliziten Normalverteilungsannahme der Prozessvariablen bzgl. eines bestimmten Zeitpunkts  $t$  als einfach handhabbar erwiesen. Daher bedient sich auch der einfache Unternehmenswertansatz dieser Klasse stochastischer Prozesse zur Modellierung des Unternehmenswertes.<sup>288</sup>

<sup>286</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden J. Hull (2003), Options, futures and other derivatives, S. 216-228.

<sup>287</sup> Vgl. B. Øksendal (2003), Stochastic differential equations, S. 10. Zu stochastischen Prozessen und Wahrscheinlichkeitsräumen siehe auch I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 1-6.

<sup>288</sup> Für einen einführenden Überblick über alternative stochastische Prozesse siehe C. Cox und S. Ross (1976), Alternative stochastic processes, S. 158-151 u. 155-163. Bereits mit wenigen Annahmen über das

**Definition 2-7 (BROWNSche Bewegung):** Die Zufallsvariable  $W_t = W(t)$  folgt einer BROWNSchen Bewegung, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:<sup>289</sup>

- (1)  $W_0 = 0$ ,
- (2)  $W_t$  ist eine kontinuierliche Funktion von  $t$  und
- (3) die Wertänderungen von  $W_t$  sind unabhängig normalverteilt mit  $E(W_t - W_s) = 0$  und  $Var(W_t - W_s) = t - s$  mit  $s < t$ .

Die BROWNSche Bewegung besitzt die sog. MARKOV-Eigenschaft, die besagt, „dass die Zukunft – bei bekannter Gegenwart – von der Vergangenheit unabhängig ist.“<sup>290</sup>

**Definition 2-8 (Unternehmenswertprozess):** Der Wert der Vermögensgegenstände des Unternehmens  $i$  (Unternehmenswert)  $A_{i,t} = A_i(t)$ , folgt einer geometrischen BROWNSchen Bewegung, wenn der stochastische Prozess  $\{A_{i,t}\}_{t \in [0,T]}$  durch die folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben werden kann:<sup>291,292</sup>

$$dA_{i,t} = \mu_{A,i} \cdot A_{i,t} \cdot dt + \sigma_{A,i} \cdot A_{i,t} \cdot dW_{i,t} \quad \text{mit :} \quad (2.10)$$

- $\mu_{A,i} \quad \cong$  Driftrate des Unternehmenswertes,
- $\sigma_{A,i} \quad \cong$  Volatilität des Unternehmenswertes,
- $\{W_{i,t}\}_{t \in [0,T]} \quad \cong$  BROWNSche Bewegung.

Stochastische Differentialgleichungen sind definiert für infinitesimal kleine Zeitintervalle. Konkrete Angaben über die Ausfallwahrscheinlichkeit können jedoch nur bei Kenntnis der Verteilung von  $A_{i,T}$  ausgehend vom aktuellen Wert  $A_{i,0}$  erfolgen. Folglich ist über  $dA_{i,t}$  zu integrieren. Man erhält die äquivalente stochastische Integralgleichung mit dem Startwert  $A_{i,0}$ :

$$A_{i,T} - A_{i,0} = \int_0^T dA_{i,u} = \int_0^T \mu_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot du + \int_0^T \sigma_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot dW_{i,u} . \quad (2.11)$$

Verhalten von Unternehmenswertprozessen lässt sich jedoch zeigen, dass die Verwendung der BROWNSchen Bewegung mit ihren Eigenschaften plausibel ist. Vgl. auch S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 164-170. Vgl. auch R. Merton (1990), Continuous-time finance, S. 57-80.

<sup>289</sup> Vgl. S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 177 f.

<sup>290</sup> P. Andres (1998), Black/Scholes-Optionspreisformel, S. 146. Für eine formale Definition siehe S. Karlin und H. Taylor (1975), Stochastic processes, S. 343.

<sup>291</sup> Vgl. J. Hull (2003), Options, futures and other derivatives, S. 219-221.

<sup>292</sup> Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung stellt den gesuchten stochastischen Prozess dar, d. h. gesucht ist eine (kontinuierliche) Folge von Zufallsvariablen  $\{A_{i,t}\}$ , so dass die (infinitesimal kleinen) Änderungen  $dA_{i,t}$  der Gleichung (2.10) genügen. Für eine Einführung in stochastische Differentialgleichungen siehe S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 252-272.

Der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (2.11) stellt ein stochastisches Integral über die Zufallsvariable  $W_t$  dar. Unter der Voraussetzung, dass das stochastische Integral wohl definiert<sup>293</sup> ist, muss (2.11) somit selber als Zufallsvariable mit einer Verteilung bezüglich des Zeitpunktes  $T$  interpretiert werden. Mit dem Rückgriff auf die BROWNSche Bewegung für die Modellierung von  $W_t$  ist das stochastische Integral ein ITÔ-Integral.<sup>294</sup> Unter Verwendung von ITÔ's Lemma lässt sich verifizieren, dass die folgende Funktion  $A_i(T, W_T)$  die Lösung von (2.11) liefert.<sup>295</sup>

$$A_{i,T} = A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \cdot T + \sigma_{A,i} \cdot W_{i,T}} . \quad (2.12)$$

### 2423 Optionspreistheoretische Parametrisierung der Unternehmenswertentwicklung

Problematisch ist, dass der Unternehmenswert  $A_{i,0}$  nicht am Kapitalmarkt beobachtbar ist. Lediglich das Eigenkapital von Unternehmen in der Rechtsform der Aktiengesellschaft kann börslich gehandelt und folglich am Markt beobachtet werden. Das gilt i. d. R. nicht für die Vermögensgegenstände.<sup>296</sup> Folglich lassen sich auch der Erwartungswert  $\mu_A$  und die Volatilität  $\sigma_A$  nicht unmittelbar aus einer beobachtbaren Zeitreihe berechnen. Diese Parameter müssen daher aus beobachtbaren Marktdaten abgeleitet werden.<sup>297</sup>

Bereits BLACK & SCHOLES<sup>298</sup> erkannten, dass Fremdkapitalgeber effektiv Eigentümer sämtlicher Vermögensgegenstände einer verschuldeten Unternehmung in der Rechtsform einer Kapitalgesellschaft sind, gleichzeitig aber die Stillhalterposition in einer europäischen Kaufoption auf die Vermögensgegenstände des Unternehmens einnehmen. Die Eigenkapitalgeber von Kapitalgesellschaften als Optionsinhaber besitzen effektiv das Recht, aber als Konsequenz ihrer beschränkten Haftung nicht die Pflicht zur Bedienung der Ver-

<sup>293</sup> Das stochastische Integral stellt im hier verwendeten Kontext ein ITÔ-Integral dar. Das ITÔ-Integral ist wohl definiert, wenn  $f(A_{i,t}, t) = \sigma_{A,i} \cdot A_{i,t}$  eine stetige, adaptive Funktion ist. Zudem muss  $E(\int_0^T (\sigma_{A,i} \cdot A_{i,t})^2 dt) < \infty$  gelten. Beide Bedingungen sind mit (2.10) erfüllt. Siehe zu den Existenzbedingungen S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 226.

<sup>294</sup> Das ITÔ-Integral ist der Grenzwert der Summe der finiten Intervallapproximationen  $\sigma_{A,i} \cdot A_{i,t} \cdot \Delta W_{i,t}$  im quadratischen Mittel, d. h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{k=1}^n \sigma_{A,i} \cdot A_{i,k-1} \cdot (W_{i,k} - W_{i,k-1}) - \int_0^T \sigma_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot dW_{i,u} \right]^2 = 0 .$$

Zum ITÔ-Integral siehe S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 204-229.

<sup>295</sup> Vgl. Anlage 2.

<sup>296</sup> Ein theoretischer Sonderfall ergibt sich, wenn ein Unternehmen das Kapital ausschließlich in börslich notierte Wertpapiere investiert hat, deren Wertentwicklungen mit Hilfe von geometrischen BROWNSchen Bewegungen beschrieben werden können. Vgl. F. Black und M. Scholes (1973), Options and corporate liabilities, S. 649 f.

<sup>297</sup> Als Alternative könnten die Unternehmenswerte mit Hilfe von fundamentalanalytischen Unternehmensbewertungsmodellen ermittelt werden. Da jedoch für die Modellierung einer BROWNSchen Bewegung stetige Zeitreihen benötigt werden, erscheint dieser Weg wenig sinnvoll.

<sup>298</sup> Vgl. F. Black und M. Scholes (1973), Options and corporate liabilities, S. 649 f.

bindlichkeiten und werden folglich die Schuld nur begleichen, respektive die Kaufoption ausüben, wenn der Wert der Vermögensgegenstände mindestens den Zahlungen des Kapitaldienstes entspricht. Das Eigenkapital lässt sich folgerichtig als europäische Kaufoption auf die Vermögensgegenstände mit einem Basispreis in Höhe der Verbindlichkeiten darstellen, wobei der Verfallszeitpunkt der Kaufoption und der Fälligkeitstag der Verbindlichkeiten übereinstimmen müssen:

$$E_{i,T} = C_{i,T} = \max[A_{i,T} - D_i^{NW}; 0]. \quad (2.13)$$

Bei konstantem Buchwert der Verbindlichkeiten stellt der Wert der Vermögensgegenstände die alleinige erklärende Variable für den Zahlungsausfall der Unternehmung  $i$  dar. Darüber hinaus bestimmen die Vermögensgegenstände maßgeblich den Wert von Eigen- und Fremdkapital im Zeitpunkt  $t_0$ . Eine Re-Investition des gesamten Kapitals in wesentlich volatilere Vermögensgegenstände führt aufgrund des asymmetrischen Zahlungsprofils von  $\max[A_{i,T} - D_{i,T}; 0]$  ceteris paribus zu einer Erhöhung des Marktwertes des Eigenkapitals. Begründet werden kann dies mit einer erhöhten Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der Vermögensgegenstände in  $T$  den Buchwert der Verbindlichkeiten übersteigt, bzw., sofern die Differenz bereits positiv ist, sich diese weiter erhöht. Zwar erhöht sich ebenfalls die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $C_i$  (weit) aus dem Geld fällt, jedoch hat dies aufgrund des minimalen Payoffs in Höhe von null keine negativen Auswirkungen auf den Wert des Eigenkapitals. Diametral dazu stellt sich die Situation für die Fremdkapitalgeber dar. Sie partizipieren aufgrund des kontraktmäßig festgelegten Rückzahlungsanspruchs nicht von einer erhöhten Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitpunkt  $T$  der Wert der Vermögensgegenstände den Buchwert der Verbindlichkeiten übersteigt. Vielmehr wirkt sich die damit einhergehende Erhöhung der Wahrscheinlichkeit eines Zahlungsausfalls negativ auf den Marktwert des Fremdkapitals aus. Risikoreiche Investitionsstrategien führen demnach zu Marktwertsteigerungen des Eigenkapitals zu Lasten der Fremdkapitalgeber.<sup>299</sup> Damit lässt sich sowohl der Wert des Eigenkapitals  $E_i$  als auch der Wert des Fremdkapitals  $F_i$  in jedem beliebigen Zeitpunkt  $t \in [0, T]$  als derivative Funktion in Abhängigkeit vom Unternehmenswert  $A_i$  und der Zeit  $t$  schreiben:

$$E_{i,t} = E_i(A_i(t), t), \quad (2.14)$$

$$D_{i,t} = D_i(A_i(t), t). \quad (2.15)$$

---

<sup>299</sup> Für ein anschauliches Zahlenbeispiel siehe P. Crosbie und J. Bohn (2003), Modeling default risk, S. 11 f.

Mit Hilfe von ITÔ's Lemma<sup>300</sup> lässt sich auf die stochastischen Prozesse von Eigen- und Fremdkapital in Abhängigkeit vom stochastischen Prozess des Unternehmenswertes schließen.<sup>301</sup> Für das Eigenkapital erhält man:

$$dE_{i,t} = \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_{i,t}}{\partial A_{i,t}^2} A_{i,t}^2 \sigma_{A,i}^2 + \frac{\partial E_{i,t}}{\partial A_{i,t}} A_{i,t} \mu_{A,i} + \frac{\partial E_{i,t}}{\partial t} \right]}_{\mu_{E,i,t} \cdot E_{i,t}} \cdot dt + \underbrace{\sigma_{A,i} A_{i,t} \frac{\partial E_{i,t}}{\partial A_{i,t}}}_{\sigma_{E,i,t} \cdot E_{i,t}} \cdot dW_{i,t}. \quad (2.16)$$

Ziel des optionspreistheoretischen Ansatzes zur Quantifizierung des Kreditrisikos ist es folglich, aus beobachtbaren Marktdaten für Eigen- bzw. Fremdkapitaltitel auf den aktuellen Wert der Vermögensgegenstände  $A_{i,0}$  und die Parameter  $\mu_{A,i}$  sowie  $\sigma_{A,i}$  des stochastischen Prozesses (2.10) zu schließen.

Die Gleichungen (2.14) und (2.15) enthalten implizit die Annahme der Irrelevanz der Kapitalstruktur bezüglich des Marktwertes der Unternehmung. Die Irrelevanz manifestiert sich in der definierten Abhängigkeit des Marktwertes des Eigenkapitals sowohl von der Zeit  $t$  als auch vom Wert der Vermögensgegenstände  $A_i$ , wohingegen der Wert der Vermögensgegenstände lediglich von  $t$ , nicht aber von  $E_i$ , abhängt.<sup>302</sup> Bereits MODIGLIANI & MILLER<sup>303</sup> argumentierten, dass unter der Annahme des perfekten Kapitalmarktes<sup>304</sup> der Verschuldungsgrad als Quotient aus den Marktwerten des Fremd- und Eigenkapitals keinen Einfluss auf den Marktwert der Unternehmung hat. Unter der Annahme der Irrelevanz teilt sich der Marktwert eines Unternehmens auf die Marktwerte von Eigen- und Fremdkapital auf, ohne selbst von diesen beeinflusst zu werden:

**Definition 2-9 (Unternehmenswertdisposition):** Der Wert der Vermögensgegenstände des Unternehmens  $i$  (Unternehmenswert) im Zeitpunkt  $t$  teilt sich wie folgt auf das Eigen- und Fremdkapital auf:<sup>305</sup>

$$A_i(t) = E_i(A_{i,t}, t) + D_i(A_{i,t}, t). \quad (2.17)$$

<sup>300</sup> ITÔ's Lemma ermöglicht die Ableitung stochastischer Differentialgleichung für Funktionen in Abhängigkeit von stochastischen Prozessen. Für eine Einführung siehe S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 230-251.

<sup>301</sup> Die Form des stochastischen Prozesses von  $E_{i,t}$  wird im Folgenden von elementarer Bedeutung für die Schätzung der Volatilität  $\sigma_{A,i}$  sein.

<sup>302</sup> Eine simultane Lösung der Gleichung (2.14) nach  $A_{i,t}$  und  $E_{i,t}$  ist daher nicht notwendig. Vgl. auch die Argumentation von R. Merton (1974), Pricing corporate debt, S. 460-467.

<sup>303</sup> Siehe F. Modigliani und M. Miller (1958), Cost of capital, S. 267-271.

<sup>304</sup> Die Annahme des perfekten Kapitalmarktes impliziert die Abwesenheit von Transaktionskosten, Steuern, Margins sowie Leerverkaufsbeschränkungen. Darüber hinaus können alle Wirtschaftsobjekte zu einem risikofreien Zinssatz in beliebiger Höhe Geld anlegen und aufnehmen. Schließlich sind alle Finanztitel in beliebig kleinen Mengen handelbar.

<sup>305</sup> Es sei darauf hingewiesen, dass der Vermögenswert  $A_i$  zwar von  $t$ , nicht aber von  $E_i$  oder  $D_i$  abhängt.

Das einfache Unternehmenswertmodell kann zur Ermittlung der Marktwerte in (2.17) auf Grund der unterstellten einfachen Finanzierungsstruktur auf das Optionsbewertungsmodell nach BLACK & SCHOLES<sup>306</sup> zurückgreifen.<sup>307</sup> Als Basisinstrument (Underlying) ist der Unternehmenswert heranzuziehen. Das Modell basiert auf dem Aufbau einer selbstfinanzierenden, stetig anzupassenden Handelsstrategie, welche die Zahlungsstruktur der Option im Zeitpunkt  $T$  unter der Bedingung der Arbitragefreiheit dupliziert.<sup>308</sup> Neben den bereits getroffenen Annahmen bezüglich des stochastischen Prozesses für den Unternehmenswert und der Gültigkeit der Irrelevanzthesen zur Kapitalstruktur bedarf die Durchführung einer stetig anzupassenden selbstfinanzierenden Handelsstrategie weiterer Annahmen.<sup>309</sup> Zunächst muss (1) ein kontinuierlicher Handel der Vermögensgegenstände des Unternehmens  $i$  stattfinden. Darüber hinaus muss (2) der Geld- und Kapitalmarkt perfekt sein.<sup>310</sup>

Bemerkenswert ist, dass die Verletzung der Annahme (1) in der Praxis der eigentliche Grund für die Verwendung des optionspreistheoretischen Ansatzes zur Parametrisierung des Unternehmenswertprozesses ist.<sup>311</sup> Mit der Verletzung der Annahme eines kontinuierlichen Handels der Vermögenswerte einer Unternehmung ist die Möglichkeit einer arbitrage- und präferenzfreien Optionsbewertung nach BLACK, SCHOLES & MERTON nicht mehr gegeben. Dennoch erfreut sich der optionspreistheoretische Ansatz großer Beliebtheit.

Die Marktwerte von Eigen- und Fremdkapital ermitteln sich in Anlehnung an MERTON<sup>312</sup> gemäß folgender Gleichungen:

$$E_{i,0}(A_{i,0}) = A_{i,0} \cdot F_{SN}(+d_1) - D_i^{NW} \cdot e^{-r_{fk} \cdot T} \cdot F_{SN}(+d_2), \quad (2.18)$$

$$D_{i,0}(A_{i,0}) = A_{i,0} \cdot F_{SN}(-d_1) + D_i^{NW} \cdot e^{-r_{fk} \cdot T} \cdot F_{SN}(+d_2), \quad (2.19)$$

mit :

$$d_1 = \ln\left(\frac{A_{i,0}}{D_i^{NW}}\right) + \left(r_{fk} + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2\right) \cdot T / \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}, \quad d_2 = d_1 - \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}. \quad (2.20)$$

<sup>306</sup> Vgl. F. Black und M. Scholes (1973), Options and corporate liabilities, S. 644.

<sup>307</sup> Eine Einführung in die Übertragung des BLACK/SCHOLES-Optionspreismodells auf die Bewertung von ausfallrisikobehafteten Fremdkapitaltiteln findet sich bspw. in M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2001), Risk management, S. 360-368.

<sup>308</sup> Alternativ kann eine risikolose Position aus dem Derivat und dem Underlying (Hedgeportfolio) aufgebaut werden. Das Hedgeportfolio bedarf ebenso wie die Handelsstrategie einer stetigen Anpassung (dynamisches Hedging). Siehe dazu R. Merton (1973), Option pricing, S. 164.

<sup>309</sup> Für eine vollständige Auflistung aller notwendigen Annahmen der BLACK/SCHOLES-Optionspreisformel siehe F. Black und M. Scholes (1973), Options and corporate liabilities, S. 640. Für eine Auflistung der Annahmen im Rahmen der Übertragung des BLACK/SCHOLES-Optionspreismodells auf Corporate Debt siehe R. Merton (1974), Pricing corporate debt, S. 450.

<sup>310</sup> Der perfekte Kapitalmarkt ist auch für die MODIGLIANI-MILLER-Thesen unverzichtbar. Vgl. Fn. 304.

<sup>311</sup> Vgl. Abschnitt 2422.

<sup>312</sup> Vgl. R. Merton (1974), Pricing corporate debt, S. 454.

Durch Beobachtung des Marktwertes des Eigenkapitals oder des Marktwertes des Fremdkapitals (sofern öffentlich notiert) lässt sich mit Hilfe von (2.18) oder (2.19) auf den Unternehmenswert schließen. Es sei darauf hingewiesen, dass die Bewertungsgleichungen den risikofreien Zinssatz anstelle der Driftrate des Unternehmenswertprozesses enthalten. Ursache ist die arbitrage- und präferenzfreie Bewertung mit Hilfe der Duplikation. Die Bewertung erfolgt unter der Annahme einer „risikoneutralen Welt“. Die Kreditrisikomesung hingegen bezieht die reale Driftrate mit ein und erfolgt in der „realen Welt“.

Der einzige unbekannt Parameter ist die Volatilität des Unternehmenswertes. Das einfache Unternehmenswertmodell schätzt die Volatilität des Unternehmenswertes aus der Volatilität des Eigenkapitals.<sup>313</sup> Aus der stochastischen Differentialgleichung für den Unternehmenswert (2.16) folgt für einen infinitesimal kleinen Zeitraum, dass die Volatilität des Eigenkapitals dem Produkt aus der infinitesimalen Elastizität des Eigenkapitals bezogen auf den Unternehmenswert und der Volatilität des Unternehmenswertes entspricht:

$$\sigma_{E,i} = \sigma_{A,i} \cdot \underbrace{\frac{A_{i,t}}{E_{i,t}} \cdot \frac{\partial E_{i,t}}{\partial A_{i,t}}}_{\eta_{i,t,E/A}}. \quad (2.21)$$

Im Zeitpunkt  $t=0$  lässt sich die erste partielle Ableitung des Eigenkapitals  $E_{i,0}$  nach dem Unternehmenswert  $A_{i,0}$  mit Hilfe der Black/Scholes-Optionspreisformel (2.18) bestimmen. Das Ergebnis ist das Hedge-Ratio  $F_{SN}(d_1)$ :<sup>314</sup>

$$\eta_{i,0,E/A} = \frac{A_{i,0}}{E_{i,0}} \cdot F_{SN}(d_1). \quad (2.22)$$

Eine simultane Lösung der Gleichungen (2.18) und (2.21) i. V. m. (2.22) führt zu einer Schätzung für den Unternehmenswert  $A_{i,0}$  und die Unternehmenswertvolatilität  $\sigma_{A,i}$ . Eine Zeitreihenanalyse für den Unternehmenswert auf Basis des optionspreistheoretischen Ansatzes liefert schließlich einen Schätzer für die reale Driftrate  $\mu_{A,i}$ . Damit ist der stochastische Prozess für den Unternehmenswert (2.12) vollständig bestimmt.<sup>315</sup>

<sup>313</sup> Alternative könnte auch das Fremdkapital zur Volatilitätsschätzung herangezogen werden. Voraussetzung ist, dass die Fremdkapitaltitel einer börslichen Preisbildung unterliegen.

<sup>314</sup> Vgl. M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2001), Risk management, S. 367; P. Crosbie und J. Bohn (2003), Modeling default risk, S. 16. Zum Hedge-Ratio der BLACK/SCHOLES-Optionspreisformel siehe J. Hull (2003), Options, futures and other derivatives, S. 302-304.

<sup>315</sup> Für alternative Methoden der Unternehmenswertprozessparametrisierung siehe E. Jones, S. Mason und E. Rosenfeld (1984), Empirical investigation of contingent claims analysis, S. 615-618.

## 2424 Verlustverteilungen im einfachen Unternehmenswertansatz

Die Verteilung des Fremdkapitalwerts  $D_i$  bzw. die Verteilung des Verlusts  $S_i$  hängt im Unternehmenswertansatz direkt von der Verteilung des Unternehmenswertes  $A_i$  im Risikohorizont  $t_H$  ab. Aus Gleichung (2.12) folgt, dass die logarithmierten Wertänderungen des Werts des Unternehmens  $i$ , d. h. die kontinuierlichen Unternehmenswertrenditen, bzgl. des Zeitpunkts  $t$  normalverteilt sind:

$$\ln\left(\frac{A_{i,t}}{A_{i,0}}\right) \sim N\left(\left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right) \cdot t, \sigma_{A,i}^2 \cdot t\right). \quad (2.23)$$

Folglich ist der Unternehmenswert im Zeitpunkt  $t$  lognormalverteilt<sup>316</sup>:

$$A_{i,t} \sim LN\left(\ln A_{i,0} + \left(\mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2}\right) \cdot t, \sigma_{A,i}^2 \cdot t\right). \quad (2.24)$$

(a) Fallen der Risikohorizont  $t_H$  der Kreditrisikoquantifizierung und der Verfallszeitpunkt  $T$  des Fremdkapitals zusammen, ist die Dichtefunktion für den Wert des Fremdkapitals  $D_{i,T}$  (2.6) für Ausprägungen zwischen null und  $D_i^{NW}$  wegen  $A_{i,T} = D_{i,T}$  für  $A_{i,T} < D_i^{NW}$  identisch mit der Dichtefunktion für den Unternehmenswert  $A_{i,T}$  (Abb. 2-7, Quadranten I u. II). Da die Fremdkapitalgeber maximal den zur Verfügung gestellten Nominalbetrag erhalten, konzentriert sich die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse für  $A_{i,T} \geq D_i^{NW}$  auf der Stelle  $D_i^{NW}$ . Die (gemischte) Dichtefunktion  $f(\cdot)$  für  $D_{i,T}$  lautet deshalb wie folgt:

$$f_{D_{i,T}}(u) = \begin{cases} f_{A_{i,T}}(u) & \text{für } 0 \leq u < D_i^{NW}, \\ 1 - F_{A_{i,T}}(u) & \text{für } u = D_i^{NW}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.25)$$

Die Verlustverteilung ist abhängig vom gewählten Referenzwert  $D_{i,T}^*$  mit  $0 < D_{i,T}^* \leq D_i^{NW}$ . Wird der Erwartungswert  $E(D_{i,T})$  als Referenzwert verwendet, wird lediglich das Verlustpotential des materiellen Ausfallrisikos quantifiziert. Wird hingegen der Nominalwert

<sup>316</sup> Eine Zufallsvariable ist lognormalverteilt, wenn der (natürliche) Logarithmus der Zufallsvariable normalverteilt ist.

<sup>317</sup> Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird zwar mit dem Erwartungswert und der Varianz der logarithmierten Zufallsvariablen  $\ln A_{i,t}$  parametrisiert, Erwartungswert und Varianz der lognormalverteilten Zufallsvariablen  $A_{i,t}$  errechnen sich jedoch gem.

$$A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot t} \quad \text{bzw.} \\ A_{i,0}^2 \cdot e^{2 \cdot \mu_{A,i} \cdot t} \left( e^{\sigma_{A,i}^2 \cdot t} - 1 \right).$$

Die Lognormalverteilung ist nicht vollständig durch den Erwartungswert und die Varianz determiniert. Vielmehr sind auch höhere (zentrale) Momente in die Betrachtung miteinzubeziehen. Ursache ist die Rechtsschiefe der Lognormalverteilung. Vgl. K. Shimizu und E. Crow (1988), Lognormal distribution, S. 9-12.

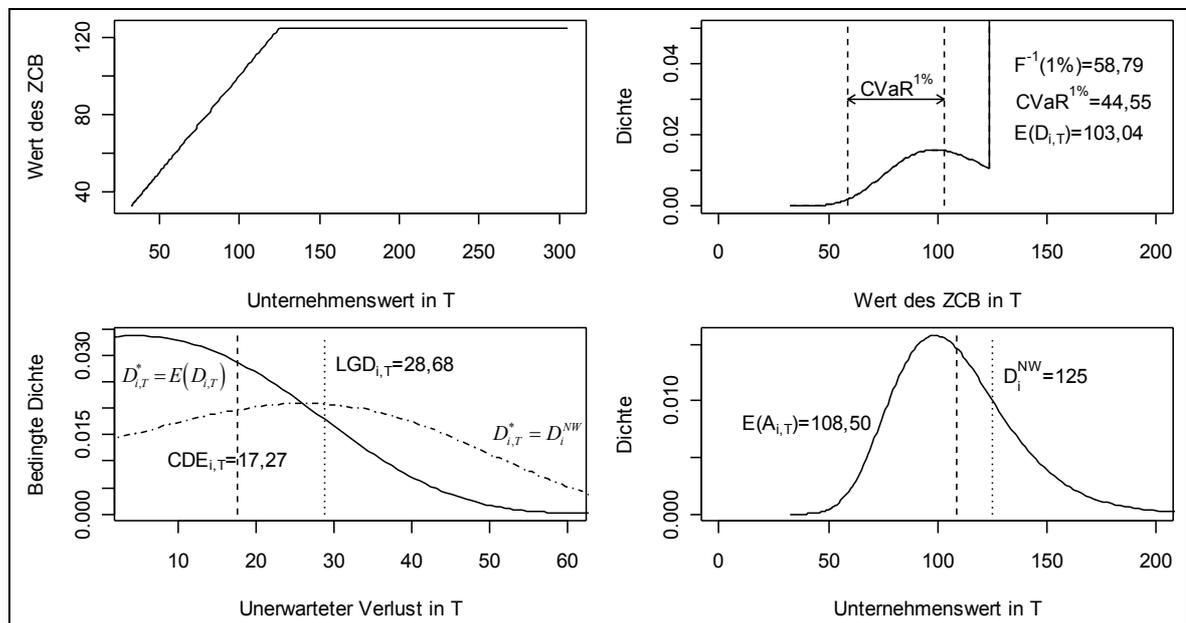
als Referenzwert gewählt, setzt sich das quantifizierte Ausfallrisiko aus einer materiellen Komponente (erwarteter Verlust) und einer formalen Komponente (unerwarteter Verlust/Gewinn) zusammen. Allgemeingültig lässt sich die (gemischte) Dichtefunktion  $f(\cdot)$  der Wahrscheinlichkeitsverteilung für  $S_{i,T}$  (2.4)/(2.7) wie folgt darstellen.<sup>318</sup>

$$f_{S_{i,T}}(u) = \begin{cases} f_{D_{i,T}}(D_{i,T}^* - u) & \text{für } 0 < u \leq D_{i,T}^*, \\ 1 - F_{D_{i,T}}(u) & \text{für } u = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Der Verlust liegt genau dann zwischen null und  $D_{i,T}^*$ , wenn  $A_{i,T} < D_{i,T}^*$  gilt (vgl. (2.4) und (2.7)). Der Verlust ist genau dann null, wenn  $A_{i,T} \geq D_{i,T}^*$  gilt. Damit lässt sich für die bedingte Verlustverteilung (Abb. 2-7, Quadrant III<sup>319</sup>) schreiben:

$$f_{S_{i,T}|A_{i,T} < D_{i,T}^*}(u) = \begin{cases} f_{D_{i,T}}(D_{i,T}^* - u) \cdot \Pr[A_{i,T} < D_{i,T}^*]^{-1} & \text{für } A_{i,T} < D_{i,T}^*, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.27)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[A_{i,T} < D_{i,T}^*]$  zur Berechnung der bedingten Verlustverteilung ergibt sich als Fläche unter der Dichtefunktion  $f_{A_{i,T}}(\cdot)$  links vom Referenzwert  $D_{i,T}^*$ .



**Abb. 2-7: Wert- und Verlustverteilung in  $t_H=T$  im einfachen Unternehmenswertansatz**

Potential des Ausfallrisikos eines Zero-Coupon Bonds (ZCB) mit einem Nominalwert von 125 Währungseinheiten, einer (gegenwärtigen) Restlaufzeit von 1 Jahr für einen Risikohorizont von 1 Jahr. Der risikolose Zinssatz beträgt diskret 6% p. a. Das Risiko in Form der Volatilität wird mit 10 % p. a. entgolten. Die Volatilität beträgt 25 % p. a. Die Driftrate des Unternehmenswertes weist folglich einen Wert von 0,0816 auf.

<sup>318</sup> Für (2.26) wurde folgender Satz verwendet: „Ist  $Y=X+a$  und hat  $X$  die Dichte  $f$ , so hat  $Y$  die Dichte  $g(y)=f(y-a)$ .“ U. Krenzel (2003), Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 141. Wird der Verlust definiert durch  $V = D_{i,T} - D_{i,T}^*$  mit  $D_{i,T} > D_{i,T}^*$ , dann lassen sich  $X = D_{i,T}$  und  $a = -D_{i,T}^*$  setzen. Es folgt  $g(v) = f(D_{i,T}^* + v)$ . Spiegelt man die Dichte an der Ordinate mit  $U = -V$ , folgt  $f(D_{i,T}^* + v) = f(D_{i,T}^* - u)$ .

<sup>319</sup> Die durchgezogene Kurve bezieht sich auf  $D_{i,T}^* = E(D_{i,T})$ . Für  $D_{i,T}^* = D_i^{NW}$  gilt die gestrichelte Kurve.

(b) Liegt der Risikohorizont  $t_H$  der Kreditrisikoquantifizierung vor dem Verfallszeitpunkt  $T$  des Fremdkapitals, sind die Fremdkapitaltitel in Abhängigkeit des Unternehmenswerts  $A_i$  im Risikohorizont  $t_H$  neu zu bewerten. Dazu ist lediglich die Bewertungsgleichung (2.19) auf den Risikohorizont  $t_H$  unter Beachtung der verkürzten Restlaufzeit ( $T-t_H$ ) anzuwenden (Abb. 2-8, Quadrant IV):<sup>320</sup>

$$D_{i,t_H}(A_{i,t_H}) = A_{i,t_H} \cdot F_{SN}(-d_1) + D_i^{NW} \cdot e^{-r_{fk}(T-t_H)} \cdot F_{SN}(+d_2). \quad (2.28)$$

Zur Ermittlung der Dichtefunktion  $f(\cdot)$  der Wahrscheinlichkeitsverteilung von  $D_{i,t_H}$  (2.8), respektive (2.28), ist zu beachten, dass die Fläche unterhalb der Dichte  $f_{A_{i,t_H}}(v)$  für eine infinitesimal kleine Änderung  $dv$  mit der Fläche unterhalb der Dichte  $f_{D_{i,t_H}}(u)$  für eine entsprechende infinitesimal kleine Änderung  $du = D'_{i,t_H}(v) \cdot dv$  übereinstimmen muss:<sup>321</sup>

$$\begin{aligned} \Pr[A_{i,t_H} \in [v, v + dv]] &= \Pr[D_{i,t_H} \in [u, u + du]] \\ \text{mit:} & \\ u &= D_{i,t_H}(v), \\ du &= D'_{i,t_H}(v) \cdot dv. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Damit erhält man für die Dichtefunktion  $f_{D_{i,t_H}}(u)$ :<sup>322</sup>

$$f_{D_{i,t_H}}(u) = \frac{f_{A_{i,t_H}}(v)}{D'_{i,t_H}(v)} = \frac{f_{A_{i,t_H}}(D_{i,t_H}^{-1}(u))}{D'_{i,t_H}(D_{i,t_H}^{-1}(u))}. \quad (2.30)$$

Da sich jedoch die Gleichung (2.28) nicht explizit nach dem Unternehmenswert  $A_{i,t_H}$  auflösen lässt, kann die Umkehrfunktion  $D_{i,t_H}^{-1}(u)$  nicht analytisch angegeben werden. Folglich lässt sich auch (2.30) nicht analytisch darstellen. Approximativ – rechtechnisch jedoch aufwendig – lassen sich numerische Iterationsverfahren heranziehen.<sup>323</sup>

<sup>320</sup> Einen leicht modifizierten optionspreistheoretischen Bewertungsansatz schlägt die KMV Corporation vor. Der Ausfallgrund und die Ausfallwahrscheinlichkeit bleiben unverändert. Allerdings wird der Pay-off nicht endogen in Abhängigkeit des Unternehmenswertes, sondern als Digital Option mit einer exogen vorgegebenen Recovery Rate modelliert. Vgl. J. Bohn (2000), Contingent-claims approaches, S. 58-60. Eine weitergehende Diskussion des Ansatzes findet sich in M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2001), Risk management, S. 382-384 u. 392-395. Für  $d_1$  und  $d_2$  vgl. (2.20).

<sup>321</sup> Die Ableitung  $D'_{i,t_H}(v)$  muss für den gesamten Wertebereich von  $A_{i,t_H}$  definiert und strikt positiv sein. Vgl. U. Krengel (2003), Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 141. Diese Bedingung ist für  $D_{i,t_H}(A_{i,t_H})$  gem. (2.28) aufgrund von

$$D'_{i,t_H} = F_{SN}(-d_1) > 0 \quad \text{für} \quad A_{i,t_H} > 0$$

stets erfüllt. Vgl. auch die Analysen von R. Merton (1974), Pricing corporate debt, S. 455.

<sup>322</sup> Vgl. U. Krengel (2003), Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 141.

<sup>323</sup> Wie bei der Ermittlung von impliziten Volatilitäten von beobachtbaren Optionspreisen kommen dabei das NEWTON-RAPHSON-Verfahren und die Methode der Bisektion zur Anwendung. Vgl. J. Holst und S. Jortzik (1999), Volatilitätsfutures, S. 6 f. sowie die dort angegebene Literatur.

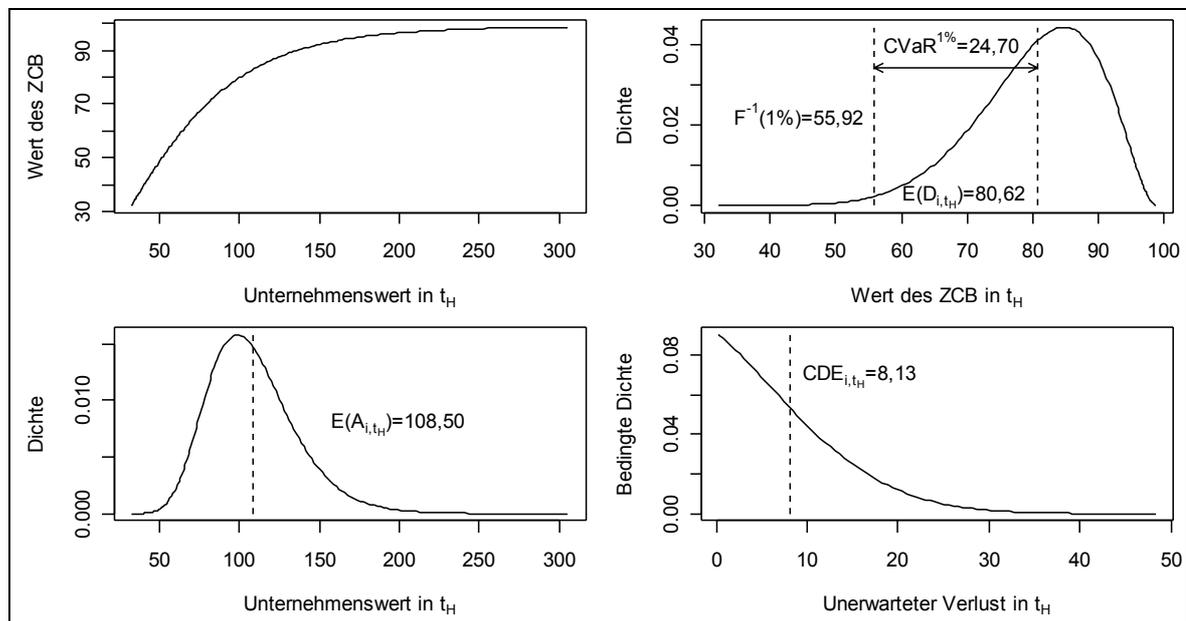
Die Verlustverteilung ist abhängig vom gewählten Referenzwert  $D_{i,T}^*$  mit  $0 < D_{i,t_H}^* \leq \lim_{A_{i,t_H} \rightarrow \infty} D_{i,t_H}(A_{i,t_H})$ . Anders als in (2.26) ist die Verwendung des Nominalwertes als Referenzwert wenig sinnvoll. Der Erwartungswert des Fremdkapitals kann hingegen problemlos herangezogen werden:

$$f_{S_{i,t_H}}(u) = \begin{cases} f_{D_{i,t_H}}(D_{i,t_H}^* - u) & \text{für } 0 < u \leq D_{i,t_H}^*, \\ 1 - F_{D_{i,t_H}}(u) & \text{für } u = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.31)$$

Der Verlust liegt genau dann zwischen null und  $D_{i,t_H}^*$ , wenn  $D_{i,t_H} < D_{i,t_H}^*$  gilt (vgl. (2.9)). Der Verlust ist genau dann null, wenn  $A_{i,T} \geq D_{i,T}^*$  gilt. Damit lässt sich für die bedingte Verlustverteilung (Abb. 2-8, Quadrant III) schreiben:

$$f_{S_{i,t_H}|D_{i,t_H} < D_{i,t_H}^*}(u) = \begin{cases} f_{D_{i,t_H}}(D_{i,t_H}^* - u) \cdot \Pr[D_{i,t_H} < D_{i,t_H}^*]^{-1} & \text{für } D_{i,t_H} < D_{i,t_H}^*, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.32)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[D_{i,t_H} < D_{i,t_H}^*]$  zur Berechnung der bedingten Verlustverteilung ergibt sich als Fläche unter der Dichtefunktion  $f_{D_{i,t_H}}(\cdot)$  links vom Referenzwert  $D_{i,t_H}^*$ .



**Abb. 2-8: Wert- und Verlustverteilung in  $t_H < T$  im einfachen Unternehmenswertansatz**

Potential des Ausfall- und Bonitätsänderungsrisikos eines Zero-Coupon Bonds (ZCB) mit einem Nominalwert von 125 Währungseinheiten, einer (gegenwärtigen) Restlaufzeit von 5 Jahren bezogen auf einen Risikohorizont von 1 Jahr. Der risikolose Zinssatz beträgt diskret 6 % p. a. Das Risiko in Form der Volatilität wird mit 10 % p. a. entgolten. Die Volatilität beträgt 25 % p. a. Die Driftrate des Unternehmenswertes weist folglich einen Wert von 0,0816 auf.<sup>324</sup>

<sup>324</sup> Das Zahlenbeispiel ist angelehnt an P. Kupiec (2001), Credit risk capital, S. 19 f. Im Unterschied zu KUPIEC wird hier die verkürzte Restlaufzeit im Risikohorizont von vier Jahren berücksichtigt. Die Dich-

## 2425 PD, EL und LGD im System der Lower Partial Moments

Das Verlustpotential kann durch statistische Kennzahlen deutlicher kommuniziert werden. Statistische Kennzahlen, die nur den Teil der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Wertes einer risikobehafteten Position beschreiben, der unterhalb eines Referenzwertes liegt, werden als Downside-Risikomaße bezeichnet.<sup>325</sup> Downside-Risikomaße können auf der Basis von Lower Partial Moments definiert werden. Ein Lower Partial Moment  $n$ -ter Ordnung für eine gegebene stetige Dichtefunktion  $f(\cdot)$  eines kreditrisikobehafteten Finanztitels  $D_i$  im Zeitpunkt  $t$  und einem exogen vorgegebenem Referenzwert  $D_{i,t}^*$  ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} LPM_{D_{i,t}}^{(n)}(D_{i,t}^*) &= E\left(1_{\{D_{i,t} < D_{i,t}^*\}}(D_{i,t}^* - D_{i,t})^n\right) \\ &= \int_0^{D_{i,t}^*} (D_{i,t}^* - u)^n \cdot f(u) \cdot du. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Das Lower Partial Moment der Ordnung null  $LPM_{D_{i,t}}^{(0)}(D_{i,t}^*)$  misst die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Finanztitel einen Wert aufweist, der kleiner ist als der Referenzwert. Daher wird ein Lower Partial Moment für  $n=0$  als Downside-Wahrscheinlichkeit bezeichnet.

Setzt man  $t=T$ ,  $f(\cdot) = f_{D_{i,T}}(\cdot)$  und  $D_{i,t}^* = D_i^{NW}$ , dann ist die Downside-Wahrscheinlichkeit nach (2.33) identisch mit der Ausfallwahrscheinlichkeit. Zudem kann die Dichte  $f_{D_{i,T}}(\cdot)$  in (2.33) gem. (2.25) durch die Dichte  $f_{A_{i,T}}(u)$  ersetzt werden. Eine analytische Darstellung der Ausfallwahrscheinlichkeit erhält man relativ einfach, wenn man (2.12) in (2.2) einsetzt:

$$\begin{aligned} p_i &= \Pr\left[A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \cdot T + \sigma_{A,i} \cdot W_{i,T}} < D_i^{NW}\right] \\ &= \Pr\left[W_{i,T} < \ln\left(\frac{D_i^{NW}}{A_{i,0}}\right) + \left(\frac{\sigma_{A,i}^2}{2} - \mu_{A,i}\right) \cdot T \middle/ \sigma_{A,i}\right] \end{aligned} \quad (2.34)$$

mit  $W_{i,T} \sim N(0, T)$ .

Mit Definition 2-7 folgt wegen  $W_{i,0}=0$ , dass  $W_{i,T}$  mit einem Erwartungswert von null und einer Varianz von  $T$  normalverteilt ist. Durch Standardisierung der normalverteilten Zufallsvariablen  $W_{i,T}$  erhält man:

$$p_i = F_{SN}\left(\ln\left(\frac{D_{i,T}}{A_{i,0}}\right) + \left(\frac{\sigma_{A,i}^2}{2} - \mu_{A,i}\right) \cdot T \middle/ \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}\right). \quad (2.35)$$

---

tiefunktion des Wertes des Zero-Coupon Bonds wurde unter Verwendung der Bedingung (2.29) mit Hilfe einer diskretisierten Betrachtung der Dichtefunktion des Unternehmenswertes approximiert.

<sup>325</sup> Vgl. J. Völker (2000), VaR-Modelle, S. 48.

Das Lower Partial Moment erster Ordnung  $LPM_{D_{i,t}}^{(1)}(D_{i,t}^*)$  misst die durchschnittliche negative Abweichung vom Referenzwert und wird als Downside-Erwartungswert (Downside Expectation, DE) bezeichnet. Dabei wird unterstellt, dass Werte oberhalb des Referenzwertes eine „negative Abweichung“ von null haben.<sup>326</sup> Als intuitiv einfacher erweist sich die Interpretation des bedingten Downside-Erwartungswerts (Conditional Downside Expectation, CDE) für  $D_{i,t} < D_{i,t}^*$ . Der CDE misst den bei negativen Verfehlungen des Referenzwertes durchschnittlich eintretenden Verlust:

$$\begin{aligned} CDE_{D_{i,t}}(D_{i,t}^*) &= E\left(1_{\{D_{i,t} < D_{i,t}^*\}}(D_{i,t}^* - D_{i,t})^n \mid D_{i,t} < D_{i,t}^*\right) \\ &= \frac{LPM_{D_{i,t}}^{(1)}(D_{i,t}^*)}{LPM_{D_{i,t}}^{(0)}(D_{i,t}^*)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Wird wieder der Verfallszeitpunkt  $t = T$  betrachtet und der Erwartungswert  $D_{i,T}^* = E(D_{i,T})$  als Referenzwert herangezogen, dann misst der bedingte Downside-Erwartungswert im Falle eines eintretenden unerwarteten Verlustes dessen im Durchschnitt zu erwartende Höhe (Abb. 2-7, Quadrant III). Der CDE lässt sich zudem für den Verfallszeitpunkt  $T$  analytisch darstellen:<sup>327</sup>

$$CDE_{D_{i,T}}(E(D_{i,T})) = E(D_{i,T}) - A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T} \cdot \frac{F_{SN}(-d_1)}{F_{SN}(-d_2)}. \quad (2.37)$$

Der erwartete Wert des Finanztitels im Falle eines unerwarteten Verlustes im Verfallszeitpunkt  $T$  lässt sich mit Hilfe von (2.37) ebenfalls analytisch bestimmen und berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} E(D_{i,T} \mid D_{i,T} < E(D_{i,T})) &= E(D_{i,T}) - CDE_{D_{i,T}}(E(D_{i,T})) \\ &= A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T} \cdot \frac{F_{SN}(-d_1)}{F_{SN}(-d_2)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Wird hingegen der Nominalwert  $D_{i,T}^* = D_i^{NW}$  als Referenzwert gewählt, setzt sich das quantifizierte Ausfallrisiko aus einer materiellen Komponente (erwarteter Verlust) und einer formalen Komponente (unerwarteter Verlust/Gewinn) zusammen. Das Lower Partial Moment erster Ordnung und der bedingte Downside-Erwartungswert stellen in diesem Fall

<sup>326</sup> Vgl. J. Völker (2000), VaR-Modelle, S. 49.

<sup>327</sup> Für eine analytische Herleitung der Risikomaße für  $t_H = T$  siehe Anlage 4. Für  $d_1$  und  $d_2$  vgl. (2.20).

den Expected Loss (EL) und den Loss Given Default (LGD<sup>328</sup>) dar (Abb. 2-7, Quadrant III) und erlauben die folgenden analytischen Repräsentationen.<sup>329</sup>

$$EL_{i,T} = DE_{D_{i,T}}(D_i^{NW}) = D_i^{NW} \cdot F_{SN}(-d_2) - A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A_i} \cdot T} \cdot F_{SN}(-d_1), \quad (2.39)$$

$$LGD_{i,T} = CDE_{D_{i,T}}(D_i^{NW}) = D_i^{NW} - A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A_i} \cdot T} \cdot \frac{F_{SN}(-d_1)}{F_{SN}(-d_2)}. \quad (2.40)$$

Liegt der Risikohorizont  $t_H$  vor dem Verfallszeitpunkt  $T$  des Fremdkapitals, kommt lediglich der Erwartungswert des Fremdkapitals als Referenzwert in Betracht. Da die Dichtefunktion der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Wertes des Fremdkapitals (2.30) nicht analytisch zu ermitteln ist, lassen sich die Gleichungen (2.33), (2.36)-(2.38) für  $t_H < T$  durch Approximationsverfahren lediglich näherungsweise ermitteln (Abb. 2-8, Quadrant III).<sup>330</sup>

## 2426 Erweiterungen des einfachen Unternehmenswertansatzes in Grundzügen

Der einfache Unternehmenswertansatz war in der Vergangenheit häufig Gegenstand empirischer Analysen. Im Mittelpunkt stand dabei vor allem der Unternehmenswertansatz als Bewertungsmodell. Die empirische Überprüfung erweist sich jedoch, abgesehen von der Parametrisierung, wg. der Vielfalt der Fremdkapitalkontraktmerkmale als problematisch.<sup>331</sup>

Während Unternehmen in der Praxis über Fremdkapitalkontrakte mit unterschiedlichen Laufzeiten und Senioritäten verfügen, unterstellt der Unternehmenswertansatz eine einheitliche Laufzeit und identische Seniorität aller Kredite eines betrachteten Unternehmens. Weiterhin lassen sich typische Indenture Provisions wie vorzeitige Kündigungsrechte (Callable Bonds) und Konvertierungsrechte (Convertible Bonds) nicht modellieren. Schließlich bleiben zwischenzeitliche Zins- und Tilgungszahlungen unberücksichtigt. Allenfalls ein kontinuierlicher Kapitaldienst kann auf Kosten einer analytischen Bewertungsgleichung erfasst werden.<sup>332</sup> JONES, MASON & ROSENFELD zogen zur empirischen Überprüfung des einfachen Unternehmenswertansatzes Fremdkapitaltitel von Unternehmen mit „einfacher“

<sup>328</sup> Die Größe LGD wird meist als Teil vom Hundert bezogen auf den ausstehenden Nominalbetrag (Exposure at Default) angegeben. Dieser Konvention entsprechend stehen der Expected Loss (in EUR) und der Loss Given Default (in %) wie folgt zueinander in Beziehung:

$$\begin{aligned} EL_{i,T} &= p_i \cdot E(S_{i,T}^{NW} | A_{i,T} < D_i^{NW}) = p_i \cdot E\left(\frac{D_i^{NW} - A_{i,T}}{D_i^{NW}} | A_{i,T} < D_i^{NW}\right) \cdot D_i^{NW} \\ &= p_i \cdot LGD_i^{\%} \cdot D_i^{NW}. \end{aligned}$$

<sup>329</sup> Vgl. die Herleitungen in Anlage 4.

<sup>330</sup> Vgl. auch Fn. 323.

<sup>331</sup> Vgl. E. Jones, S. Mason und E. Rosenfeld (1984), Empirical investigation of contingent claims analysis, S. 612-615.

<sup>332</sup> Da die Berücksichtigung eines stetigen Kapitaldienstes die analytische Herleitung einer Bewertungsgleichung erschwert, hat MERTON lediglich den Fall einer unendlichen Laufzeit betrachtet. Seine Bewertungsgleichung ist somit eher für (bestimmte) Vorzugsaktien bzw. Genussscheine geeignet. Vgl. R. Merton (1974), Pricing corporate debt, S. 450 und 467-469.

Kapitalstruktur heran.<sup>333</sup> Ihre Ergebnisse legen nahe, dass der Unternehmenswertansatz zur Bewertung von kreditrisikobehafteten Fremdkapitaltiteln keine besseren Ergebnisse als ein einfacher Barwertsansatz ohne Berücksichtigung des Kreditrisikos liefert.

Die Erweiterung des Unternehmenswertansatzes von MERTON durch die Literatur verfolgte insbesondere das Ziel einer genaueren Erklärung der am Markt beobachtbaren Preise für kreditrisikobehaftete Anleihen, indem weitere Kontraktmerkmale erfasst, alternative stochastische Prozesse für den Unternehmenswert untersucht, Insolvenzgründe erörtert und Insolvenzverfahren analysiert wurden. Allen Erweiterungen ist gemeinsam, dass nach wie vor der Unternehmenswert als zentraler Kreditrisikofaktor anzusehen ist. Ausfallereignisse bleiben somit ökonomisch interpretierbar. Zu beachten ist, dass die Erweiterungen insbesondere die Ausfallwahrscheinlichkeit (PD), die durchschnittliche Verlusthöhe im Falle eines Ausfalls (LGD) und die erwartete Verlusthöhe (EL) bei sonst identischer Parametrisierung beeinflussen. Im Folgenden sollen einige wesentliche Erweiterungen in ihren Grundzügen vorgestellt werden.<sup>334</sup> Effekte auf die Kennzahlen PD, LGD und EL – wobei die Ausfallwahrscheinlichkeit im Vordergrund stehen soll – werden skizziert.

Mit Auswirkungen der Seniorität der Fremdkapitaltitel auf Bewertungsfragen im Rahmen des Unternehmenswertansatzes haben sich zuerst BLACK & COX beschäftigt.<sup>335</sup> Das Prinzip der Seniorität beinhaltet, dass im Falle eines Insolvenzverfahrens die Ansprüche nachrangiger Fremdkapitalgeber (Junior Bonds) erst dann befriedigt werden, nachdem die vorrangigen Fremdkapitalgeber (Senior Bonds) ihre Ansprüche durchsetzen konnten. Am Beispiel eines Junior und eines Senior Bonds mit identischen Restlaufzeiten ändert sich für den Senior Bond im Vergleich zum einfachen Unternehmenswertansatz weder die Vorgehensweise der Bewertung noch die Ermittlung der Kennzahlen PD, LGD und EL. Aus Sicht des vorrangigen Fremdkapitalgebers kann der Junior Bond als Haftungskapital aufgefasst werden. Für den Junior Bond sind jedoch die Wert- und Verlustverteilung sowie die Downside-Risikomaße unter Berücksichtigung des Nominalwerts des Senior Bonds zu ermitteln. Am Beispiel der Ausfallwahrscheinlichkeit erhält man:

---

<sup>333</sup> Untersucht wurden ausschließlich öffentlich gehandelte Fremdkapitaltitel ohne Kündigungs- und Konvertierungsrechte. Die Emittenten begaben ausschließlich Stammaktien und hatten nur in unbedeutender Höhe nicht-handelbare Kredite aufgenommen. Da die Kuponzahlungen in kontinuierlicher Form berücksichtigt werden sollten, wurden numerische Approximationsmethoden anstelle einer Bewertungsgleichung verwendet. Vgl. E. Jones, S. Mason und E. Rosenfeld (1984), Empirical investigation of contingent claims analysis, S. 615-618 und 618-624.

<sup>334</sup> Ein (tabellarischer) Überblick über Unternehmenswertmodellentwicklungen findet sich in J. Bohn (2000), Contingent-claims approaches, S. 60-62.

<sup>335</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden F. Black und J. Cox (1976), Bond indenture provisions, S. 358-361.

$$p_{i,Junior} = \Pr \left[ A_{i,T} < D_{i,Junior,T}^{NW} + D_{i,Senior,T}^{NW} \right].^{336} \quad (2.41)$$

Als Bewertungsmethode schlagen BLACK & COX vor, die Differenz aus einem theoretischen Bond, der sowohl den Junior als auch den Senior Bond umfasst, und dem Senior Bond zu bilden.<sup>337</sup> Für das Eigenkapital kann auf (2.17) zurückgegriffen werden:

$$D_{i,Junior,0}(A_{i,0}) = D_{i,Junior+Senior,0}(A_{i,0}) - D_{i,Senior,0}(A_{i,0}), \quad (2.42)$$

$$E_{i,0}(A_{i,0}) = A_{i,0} - D_{i,Junior,0}(A_{i,0}) - D_{i,Senior,0}(A_{i,0}). \quad (2.43)$$

Im Vergleich zur Gleichrangigkeit beider Bonds zeigen BLACK & COX, dass die Subordination den Wert des Senior Bonds erhöht und den Wert des Junior Bonds gegenüber einer pari passu Verlustzuweisung senkt. Die Wertminderung des Junior Bonds bei unverändert gebliebener Ausfallwahrscheinlichkeit ist auf die veränderte Recoveryverteilung und damit einhergehend auf veränderte ELs und LGDs zurückzuführen. Beim Senior Bond ändert sich neben dem EL und dem LGD auch die Ausfallwahrscheinlichkeit.

Ein Unternehmen ist im Zeitpunkt  $T$  gem. Definition 2-4 insolvent, wenn der Unternehmenswert nicht hinreichend hoch ist, um die Ansprüche aller Fremdkapitalgeber zu befriedigen deren Fremdkapitaltitel in  $T$  verfallen. Hat das Unternehmen darüber hinaus Fremdkapitalkontrakte mit längeren Restlaufzeiten abgeschlossen, ist auch im einfachen Unternehmenswertansatz ein zwischenzeitlicher Ausfall möglich. Für die Kreditrisikomessung ist es nicht länger ausreichend, den Unternehmenswert allein im Verfallszeitpunkt des einzelnen Kontrakts zu betrachten. Vielmehr sind alle Zeitpunkte relevant, in denen kürzer laufende Kontrakte verfallen. Für die Insolvenzwahrscheinlichkeit ist es unerheblich, ob die Kontrakte mit kürzerer Restlaufzeit dem interessierenden Kontrakt vor- oder nachgeordnet sind.<sup>338</sup> Für die Ermittlung des Verlusts im Falle einer Insolvenz hingegen, ist die Seniorität, unabhängig von dem Verfallszeitpunkt der Kontrakte, ausschlaggebend. Da sich die Struktur des Fremdkapitals im Einzelfall als sehr komplex erweisen kann, ist eine analytische Bewertung und Kreditrisikoquantifizierung kaum mehr möglich.<sup>339</sup> Als Alternati-

<sup>336</sup> An dieser Stelle ist zu unterscheiden zwischen der Insolvenzwahrscheinlichkeit, die für alle Fremdkapitalgeber identisch ist, und der Ausfallwahrscheinlichkeit, die von der Seniorität abhängt. Vgl. O. Vasicek (1984), Credit valuation, S. 5.

<sup>337</sup> Alternativ besteht ausgehend vom Payoff-Schema des Junior Bonds die Möglichkeit, ein Duplikationsportfolio zu bilden, das aus einem Long Call auf den Unternehmenswert mit einem Basispreis in Höhe des Nominalwerts des Senior Bonds und einem Short Call auf den Unternehmenswert mit einem Basispreis in Höhe der Summe der Nominalwerte des Junior und Senior Bonds zusammengesetzt ist.

<sup>338</sup> Zu den Begriffen der Insolvenz- und Ausfallwahrscheinlichkeit vgl. Fn. 336.

<sup>339</sup> O. Vasicek (1984), Credit valuation, S. 11-16 leitet für kurzfristiges Fremdkapital unter der restriktiven Annahme, dass vorrangige Fremdkapitalkontrakte ähnlich kurzfristig sind, auf analytischem Weg sowohl eine Bewertungsformel als auch eine Gleichung für den Expected Loss her.

ve bietet es sich an, die Unternehmenswertentwicklung mit Monte Carlo-Methoden zu simulieren.<sup>340</sup>

Vorzeitige Ausfälle können zudem durch die Unfähigkeit des Schuldners, vereinbarte Kuponzahlungen zu leisten, verursacht werden. Die modelltheoretische Erfassung von Kuponzahlungen ändert die Ausfallbedingung (2.1) und folglich die Bewertungsformel (2.19). Als maßgeblich bei der Quantifizierung des Kreditrisikos erweist sich die unterstellte Art und Weise der Finanzierung der Kuponzahlungen. GESKE unterstellt, dass diese ausschließlich durch die Aufnahme von jungem Eigenkapital finanziert werden (dürfen).<sup>341</sup> Obwohl die Kuponzahlungen  $c_i$  zeitdiskret zu  $t_1, t_2, \dots, t_n = T$  anfallen, kann nach wie vor von einer BROWNSchen Bewegung des Unternehmenswerts ausgegangen werden. Die aufgenommenen finanziellen Mittel werden unmittelbar für die Kuponzahlungen verwendet:

$$A_{i,t_j} = \bar{A}_{i,t_j} = \bar{A}_{i,t_j} \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.44)$$

Die Kuponzahlungen fallen aus, wenn das Unternehmen nicht in der Lage ist, junges Eigenkapital zu akquirieren. Potentielle Eigenkapitalgeber werden nur dann finanzielle Mittel zu Verfügung stellen, wenn der Wert ihres Anteils am Grundkapital nach der Zahlung des Kupons den zuvor gezahlten Preis des Anteils nicht unterschreiten wird. Würde der Wert des (jungen und alten) Eigenkapitals nach der Kuponzahlung soweit sinken, dass der Wert der Kuponzahlung erreicht würde, wären potentielle Eigenkapitalgeber auch nur dann bereit, finanzielle Mittel zur Verfügung zu stellen, wenn sie die Rechte am Grundkapital vollständig übernehmen könnten. Sollte absehbar sein, dass der Eigenkapitalwert nach der Kuponzahlung noch weiter sänke, würde das Unternehmen keine Eigenkapitalgeber zur Kuponfinanzierung finden.<sup>343</sup> Damit kann die Unternehmung  $i$  im Zeitpunkt  $t_j$  ihren Zahlungsverpflichtungen nicht vollständig nachkommen, wenn gilt:

$$I_i = 1 \Leftrightarrow \bar{E}_{i,t_j} < c_i. \quad (2.45)$$

Unmittelbar nach der letzten individuellen Kuponzahlung können Eigen- und Fremdkapital wegen fehlender zwischenzeitlicher Zahlungen mit Hilfe des einfachen Unternehmenswertansatzes gem. (2.18) und (2.19) bewertet werden. Für das Fremdkapital erhält man:

<sup>340</sup> Vgl. Abschnitt 38.

<sup>341</sup> Eine derartige Annahme erscheint sehr restriktiv und lässt sich nur mit entsprechenden Ausgestaltungen der Bond Indenture Provisions begründen. Vgl. hierzu und im Folgenden R. Geske (1977), Liabilities as compound options, S. 541-552.

<sup>342</sup> Dabei bezeichnen  $\bar{A}_{i,t_j}$  den Unternehmenswert unmittelbar vor der Kuponzahlung und  $\bar{A}_{i,t_n}$  den Unternehmenswert unmittelbar nach der Kuponzahlung im Zeitpunkt  $t_j$ .

<sup>343</sup> Vgl. F. Black und J. Cox (1976), Bond indenture provisions, S. 363.

$$\bar{D}_{i,t_{n-1}}(A_{i,t_{n-1}}) = A_{i,t_{n-1}} \cdot F_{SN}(-d_1) + (D_i^{NW} + c_i) \cdot e^{-r_{fk}(T-t_{n-1})} \cdot F_{SN}(+d_2). \quad (2.46)$$

Unmittelbar vor der letzten Kuponzahlung bekommen die Fremdkapitalgeber entweder den Unternehmenswert im Falle eines Ausfalles gem. (2.45) oder die Kuponzahlung sowie das Recht auf den zukünftigen Kapitaldienst:

$$\bar{D}_{i,t_{n-1}} = \min(A_{i,t_{n-1}}; \bar{D}_{i,t_{n-1}} + c_i). \quad (2.47)$$

Damit lässt sich das Fremdkapital unmittelbar nach der vorletzten Kuponzahlung mit Hilfe des einfachen Unternehmenswertansatzes bewerten, wobei in (2.19) der Nominalwert  $D_i^{NW}$  durch  $\bar{D}_{i,t_{n-1}} + c_i$  sowie die Restlaufzeit  $T$  durch den Zeitraum zwischen den beiden Kuponzahlungen in  $t_{n-1}$  und  $t_{n-2}$  ersetzt werden:

$$\bar{D}_{i,t_{n-2}}(A_{i,t_{n-2}}) = A_{i,t_{n-2}} \cdot F_{SN}(-d_1) + (\bar{D}_{i,t_{n-1}} + c_i) \cdot e^{-r_{fk}(t_{n-1}-t_{n-2})} \cdot F_{SN}(+d_2). \quad (2.48)$$

Rekursives Lösen der Bewertungsgleichung (2.48) für alle früheren Kuponzahlungszeitpunkte  $t_{n-3}, t_{n-4}, \dots$  erlaubt die Bewertung des kreditrisikobehafteten Kredits für  $t_0$ .<sup>344</sup> Für das Eigenkapital  $\bar{E}_{i,t_j}$  kann erneut auf (2.17) zurückgegriffen werden. Mit  $A_{i,t}$  als stochastischer Unternehmenswertprozess<sup>345</sup> unterliegt der Wert des Eigenkapitals  $\bar{E}_{i,t_j}(A_{i,t_j})$  in den (zukünftigen) Kuponzahlungszeitpunkten  $t_j$  einer Verteilung. Aus den Verteilungen resultiert mit (2.45) die Ausfallwahrscheinlichkeit des Kredits  $i$  bezogen auf den Zeitraum  $[0, T]$ . Ausfallwahrscheinlichkeiten für kürzere Zeiträume erhält man entsprechend:

$$p_i = 1 - \Pr[\bar{E}_{i,t_1} > c_i, \bar{E}_{i,t_2} > c_i, \dots, A_{i,t_n} > c_i + D_i^{NW}]. \quad (2.49)$$

Abschließend lässt sich festhalten, dass Kreditausfälle vor dem Fälligkeitstermin mannigfache Ursachen haben können. Bereits unterschiedliche Zins- und Tilgungszahlungsstermine aus einer Vielzahl von Kreditkontrakten können den jederzeitigen Ausfall eines einzelnen Kontrakts – auch zwischen den vertraglich vereinbarten Zahlungszeitpunkten – zur Folge haben. Daher wird es in Kapitel 3 das Ziel sein, Ausfallwahrscheinlichkeiten für jeden beliebigen Zeitraum unter weitgehender Aufrechterhaltung der ökonomischen Interpretierbarkeit der Ausfallereignisse zu modellieren, ohne sich dabei in der hohen Komplexität erweiterter Unternehmenswertmodelle zu verlieren. Ähnliches gilt für die Modellierung der Recoveryverteilungen, respektive der Kennzahlen EL und LGD.

<sup>344</sup> Für die explizite Bewertungsformel sowie ihre Herleitung vgl. R. Geske (1977), Liabilities as compound options, S. 545-549.

<sup>345</sup> Während der Unternehmenswertprozess  $A_{i,t}$  für Bewertungszwecke risikoneutral gestaltet werden muss, ist hier die Parametrisierung gem. Abschnitt 2423 zu verwenden.

## 243 Unternehmenswertorientierte Kreditrisikomessung für ein Portfolio von Schuldtiteln

### 2431 Die Ausfallkorrelation als Maß für gemeinsame Kreditausfälle

Die Korrelation bzw. der Korrelationskoeffizient stellt ein einfach zu interpretierendes, intuitiv verständliches normiertes Maß für den Zusammenhang zweier Zufallsvariablen dar. Er misst den Grad des linearen Zusammenhangs zweier Zufallsvariablen.<sup>346</sup> Insbesondere die Portfoliotheorie nach MARKOWITZ sowie das Capital Asset Pricing Modell (CAPM) nach SHARPE & LINTNER haben maßgeblich zur Etablierung des Korrelationskoeffizienten in der betrieblichen Finanzwirtschaft zur Beschreibung von gleich- bzw. entgegengerichteten Entwicklungen von finanziellen Marktdaten beigetragen.<sup>347</sup>

$I_i \setminus I_j$	0	1	
0	$1 - p_i - p_j + p_{i,j}$	$p_j - p_{i,j}$	$1 - p_i$
1	$p_i - p_{i,j}$	$p_{i,j}$	$p_i$
	$1 - p_j$	$p_j$	1

**Tab. 2-3: Kontingenztafel zweier Ausfallindikatoren**

Basierend auf der Kontingenztafel für die Ausfallindikatoren der Unternehmen  $i$  und  $j$  (Tab. 2-3) lässt sich die Ausfallkorrelation  $\rho_{i,j}$  wie folgt definieren:

**Definition 2-10 (Ausfallkorrelation):**

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} &= \frac{E(I_i, I_j) - E(I_i) \cdot E(I_j)}{\sqrt{\text{Var}(I_i) \cdot \text{Var}(I_j)}} \\ &= \frac{p_{i,j} - p_i \cdot p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i) \cdot p_j(1-p_j)}}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dabei bezeichnet  $p_{i,j}$  die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit der Schuldner  $i$  und  $j$ . Bei exogen vorgegebenen Ausfallwahrscheinlichkeiten wird die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit folglich durch die Ausfallkorrelation determiniert. Wie SCHÖNBUCHER<sup>348</sup> demonstriert, wird darüber hinaus die Höhe der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit bei geringwertigen univariaten Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_i$  und  $p_j$  maßgeblich von der Ausfallkorrelation  $\rho_{i,j}$  und weniger von den univariaten Ausfallwahrscheinlichkeiten beeinflusst. Für identische Ausfallwahrscheinlichkeiten mit  $p_i = p_j = p \ll 1\%$  gilt näherungsweise:

$$p_{i,j} = p^2 + \rho_{i,j} \cdot (p - p^2) \approx \rho_{i,j} \cdot p. \quad (2.51)$$

<sup>346</sup> Siehe bspw. R. Ramanathan (2002), *Econometrics*, S. 31-34.

<sup>347</sup> Siehe bspw. R. Brealey und S. Myers (2003), *Corporate finance*, S. 152-219.

<sup>348</sup> Vgl. P. Schönbucher (2000), *Factor models*, S. 3.

Da Ausfallwahrscheinlichkeiten in der Praxis insbesondere bei Schuldtiteln mit Investment-Grade-Status<sup>349</sup> regelmäßig Werte unterhalb von einem Prozent aufweisen, ist dem Ausfallkorrelationskoeffizienten bei der Modellierung der gemeinsamen Ausfallverteilung zweier Schuldtitel eine besondere Aufmerksamkeit zu widmen.

### 2432 Kritik zur Ausfallkorrelation als Maß für gemeinsame Kreditausfälle

Im Falle eines Portfolios mit  $N$  Schuldtiteln beschreiben die Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Schuldtitel in Verbindung mit den paarweisen Ausfallkorrelationskoeffizienten nicht notwendigerweise die multivariate Ausfallverteilung  $F(I_1, I_2, \dots, I_N)$  vollständig. Zur Illustration sei ein Portfolio mit drei Schuldtiteln  $i, j$  und  $k$  herangezogen. In einem bestimmten Zeitpunkt  $T$  sind damit insgesamt acht Umweltzustände möglich, denen acht verschiedene Wahrscheinlichkeiten  $\pi_{i,j,k}$  zuzuordnen sind (Abb. 2-9).

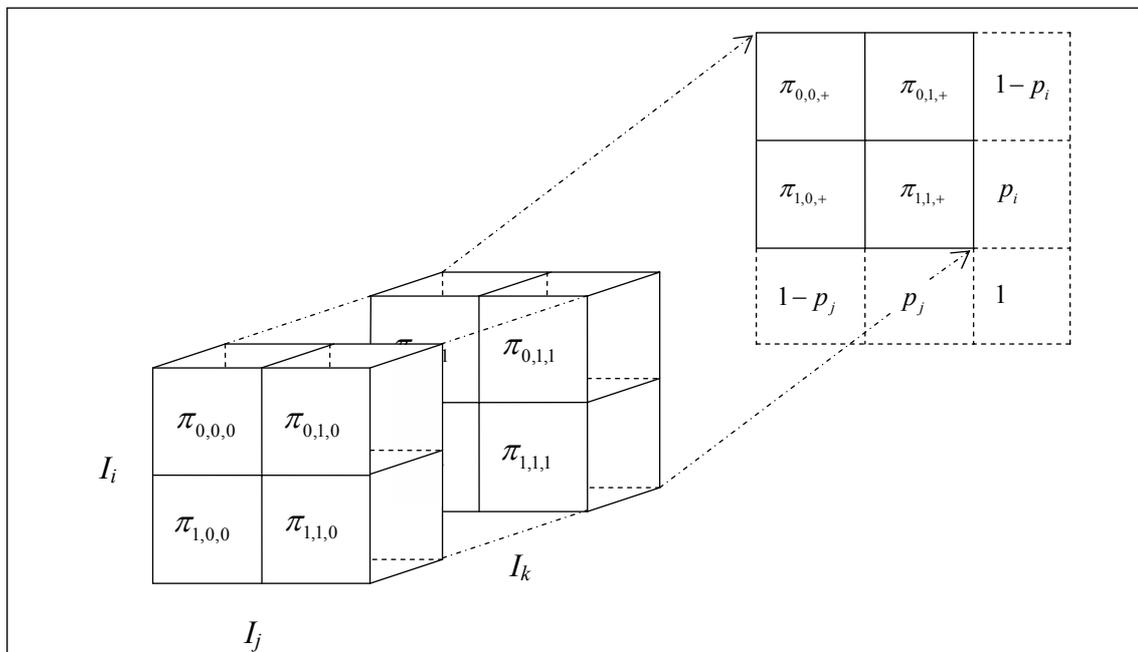


Abb. 2-9: Stratifizierung eines Kontingenzwürfels

**Definition 2-11 (Randwahrscheinlichkeiten):** Entsprechend der Abb. 2-9 lassen sich die folgenden Randwahrscheinlichkeiten definieren.<sup>350</sup>

$$\pi_{I_i,+,+} = \sum_{I_j} \sum_{I_k} \pi_{I_i,I_j,I_k}, \pi_{+,I_j,+} = \sum_{I_i} \sum_{I_k} \pi_{I_i,I_j,I_k}, \pi_{+,+,I_k} = \sum_{I_i} \sum_{I_j} \pi_{I_i,I_j,I_k}, \quad (2.52)$$

$$\pi_{I_i,I_j,+} = \sum_{I_k} \pi_{I_i,I_j,I_k}, \pi_{I_i,+,I_k} = \sum_{I_j} \pi_{I_i,I_j,I_k}, \pi_{+,I_j,I_k} = \sum_{I_i} \pi_{I_i,I_j,I_k}. \quad (2.53)$$

<sup>349</sup> Den Long term credit Ratings der STANDARD & POOR'S CORPORATION folgend, schließt der Investment-Grade-Status die Ratingklassen von AAA bis einschließlich BBB ein.

<sup>350</sup> Da die Reihenfolge der Ausfallindikatoren  $I_i, I_j$  und  $I_k$  im Folgenden unverändert bleibt, wird bei den Randwahrscheinlichkeiten zur besseren Lesbarkeit auf eine spezielle Indizierung verzichtet, ohne dabei die Eindeutigkeit bezüglich der aufsummierten Variablen zu verlieren.

Sowohl die einzelnen als auch die gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten zweier betrachteter Schuldtitle gemäß der Kontingenztafel für Ausfallindikatoren (Tab. 2-3) lassen sich aus (2.52) und (2.53) ableiten:

$$p_i = \pi_{1,+}, p_j = \pi_{+,1}, p_k = \pi_{+,+}, \quad (2.54)$$

$$p_{i,j} = \pi_{1,1}, p_{j,k} = \pi_{+,1}, p_{i,k} = \pi_{1,+}. \quad (2.55)$$

Seien zunächst die beiden Ausfallindikatoren  $I_i$  und  $I_j$  betrachtet. Durch Vorgabe der Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_i$  und  $p_j$  gem. (2.35) sowie der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,j}$  respektive  $\pi_{1,1,+}$  mit Hilfe der Ausfallkorrelation  $\rho_{i,j}$  gem. (2.50) wird die Randverteilung von  $I_i$  und  $I_j$  vollständig beschrieben. Jedoch teilt der Ausfallindikator  $I_k$  die Kontingenztafel in zwei Strata, weshalb man in diesem Zusammenhang auch von einer stratifizierenden Kovariablen spricht.<sup>351</sup> Die Aufteilung der Elementarwahrscheinlichkeiten der Randverteilung auf die beiden Strata  $I_k=1$  und  $I_k=0$  wird durch  $p_i, p_j$  und  $\rho_{i,j}$  nicht festgelegt. Da der Kontingenzwürfel anstelle von  $I_k$  auch in Abhängigkeit von  $I_i$  und  $I_j$  hätte aufgeschnitten werden können, ist zu prüfen, ob die Aufteilung der Randelementarwahrscheinlichkeiten auf die beiden Strata durch die beiden übrigen Randverteilungen bestimmt wird. Aufgrund der Tatsache, dass bei Kenntnis aller Randelementarwahrscheinlichkeiten, eine Elementarwahrscheinlichkeit  $\pi_{i,j,k}$  frei wählbar ist, muss dies verneint werden.<sup>352</sup>

Es bleibt zu hinterfragen, welche Annahmen bei der Formulierung einer multivariaten Verteilung der Ausfallindikatoren  $\{I_{ij}\}_{(i=1\dots N)}$  implizit durch die Konzentration auf die paarweisen Randverteilungen getroffen werden. Darüber hinaus sind mögliche Implikationen für die gemeinsame Ausfallverteilung zu untersuchen. Zunächst soll jedoch der Frage nachgegangen werden, innerhalb welcher Wertgrenzen sich einzelne Elementarwahrscheinlichkeiten für ein Portfolio mit  $N$  Schuldtitle bei gegebenen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $\{p_i\}_{1 \leq i \leq N}$  sowie gegebenen Ausfallkorrelationen  $\{\rho_{i,j}\}_{1 \leq i,j \leq N}$  bewegen können. Große Wertebereiche würden zu besonderer Sorgfalt bei der Wahl der Vorgehensweise zur Modellierung von Ausfallkorrelationen mahnen.

<sup>351</sup> Ein Stratum bezeichnet eine Schicht einer mehrdimensionalen Kontingenztafel. Zur Stratifizierung von Kontingenztafeln siehe D. Lehnick (1997), Rate Ratios und Odds Ratios, S. 127-131.

<sup>352</sup> Der Kontingenzwürfel besitzt einen Freiheitsgrad. Zum selben Ergebnis gelangt man durch die Überlegung, wonach acht sich zu eins summierende Elementarwahrscheinlichkeiten mit Hilfe von sechs Parametern (drei Ausfallwahrscheinlichkeiten und drei Ausfallkorrelationen) geschätzt werden sollen. Ein Parameter (bspw. eine Elementarwahrscheinlichkeit) ist demzufolge frei wählbar. Zu Freiheitsgraden in Kontingenztafeln siehe Y. Bishop, S. Fienberg und P. Holland (1995), Discrete multivariate analysis, S. 25 sowie ausführlicher A. Agresti (1990), Categorical data analysis, S. 146-149.

Zur Betrachtung sei beispielhaft ein homogenes Kreditportfolio mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von  $p_i=10\%$  und einer Ausfallkorrelation von  $\rho_{i,lj}=7,99584\%$ <sup>353</sup> herangezogen. Das Kreditportfolio bestehe aus Zerobonds mit einem Nominalwert von  $NW=1$ . Das ermöglicht die Konzentration auf die Anzahl der Kreditausfälle losgelöst von Wert- bzw. Verlustverteilungen.<sup>354</sup> Zur Ermittlung des Wertebereichs einzelner Elementarwahrscheinlichkeiten lassen sich Standardmethoden der linearen Programmierung verwenden.<sup>355</sup> Dabei sind die Elementarwahrscheinlichkeiten als Veränderliche unter Berücksichtigung der Randwahrscheinlichkeiten als Nebenbedingungen zu formulieren. Da die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_i$  zusammen mit der Ausfallkorrelation  $\rho_{i,lj}$  die einzelnen Ränder vollständig determiniert, ist es ausreichend, lediglich die Ausfallwahrscheinlichkeiten als Nebenbedingung zu formulieren.<sup>356</sup> Repräsentiert  $b$  den Index der geordneten Menge der binären Sequenzen  $(0, 1, 10, 11, 100, 101, \dots)$  der Stärke  $2^N$ , dann gilt:<sup>357</sup>

$$1 = \sum_b \pi_b, \quad p_i = \sum_{b, b_i=1} \pi_b \quad \text{und} \quad p_{i,j} = \sum_{b, b_i=1, b_j=1} \pi_b \quad \forall \quad 1 \leq i, j \leq N, i < j. \quad (2.56)$$

Als Zielwahrscheinlichkeiten eignen sich insbesondere die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit  $\pi_{0\dots 0}$  ( $b=1$ ) und die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit  $\pi_{1\dots 1}$  ( $b=2^N$ ).<sup>359</sup> Zur Ermittlung der Wertebereiche sind diese Größen unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen sowohl zu minimieren als auch zu maximieren. Am Beispiel der Überlebenswahrscheinlichkeit ergeben sich für  $N=2, 3, \dots, 10$  die folgenden Wertebereiche:

N	3	6	8	10
Minimum	0,73439250	0,48598125	0,32037375	0,1547613
Maximum	0,75158875	0,65794375	0,62716499	0,5412771
Kontingenztafeln	3	15	28	45
Freiheitsgrade	1 (von 8) <sup>360</sup>	42 (von 64)	219 (von 256)	968 (von 1024)

**Tab. 2-4: Wertebereiche gemeinsamer Überlebenswahrscheinlichkeiten**

Die individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten betragen 10 %. Die paarweisen Ausfallkorrelationen sind konstant 7,99584 %. Der Wert ist konsistent mit einer Unternehmenswertkorrelation von 20 %.

<sup>353</sup> Die Ausfallkorrelation ist konsistent mit einer CREDITMETRICS™-Modellierung bei einer Unternehmenswertkorrelation von 20 %. Die dazugehörige bivariate Ausfallwahrscheinlichkeit wurde mittels numerischer Integration der Dichte der bivariaten Normalverteilung bestimmt und simulativ verifiziert.

<sup>354</sup> Bei inhomogenen Kreditportfolios ist darauf zu achten, dass die Menge der Ausfallwahrscheinlichkeiten und die Menge der Ausfallkorrelationen selbstkonsistent sind.

<sup>355</sup> Für Details des hier verwendeten LP-Modells siehe Anlage 20.

<sup>356</sup> Die Modellierung aller Randwahrscheinlichkeiten würde zu einem überbestimmten Modell führen.

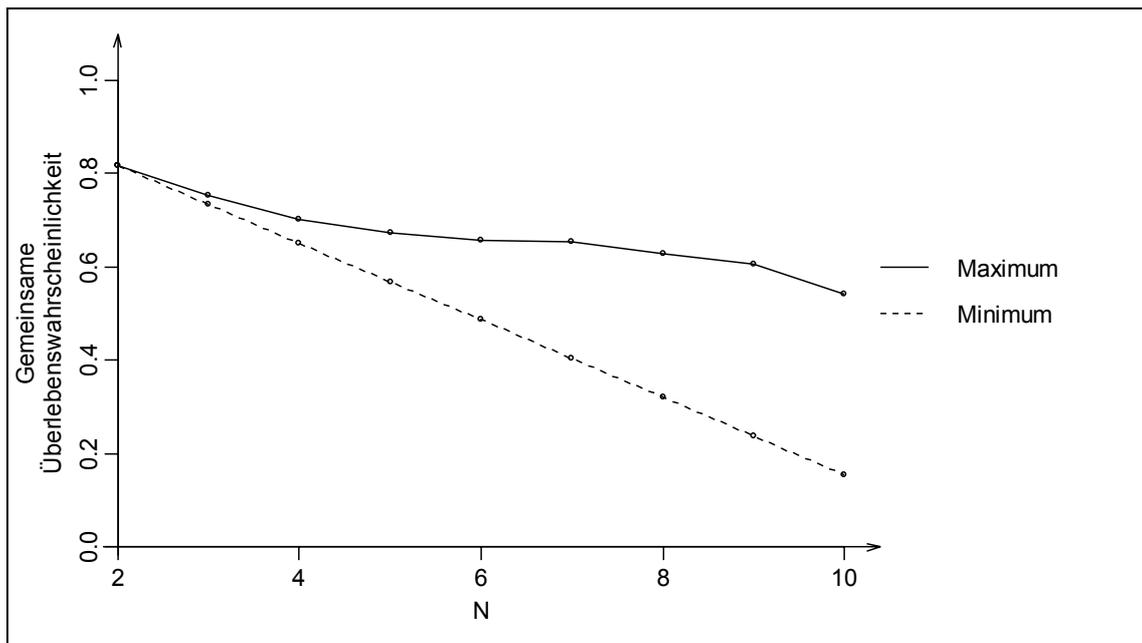
<sup>357</sup> Für  $N=4$  ist die Sequenz 0101 das sechste Element.

<sup>358</sup> Die Summation erfolgt nur über diejenigen Elementarwahrscheinlichkeiten, bei denen das  $i$ -te Element der binären Sequenz einen Ausfall des entsprechenden Kredits signalisiert. Für die Sequenz 0101 ( $b=4$ ) wären  $b_1=1, b_2=0, b_3=1$  und  $b_4=0$ .

<sup>359</sup> Ein ähnlicher LP-Ansatz i. V. m. binären Zufallsvariablen wird von A. Lee (1993), Random binary deviates, S. 210 f. verwendet. Ziel ist dort jedoch die Überprüfung von Odds-Ratios auf Selbstkonsistenz.

<sup>360</sup> In Klammern ist die jeweilige Anzahl der Elementarwahrscheinlichkeiten angegeben.

Die Kontingenztafeln der Ränder weisen eine (bivariate) Überlebenswahrscheinlichkeit von 81,72 % auf. Mit der Zunahme der Kreditanzahl driften Maximum und Minimum der möglichen Werte in signifikanter Weise auseinander. Für acht Kredite liegen bereits ca. 30 Punkte zwischen dem minimalen und dem maximalen Wert. Während das Minimum linear fällt, ist der Verlauf des Maximums zunächst konvex. Da sich jedoch die Wahrscheinlichkeitsmasse auf eine exponentiell steigende Anzahl von Elementarwahrscheinlichkeiten verteilt, muss nicht nur das Minimum letztendlich für  $N \rightarrow \infty$  gegen null konvergieren:



**Abb. 2-10: Wertebereiche der gemeinsamen Überlebenswahrscheinlichkeiten**

Minimale und maximale gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeiten für ein Kreditportfolio bestehend aus  $N = 2, \dots, 10$  homogenen Krediten mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 10 % und paarweisen Ausfallkorrelationen von konstant 7,99584 %.

Damit eröffnet sich die Möglichkeit – insbesondere bei Portfolios mit  $N$  Schuldtiteln<sup>361</sup> – die multivariate Ausfallverteilung bei sonst gleichen individuellen Ausfallwahrscheinlichkeiten und paarweisen Ausfallkorrelationen innerhalb gewisser Wertgrenzen gestalten zu können. Für eine eindeutige Modellierung der multivariaten Ausfallverteilung müssten – zumindest theoretisch – die einzelnen 2-dimensionalen Kontingenztafeln der  $2^N$  möglichen Kombinationen von Ausfallindikatoren  $\{(I_i, I_j)\}_{1 \leq i, j \leq N; i \neq j}$  durch eine multivariate Kontingenztafel ersetzt werden. Das wäre gleichbedeutend mit einer direkten Modellierung aller Elementarwahrscheinlichkeiten, was aufgrund der enormen Anzahl schlicht unmöglich ist. In Wissenschaft und Praxis entwickelte Kreditrisikoportfoliomodelle unterscheiden sich insbesondere in der Art und Weise der (impliziten) Gestaltung der multivariaten Kontingenztafel.

<sup>361</sup> Für eine Modellierung multivariater Kontingenztafeln mit erweiterten (hochdimensionalen) log-linearen Modellen siehe. Y. Bishop, S. Fienberg und P. Holland (1995), Discrete multivariate analysis, S. 42-48.

### 2433 Ausfallkorrelationen und Abhängigkeiten von Kreditausfällen im einfachen Unternehmenswertansatz

Im einfachen Unternehmenswertansatz wird die Korrelation zwischen den Ausfallindikatoren  $\{(I_i, I_j)\}_{1 \leq i, j \leq N}$  implizit durch die Modellierung einer Korrelation zwischen den ausfallrisikotreibenden Parametern, den Unternehmenswerten  $\{(A_{i,t}, A_{j,t})\}_{1 \leq i, j \leq N, t \in [0, T]}$ , erzeugt. Dazu werden die stochastischen Unternehmenswertprozesse in Abhängigkeit von mehreren unabhängigen BROWNSchen Bewegungen gebracht:

**Definition 2-12 (M-dimensionale BROWNSche Bewegung):** Der M-dimensionale Zufallsvektor  $\mathbf{B}_t = (B_{1,t}, \dots, B_{M,t})$  folgt einer M-dimensionalen BROWNSchen Bewegung, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:<sup>362</sup>

- (1) Die Zufallsvariablen  $B_{m,t}$  mit  $m = 1, \dots, M$  folgen jeweils einer (einfachen) BROWNSchen Bewegung.<sup>363</sup>
- (2) Für  $m \neq l$  sind die BROWNSchen Prozesse  $B_{m,t}$  und  $B_{l,t}$  unabhängig voneinander.

Alle Unternehmenswertprozesse werden in Abhängigkeit von ein und denselben BROWNSchen Bewegungen, jedoch mit unterschiedlichen Volatilitätsparametern  $\sigma_{A,i}^{(m)}$  modelliert:

$$\begin{pmatrix} dA_{1,t} \\ \vdots \\ dA_{N,t} \end{pmatrix}_{d\mathbf{A}_t} = \text{diag} \begin{pmatrix} A_{1,t} \\ \vdots \\ A_{N,t} \end{pmatrix}_{\mathbf{A}_t} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{A,1} \\ \vdots \\ \mu_{A,N} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\mu}_A} \cdot dt + \text{diag} \begin{pmatrix} A_{1,t} \\ \vdots \\ A_{N,t} \end{pmatrix}_{\mathbf{A}_t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{A,1}^{(1)} & \dots & \sigma_{A,1}^{(M)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{A,N}^{(1)} & \dots & \sigma_{A,N}^{(M)} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}_A^{(N \times M)}} \cdot \begin{pmatrix} dB_{1,t} \\ \vdots \\ dB_{M,t} \end{pmatrix}_{d\mathbf{B}_t}. \quad (2.57)$$

In Analogie zu Abschnitt 2422 wird über  $d\mathbf{A}_t$  ausgehend von einem Startwert  $\mathbf{A}_0$  integriert und man erhält eine M-dimensionale stochastische Integralgleichung:<sup>364</sup>

$$\mathbf{A}_T - \mathbf{A}_0 = \int_0^T \text{diag} \mathbf{A}_u \cdot \boldsymbol{\mu}_A \cdot du + \int_0^T \text{diag} \mathbf{A}_u \cdot \boldsymbol{\sigma}_A^{(N \times M)} \cdot d\mathbf{B}_u. \quad (2.58)$$

Die Lösung des stochastischen Integrals (2.58) findet sich relativ einfach, wenn man berücksichtigt, dass die Summe geeignet gewichteter BROWNScher Bewegungen wiederum eine BROWNSche Bewegung ergibt.<sup>365</sup>

<sup>362</sup> Vgl. S. Shreve (1997), Stochastic calculus, S. 173. Für eine mathematisch rigorose Definition siehe I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 72 f.

<sup>363</sup> Vgl. Definition 2-7.

<sup>364</sup> Eine mathematisch rigorose Darstellung der Erweiterung des ITÔ-Integrals auf den mehrdimensionalen Fall siehe B. Øksendal (2003), Stochastic differential equations, S. 34 f.

<sup>365</sup> Eine Alternative stellt ITÔ's Lemma für den multivariaten Fall dar. Siehe S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 245-248; B. Øksendal (2003), Stochastic differential equations, S. 48 f.

$$\tilde{B}_{i,t} = \frac{1}{\sqrt{\left[\sigma_{A,i}^{(1)}\right]^2 + \dots + \left[\sigma_{A,i}^{(M)}\right]^2}} \cdot \left(\sigma_{A,i}^{(1)} \cdot B_{1,t} + \dots + \sigma_{A,i}^{(M)} \cdot B_{M,t}\right). \quad (2.59)$$

Dann lässt sich unter Ausnutzung der Eigenschaft der Linearität des ITÔ-Integrals bezüglich mehrerer Integrationskonstanten<sup>367</sup> schreiben:

$$\begin{aligned} A_{i,T} - A_{i,0} &= \int_0^T \mu_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot du + \sum_{m=1}^M \left( \int_0^T \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot A_{i,u} \cdot dB_{m,u} \right) \\ &= \int_0^T \mu_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot du + \int_0^T A_{i,u} \cdot d\left(\sigma_{A,i}^{(1)} \cdot dB_{1,u} + \dots + \sigma_{A,i}^{(M)} \cdot dB_{M,u}\right). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Vergleicht man die Klammerausdrücke in (2.59) und (2.60), dann folgt für (2.60):

$$A_{i,T} - A_{i,0} = \int_0^T \mu_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot du + \int_0^T \sqrt{\left[\sigma_{A,i}^{(1)}\right]^2 + \dots + \left[\sigma_{A,i}^{(M)}\right]^2} \cdot A_{i,u} \cdot d\tilde{B}_{i,t}. \quad (2.61)$$

Mit Blick auf (2.11) folgt, dass sich die Volatilität des Unternehmenswertes  $\sigma_{A,i}$  aus den Volatilitätsparametern  $\sigma_{A,i}^m$  ableitet. Verwendet man (2.59) als BROWNSche Bewegung für den Unternehmenswertprozess  $W_{i,t}$ <sup>368</sup>, dann ergibt sich unmittelbar als Lösung für (2.58):

$$A_{i,T} = A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \cdot T + \sigma_{A,i} \cdot W_{i,t}} \quad (2.62)$$

mit :

$$\begin{aligned} \sigma_{A,i} &= \sqrt{\left[\sigma_{A,i}^{(1)}\right]^2 + \dots + \left[\sigma_{A,i}^{(M)}\right]^2}, \\ W_{i,t} &= \tilde{B}_{i,t}. \end{aligned}$$

Mit (2.62) folgt, dass die logarithmierten Wertänderungen der Vermögensgegenstände, d. h. die stetigen Unternehmenswertrenditen, der Unternehmen  $i$  mit  $i=1, \dots, N$  bzgl. des Zeitpunktes  $T$  mit der Varianz-Kovarianz-Matrix  $\Sigma_{r_k}$  multivariat normalverteilt sind:<sup>369</sup>

$$\ln\left(\frac{\mathbf{A}_T}{\mathbf{A}_0}\right) \sim N\left(\boldsymbol{\mu}_{r_k}, \Sigma_{r_k}\right) \quad (2.63)$$

mit :

$$\boldsymbol{\mu}_{r_k} = \left( \left( \mu_{A,i} - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2 \right) \cdot T \right)_{i=1, \dots, N}, \quad \Sigma_{r_k} = \left( \sum_{m=1}^M \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(m)} \cdot T \right)_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, N}.$$

<sup>366</sup> Dass  $\tilde{B}_i$  eine BROWNSche Bewegung ist, lässt sich mit den Voraussetzungen aus Definition 2-7 prüfen. Insbesondere gilt  $E(\tilde{B}_i) = 0$  und  $Var(\tilde{B}_i) = t$ . Vgl. auch T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 144.

<sup>367</sup> Vgl. T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 112.

<sup>368</sup> Vgl. Definition 2-8.

<sup>369</sup> Neben der Ermittlung der ersten und zweiten (zentralen) Momente der Verteilung müsste darüber hinaus noch gezeigt werden, dass insbesondere die höheren Momente die für eine multivariate Normalverteilung typischen Wert annehmen. Darauf soll hier verzichtet werden.

Die Korrelationskoeffizientenmatrix  $\mathbf{K}_{r_k}$ <sup>370</sup> der multivariat normalverteilten Zufallsvariablen  $\ln(A_{i,T}/A_{i,0})$  ist auf die Volatilitätsparameter  $\sigma_{A,i}^{(m)}$  zurückzuführen.<sup>371</sup>

$$\left[ \mathbf{K}_{r_k} \right]_{i,j} = \frac{\sum_{m=1}^M \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(m)}}{\sigma_{A,i} \cdot \sigma_{A,j}}, \quad \forall \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.64)$$

Ungeachtet der Tatsache, dass Unternehmenswertänderungen untersucht wurden, werden die Korrelationskoeffizienten der Literatur folgend im weiteren Verlauf als Unternehmenswertkorrelationen bezeichnet und mit  $\rho_{A_i, A_j}$  denotiert. Sie stellen jedoch Maße zur Beurteilung der linearen Zusammenhänge der kontinuierlichen Unternehmenswertrenditen dar. Die Korrelationskoeffizientenmatrix wird mit Bezug auf die Modellklasse der Unternehmenswertmodelle mit  $\mathbf{K}_A$  bezeichnet.

Zur Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeit (2.2) kann wie im Abschnitt 2422 vorgegangen werden. Die Gleichung (2.62) wird in Gleichung (2.2) eingesetzt. Durch Standardisierung der normalverteilten Zufallsvariablen  $B_{m,T}/\sqrt{T} = Z_{m,T}$  erhält man analog zu (2.34):

$$\begin{aligned} p_i &= \Pr \left[ \tilde{B}_{i,T} = \sum_{m=1}^M \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot B_{m,T} / \sigma_{A,i} < \ln \left( \frac{D_{i,T}}{A_{i,0}} \right) + \left( \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} - \mu_{A,i} \right) \cdot T / \sigma_{A,i} \right] \\ &= \Pr \left[ \frac{\tilde{B}_{i,T}}{\sqrt{T}} = \sum_{m=1}^M \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot Z_{m,T} / \sigma_{A,i} =: Z_{i,T} < \ln \left( \frac{D_{i,T}}{A_{i,0}} \right) + \left( \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} - \mu_{A,i} \right) \cdot T / \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T} \right] \end{aligned} \quad (2.65)$$

mit :

$$\tilde{B}_{i,T} \sim N(0, T), Z_{i,T} \sim N(0, 1).$$

Als Ausfallwahrscheinlichkeit erhält man mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung erneut (2.35). Der Ausdruck  $\ln(D_{i,T}/A_{i,0}) + (\sigma_{A,i}^2/2 - \mu_{A,i})T/\sigma_{A,i}\sqrt{T}$  kann als (standardisierte) Ausfallschranke interpretiert werden. Simulativ lässt sich durch Ziehung einer Ausprägung der standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $Z_{i,T}$  entscheiden, ob ein Kreditausfall vorliegt. Anhand des Zeitraums  $[0, T]$  betrachtet, besteht die Ausfallschranke aus einem einzelnen Punkt in  $T$ . Der Ausfall findet statt, wenn die Ausprägung des Prozesses  $\tilde{B}_{i,t}$  in  $T$  kleiner ist als  $\ln(D_{i,T}/A_{i,0}) + (\sigma_{A,i}^2/2 - \mu_{A,i})T/\sigma_{A,i}$ . Der Prozessverlauf bis  $T$  spielt für die Entscheidungsfindung keine Rolle.

<sup>370</sup> Vgl. Anlage 3.

<sup>371</sup> Die Korrelationskoeffizienten können bei unterschiedlichen Volatilitätsparametern unterschiedliche Werte annehmen, obwohl die Unternehmenswertprozesse von ein- und demselben Zufallsvektor  $\mathbf{B}_t$  beeinflusst werden. Vgl. auch S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 246.

Neben den BERNOULLIVerteilungen der Ausfallindikatoren  $I_i$  sind auch die Abhängigkeitsstrukturen zwischen den Ausfallindikatoren bestimmt. Zunächst ist festzuhalten, dass die Zufallsvariablen  $Z_{i,T}$  gemeinsam  $N$ -variater standardnormalverteilt sind:

$$\mathbf{Z}_T^{(N)} \sim N(\mathbf{0}, \Sigma_Z)$$

mit :

$$[\Sigma_Z]_{i,j} = \frac{\sum_{m=1}^M \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(m)}}{\sigma_{A,i} \cdot \sigma_{A,j}} \quad \forall \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (2.66)$$

Die Korrelationskoeffizientenmatrix<sup>372</sup> der standardisierten Zufallsvariablen  $Z_{i,T}$  stimmt mit der Korrelationskoeffizientenmatrix der kontinuierlichen Unternehmenswertrenditen  $\ln(A_{i,T}/A_{i,0})$  überein und ist folglich unveränderlich bzgl. der Standardisierung:

$$\Sigma_Z = \mathbf{K}_Z = \mathbf{K}_A. \quad (2.67)$$

Damit lassen sich die Unternehmenswertprozesse unabhängig vom  $M$ -dimensionalen Zufallsvektor  $\mathbf{B}_T$  mit Hilfe des optionspreistheoretischen Ansatzes aus Abschnitt 2423 parametrisieren. Die notwendige Korrelationskoeffizientenmatrix  $\mathbf{K}_A$  lässt sich ohne Kenntnis der Volatilitätsparameter aus den gewonnenen Zeitreihen schätzen. Die multivariate BROWNSche Hintergrundbewegung bleibt damit vorerst lediglich ein gedankliches Konstrukt ohne ökonomische Interpretation.<sup>373</sup> Darüber hinaus lässt sich von den genauenschuldtitelspezifischen Merkmalen wie die exakte Höhe des jeweiligen Forderungsbetrags, der Wert der als Sicherheit dienenden Vermögensgegenstände sowie die Unternehmenswertvolatilität modelltheoretisch abstrahieren. Alle relevanten Informationen wurden in den Ausfallwahrscheinlichkeiten bzw. den dazugehörigen (standardisierten) Ausfallsschranken<sup>374</sup> verdichtet. Insbesondere lässt sich zur Ermittlung der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten auf die Standardnormalverteilung mit der Korrelationskoeffizientenmatrix  $\mathbf{K}_A$  abstellen.

Zur Bestimmung der gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,j}$  zweier Schuldtitel, ist aus der  $N$ -variater Standardnormalverteilung des Zufallsvektors  $\mathbf{Z}_T^{(N)}$  die bivariate Randverteilung der jeweiligen Zufallsvariablen  $Z_{i,T}$  und  $Z_{j,T}$  zu bestimmen. Die bivariate Randverteilung ist wiederum standardnormal. Die entsprechende Randdichtefunktion der Teil-

<sup>372</sup> Da die Zufallsvariablen  $Z_{T,i}$  standardnormalverteilt sind, stimmen die Kovarianzen und die Korrelationskoeffizienten überein.

<sup>373</sup> Durch die Einführung von Faktormodellen erhalten die BROWNSchen Hintergrundbewegungen auch eine ökonomische Interpretation. Vgl. Abschnitt 2434.

<sup>374</sup> Vgl. Formel (2.65).

menge  $\{Z_{i,T}, Z_{j,T}\} \subset \{Z_{1,T}, \dots, Z_{N,T}\}$  erhält man durch Integration der multivariaten Dichte über die übrigen Elemente  $\{Z_{1,T}, \dots, Z_{N,T}\} / \{Z_{i,T}, Z_{j,T}\}$ .<sup>375</sup>

$$f_{SN,(Z_{i,T}, Z_{j,T})}(z_{i,T}, z_{j,T}) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{SN, Z_T^{(N)}}(z_{1,T}, \dots, z_{N,T}) \prod_{k, k \neq i, j} dz_{k,T}. \quad (2.68)$$

Die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,j}$  ergibt sich als Volumen unter der bivariaten Randdichtefunktion über der Fläche  $(-\infty, F_{SN}^{-1}(p_i)] \times (-\infty, F_{SN}^{-1}(p_j)]$ . Damit ist die 2-dimensionale Kontingenztafel der Ausfallindikatoren  $I_i$  und  $I_j$  vollständig fixiert. Da der Korrelationskoeffizient  $\rho_{A_i, A_j}$  die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,j}$  bei gegebenen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_i$  und  $p_j$  bestimmt, besteht eine deterministische Beziehung zum Ausfallkorrelationskoeffizienten  $\rho_{I_i, I_j}$ . In Relation zum Korrelationskoeffizienten der kontinuierlichen Unternehmenswertrenditen nimmt die Ausfallkorrelation regelmäßig wesentlich kleinere Werte an.<sup>376</sup>

Für die Modellierung der paarweisen Ausfallkorrelation über korrelierte BROWNSche Bewegungen ist in Anbetracht der oben identifizierten Wertebereiche der Elementarwahrscheinlichkeiten (Vgl. Abb. 2-10) bei gegebenen bivariaten Kontingenztafeln die Frage zu klären, welche Werte letztlich durch das Unternehmenswertmodell impliziert werden. Zur Beantwortung dieser Frage werden in Fortsetzung des obigen Beispiels drei homogene Kredite mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von  $p_i=10\%$  und einer Ausfallkorrelation von  $\rho_{I_i, I_j}=7,99584\%$  betrachtet. Die Ausfallkorrelation ist konsistent mit einer Unternehmenswertkorrelation von  $\rho_{A_i, A_j}=20\%$ .<sup>377</sup> Die Elementarwahrscheinlichkeiten des Kontingenzwürfels lassen sich mit Hilfe der Monte Carlo Simulation bestimmen. Bei 1 Mio. Simulationsläufen ergab sich eine gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit von  $\pi_{000}=74,7411\%$ . Dieser Wert füllt den letzten verbliebenen Freiheitsgrad (Vgl. Tab. 2-4), womit der Kontingenzwürfel vollständig bestimmt ist.<sup>378</sup> Im übertragenen Sinne wird der letzte Freiheitsgrad durch die Wahl des Unternehmenswertmodells zur Modellierung von Abhängigkeiten zwischen Kreditausfällen besetzt. Dabei wird deutlich, dass das Unternehmenswertmodell die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit in Relation zum Wertebereich von  $[0,73439250; 0,75158875]$  (Vgl. Tab. 2-4) mit einem relativ hohen Wert belegt, wohingegen umgekehrt die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit relativ niedrig ausfällt.

<sup>375</sup> Zu grundlegenden Eigenschaften der multivariaten Normalverteilung siehe Y. Tong (1990), The multivariate normal distribution, S. 23-46. Zum Spezialfall der bivariaten Normalverteilung vgl. ebenda, S. 6-21.

<sup>376</sup> Für ein einfaches Zahlenbeispiel siehe P. Schönbucher (2000), Factor models, S. 8. Siehe auch M. Wahrenburg und S. Niethen (2000), Kreditrisikomodellierung, S. 500-504.

<sup>377</sup> Vgl. Fn. 353.

<sup>378</sup> Die Elementarwahrscheinlichkeiten für zwei von drei möglichen Kreditausfällen sollten bei homogenen Krediten identisch sein. Die beobachtbaren Abweichungen sind auf Simulationszufälle zurückzuführen.

## 2434 Vom einfachen Unternehmenswertansatz zum Faktormodell

Die Modellierung von Korrelationen zwischen kontinuierlichen Unternehmenswertrenditen durch die Einführung einer multivariaten BROWNSchen Bewegung, welche alle Unternehmenswertprozesse nach Maßgabe der einzelnen unternehmensspezifischen Volatilitätsparameter beeinflusst, erlangt eine ökonomische Fundierung, wenn die  $M$  unabhängigen BROWNSchen Bewegungen  $B_{m,t}$  mit  $m = 1, \dots, M$  als Prozesse von  $M$  Risikofaktoren interpretiert werden. Zudem kann mit der Betrachtung von Risikofaktoren die Schätzung der  $1/2 \cdot N \cdot (N - 1)$  Korrelationen der Korrelationskoeffizientenmatrix  $\mathbf{K}_A$  aus Zeitreihen einzelner Unternehmenswerte durch die Schätzung der unternehmensspezifischen Volatilitätsparameter mit Hilfe von Regressionsverfahren ersetzt werden.<sup>379</sup>

**Definition 2-13 (Faktormodell):** Ein  $N$ -dimensionaler Zufallsvektor  $\mathbf{X}$  folgt einem linearen  $M^*$ -Faktormodell mit  $M^* < N$  wenn der Zufallsvektor  $\mathbf{X}$  durch die folgende Linearkombination beschrieben werden kann:

$$X_i = \sum_{m=1}^{M^*} a_{i,m} \cdot \Psi_m + b_i \cdot \varepsilon_i + \mu_i \quad (2.69)$$

mit:

- (1)  $\mathbf{a} = (a_{i,m})_{i=1, \dots, N; m=1, \dots, M^*} \in \mathbb{R}^{N \times M^*}$ ,  $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$  und  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_i)_{i=1, \dots, N} \in \mathbb{R}^N$  sind Konstanten,
- (2)  $\boldsymbol{\Psi} : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^{M^*}, B^{M^*})$  ist ein  $M^*$ -dimensionaler Zufallsvektor mit  $E(\boldsymbol{\Psi}) = \mathbf{0}$  und  $Cov(\boldsymbol{\Psi}) = diag(\mathbf{I}_{M^*})$ ,
- (3)  $\boldsymbol{\varepsilon} : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (\mathbb{R}^N, B^N)$  ist ein  $N$ -dimensionaler Zufallsvektor mit  $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$  und  $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = diag(\mathbf{I}_N)$ ,
- (4)  $\Psi_i$  und  $\varepsilon_i$  sind unkorreliert, d. h.  $Cov(\Psi_i, \varepsilon_j) = 0$ .

Für die Varianz-Kovarianz-Matrix  $\boldsymbol{\Sigma}$  des Zufallsvektors  $\mathbf{X}$  ergibt sich:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{a}'\mathbf{a} + diag(b_1^2, \dots, b_N^2). \quad (2.70)$$

Wird für die Zufallsvektoren  $\boldsymbol{\Psi}$  und  $\boldsymbol{\varepsilon}$  die Normalverteilung unterstellt, stellt (2.69) eine Linearkombination unabhängig standardnormalverteilter Zufallsvariablen dar. Der Zufallsvektor  $\mathbf{X}$  folgt dann ebenfalls der Normalverteilung:

$$\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (2.71)$$

<sup>379</sup> Die Schwierigkeit der Schätzung der Korrelationsmatrix wird nicht nur durch die Anzahl der Korrelationen verursacht. Die Korrelationsmatrix muss darüber hinaus positiv definit sein.

Die einzelnen  $\Psi_m$  lassen sich als makroökonomische Faktoren interpretieren, von denen alle Unternehmenswerte gemeinsam beeinflusst werden.<sup>380</sup> Die  $\varepsilon_i$  repräsentieren unternehmensspezifische, portfoliotheoretisch diversifizierbare Risiken. Damit die logarithmierten Unternehmenswertänderungen gem. (2.63) durch ein lineares Faktormodell repräsentiert werden können, muss die Matrix der Volatilitätsparameter der Unternehmenswerte bzgl. der BROWNSchen Hintergrundbewegungen  $\sigma_A^{(N \times M)}$  (2.57) wie folgt präzisiert werden. Einige BROWNSche Bewegungen ( $M^*$ ) werden als Prozesse makroökonomischer Risikofaktoren betrachtet. Die übrigen ( $M - M^* + 1 = N$ ) BROWNSchen Bewegungen werden als Prozesse unternehmensspezifischer Risikofaktoren interpretiert. Dazu werden die Volatilitätsparameter abseits der Hauptdiagonalen  $diag(\sigma_{A,1}^{(M^*+1)}, \sigma_{A,2}^{(M^*+2)}, \dots, \sigma_{A,N}^{(M)})$  auf null gesetzt:

$$\sigma_A^{(N \times M)} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} \sigma_{A,1}^{(1)} & \dots & \sigma_{A,1}^{(M^*)} & \sigma_{A,1}^{(M^*+1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{A,N}^{(1)} & \dots & \sigma_{A,N}^{(M^*)} & 0 & \dots & \sigma_{A,N}^{(M)} \end{array} \right). \quad (2.72)$$

Damit erhält man für die Varianz-Kovarianz-Matrix der logarithmierten Unternehmenswertänderungen:

$$|\Sigma|_{i,j} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{M^*} \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(m)} \cdot T & \text{für } i \neq j, \\ \sum_{m=1}^{M^*} \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(m)} \cdot T + \sigma_{A,i}^{(M^*+i)} \cdot \sigma_{A,j}^{(M^*+j)} \cdot T & \text{für } i = j. \end{cases} \quad (2.73)$$

Setzen wir nun:

$$\Psi^t = \frac{1}{\sqrt{T}} (B_{1,T}, \dots, B_{M^*,T})^{381}, \quad (2.74)$$

$$\varepsilon^t = \frac{1}{\sqrt{T}} (B_{M^*+1,T}, \dots, B_{M,T}), \quad (2.75)$$

<sup>380</sup> Bspw. werden im Modell CREDITMETRICS™ von J. P. MORGAN 199 Branchenindizes aus 28 Ländern verwendet. Vgl. R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 40.

<sup>381</sup> Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass gem. der Definition 2-12 (Multivariate BROWNSche Bewegung) die Zufallsvariablen  $B_{i,T}$  mit dem Erwartungswert null und der Varianz  $T$  unabhängig normalverteilt sind. Entsprechend der Bedingung (2) der Definition 2-13 müssen die Faktoren jedoch eine Varianz von eins aufweisen. Die Standardisierung der Zufallsvariablen  $B_{i,T}$  mit Hilfe der Wurzel-Zeit-Regel impliziert eine Standardisierung der BROWNSchen Prozesse  $B_{i,t}$  auf einen Zeithorizont von  $T=1$ . Grundlage dafür ist die Eigenschaft der „Selbstähnlichkeit“ der BROWNSchen Bewegung. Es gilt:

$$(\sqrt{T} \cdot B_{1,t}, \dots, \sqrt{T} \cdot B_{m,t}) =_d (B_{1,T-t}, \dots, B_{m,T-t}).$$

Durch die Standardisierung auf einen Zeithorizont von  $T=1$  ergibt sich die geforderte Varianz von eins für  $\Psi_m$ . Es ist jedoch wichtig herauszustellen, dass sich die multivariate Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht ändert. Insbesondere erbt der standardisierte Zufallsvektor die Korrelationskoeffizientenmatrix. Zur Eigenschaft der „Selbstähnlichkeit“ siehe T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 36.

$$\mathbf{a} = \sqrt{T} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{A,1}^{(1)} & \cdots & \sigma_{A,1}^{(M^*)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{A,N}^{(1)} & \cdots & \sigma_{A,N}^{(M^*)} \end{pmatrix}, \quad (2.76)$$

$$\mathbf{b}^t = \sqrt{T} \cdot \left( \sigma_{A,1}^{(M^*+1)}, \dots, \sigma_{A,N}^{(M)} \right) \text{ und} \quad (2.77)$$

$$\boldsymbol{\mu} = T \cdot \left( \mu_{A,1} - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,1}^2, \dots, \mu_{A,N} - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,N}^2 \right), \quad (2.78)$$

wird der Zufallsvektor  $\ln(\mathbf{A}_T/\mathbf{A}_0)$  durch ein Faktormodell gem. (2.69) beschrieben. Für die Korrelationskoeffizientenmatrix  $\mathbf{K}_A$  erhält man:<sup>382</sup>

$$|\mathbf{K}_A|_{i,j} = \begin{cases} \frac{\sum_{m=1}^{M^*} \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(m)}}{\sigma_{A,i} \cdot \sigma_{A,j}} & \text{für } i \neq j, \\ \frac{\sum_{m=1}^{M^*} \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(m)}}{\sigma_{A,i} \cdot \sigma_{A,j}} + \frac{\sigma_{A,i}^{(M^*+i)} \cdot \sigma_{A,j}^{(M^*+j)}}{\sigma_{A,i} \cdot \sigma_{A,j}} & \text{für } i = j. \end{cases} \quad (2.79)$$

Ähnlich der Vorgehensweise im Abschnitt 2433, kann auch im Rahmen des Faktormodells eine Standardisierung des Zufallsvektors  $\ln(\mathbf{A}_T/\mathbf{A}_0)$  erfolgen:

$$Z_{i,T} = \frac{\ln\left(\frac{A_{i,T}}{A_{i,0}}\right) - \left(\mu_{A,i} - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2\right) \cdot T}{\sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}}. \quad (2.80)$$

Dazu ersetzen wir den Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu}$  durch den Nullvektor. Die Konstanten  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind wie folgt zu modifizieren:

$$\mathbf{a}' = \sqrt{T} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{A,1}^{(1)}/\sigma_{A,1} & \cdots & \sigma_{A,1}^{(M^*)}/\sigma_{A,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{A,N}^{(1)}/\sigma_{A,N} & \cdots & \sigma_{A,N}^{(M^*)}/\sigma_{A,N} \end{pmatrix} \text{ und} \quad (2.81)$$

$$\mathbf{b}'' = \sqrt{T} \cdot \left( \sigma_{A,1}^{(M^*+1)}/\sigma_{A,1}, \dots, \sigma_{A,N}^{(M)}/\sigma_{A,N} \right). \quad (2.82)$$

Aufgrund der Unveränderlichkeit des Korrelationskoeffizienten bezüglich linearer Transformationen bleibt die Korrelationskoeffizientenmatrix in Analogie zu (2.67) von der Standardisierung unberührt.

<sup>382</sup> Vgl. auch M. Nyfeler (2000), Modelling dependencies, S. 6.

## 2435 Faktormodellbasierte Kreditrisikoportfoliomodelle aus Literatur und Praxis

Mit zunehmendem Bedarf der Praxis an Verfahren zur Quantifizierung von Kreditrisiken auf Portfolioebene haben insbesondere international tätige Investmentbanken und Unternehmensberatungsgesellschaften bereits in den 90er Jahren begonnen, entsprechende leistungsfähige Modelle zu entwickeln. Weltweit konnten sich der PORTFOLIO MANAGER™ von KMV, CREDITMETRICS™ von J. P. MORGAN, CREDITPORTFOLIOVIEW™ von MCKINSEY und CREDITRISK+™ von CREDIT SUISSE als Standards etablieren.<sup>383</sup> Während die ersten beiden Modelle der Gruppe der Unternehmenswertmodelle zuzuordnen sind, werden die letzteren wegen ihrer fehlenden ökonomischen Erklärung von Kreditausfällen der Gruppe der reduzierten Modelle zugeschrieben. Daneben wurde in der Literatur eine Vielzahl von Ansätzen vorgeschlagen, die z. T. methodisch mit den obigen Modellen verwandt sind oder Modifikationen und Erweiterungen derselben darstellen. Für theoretische Betrachtungen eignet sich das Unternehmenswertmodell von VASICEK, da mit nur wenigen Parametern die Portfolio- bzw. Verlustverteilung mit ihrer für Kreditportfolios typischen Schiefe in Gestalt einer analytischen Gleichung ermittelt werden kann.<sup>384</sup> Nachteilig ist, dass eine adäquate Abbildung realer Kreditportfolios durch die knappe Parametrisierung nicht immer gelingt, so dass die Anwendungen auf grundsätzliche Überlegungen und Zusammenhänge beschränkt bleiben.<sup>385</sup> Da in den weiteren Kapiteln des Öfteren auf das VASICEK-Modell zu Vergleichszwecken zurückgegriffen wird, soll es hier zusammen mit CREDITMETRICS™ kurz skizziert werden. Bedeutung erlangt das Modell darüber hinaus dadurch, dass es die theoretische Basis der neuen Basler Regeln zur Unterlegung von Kreditrisiken mit haftendem Eigenkapital liefert.<sup>386</sup> Auf die Darstellung von KMV's PORTFOLIO MANAGER™ wird verzichtet, da mangels öffentlich zur Verfügung gestellter Informationen seitens der KMV Corporation die Modellkonstruktion auf Portfolioebene nur unzureichend nachvollzogen werden kann.<sup>387</sup> Ebenso soll für Darstellungen der reduzierten Modelle auf die Literatur verwiesen werden.<sup>388</sup>

---

<sup>383</sup> Vgl. R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 25.

<sup>384</sup> Der Ansatz erscheint zum ersten Mal in O. Vasicek (1987), Probability of loss on loan portfolio, S. 1-4. In der Literatur wird in diesem Zusammenhang häufig das Working Paper von O. Vasicek (1997) mit dem Titel „The loan loss distribution“ aus dem Jahr 1997 angegeben. Wie P. Schönbucher (2000), Factor models, S. 7, Fn. 4 jedoch festhält, ist dieses Working Paper nicht erhältlich.

<sup>385</sup> Vgl. auch die Ausführungen in den Abschnitten 42 und 43.

<sup>386</sup> Vgl. H. Rau-Bredow (2001), Kreditrisikomodellierung im Neuen Basler Accord, S. 1004 f.

<sup>387</sup> Für gut diversifizierte Kreditportfolios lässt sich lt. M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2000), Current credit risk models, S. 102 zeigen, dass der Kreditportfolioverlust einer inversen GAUSS-Verteilung folgt.

<sup>388</sup> Zur Beschreibung von CREDITPORTFOLIOVIEW™ siehe T. Wilson (1997), Portfolio Credit Risk (I), S. 111-117; T. Wilson (1997), Portfolio Credit Risk (II), S. 56-61; T. Wilson (1998), Portfolio Credit Risk, S. 71-82. Eine überblicksartige Darstellung sowie eine Beurteilung des Modells findet sich in R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 46-50. Für Darstellungen von CREDITRISK+™ vgl. CSFB (1997), CR+™ Technical Document, S. 32-75 (Appendix A); S. Paul-Choudhury

Das Modell von VASICEK ist ein einperiodiges Unternehmenswertmodell. Wie im MER-TON-Modell fällt ein Kredit  $i$  aus, wenn die Vermögensgegenstände im Fälligkeitszeitpunkt des Kredits (Kreditrisikohorizont  $t_H$ ) nicht ausreichen, um die Verbindlichkeiten zu tilgen. Zwischenzeitliche Kreditausfälle können nicht modelliert werden.<sup>389</sup> Regelmäßige Tilgungszahlungen können nicht erfasst werden. Auswirkungen von Tilgungszahlungen auf die Verlustverteilung des Portfolios entziehen sich damit einer Untersuchung.

Die logarithmierten Änderungen des Unternehmenswerts (Unternehmenswertrendite) werden mit Hilfe des Faktormodells (2.69) auf einen systematischen Faktor  $\psi \sim SN$  und einen idiosynkratischen Faktor  $\varepsilon_i \sim SN$  zurückgeführt, wobei der Einfluss beider Faktoren auf die (standardisierte) Unternehmenswertrendite entsprechend des Unternehmenswertkorrelationskoeffizienten  $\rho_i$  gewichtet wird:<sup>390</sup>

$$\mathbf{a}'' = \sqrt{t_H} \cdot (\sqrt{\rho_1}, \dots, \sqrt{\rho_N}), \quad (2.83)$$

$$\mathbf{b}'' = \sqrt{t_H} \cdot (\sqrt{1-\rho_1}, \dots, \sqrt{1-\rho_N}). \quad (2.84)$$

Der Kreditausfall tritt ein, wenn die Unternehmenswertrendite bzgl. des Zeitpunkts  $t_H$  eine bestimmte Ausfallschranke unterschreitet. Bei gegebener Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t_H}$  ermittelt sich die Ausfallschranke als  $F_{SN}^{-1}(p_{i,t_H})$ .<sup>391</sup> Fixiert man den systematischen Faktor  $\psi$ , stellt sich die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei gegebenem  $\psi$  die Zufallsvariable  $\varepsilon_i$  einen hinreichend niedrigen Wert annimmt, so dass der Kredit  $i$  ausfällt:

$$\begin{aligned} p_{i,t_H} | \Psi &= \Pr \left[ \sqrt{\rho_i} \cdot \psi + \sqrt{1-\rho_i} \cdot \varepsilon_i \leq F_{SN}^{-1}(p_{i,t_H}) | \Psi \right] \\ &= F_{SN} \left( \frac{F_{SN}^{-1}(p_{i,t_H}) - \sqrt{\rho_i} \cdot \psi}{\sqrt{1-\rho_i}} \right). \end{aligned} \quad (2.85)$$

Für ein homogenes, perfekt diversifiziertes und somit unendlich granulares Kreditportfolio entspricht die Ausfallquote bei gegebenem systematischen Faktor  $\psi$  nach dem Gesetz der großen Zahl der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit (2.85):

$$\Pr \left[ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i = p_{t_H} | \Psi \right] = 1. \quad (2.86)$$

---

(1997), Credit tricks, S. 28-35; L. Overbeck und G. Stahl (1998), Stochastische Modelle, S. 87 f.; M. Wahrenburg und S. Niethen (2000), Alternative Kreditrisikomodelle, S. 240-242; M. Gordy (2000), Anatomy of credit risk models, S. 121-124. Eine überblicksartige Darstellung sowie eine Beurteilung des Modells findet sich in R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 50-58.

<sup>389</sup> Vgl. O. Vasicek (1987), Probability of loss on loan portfolio, S. 1.

<sup>390</sup> Vgl. ausführlicher zum Einfaktormodell die Ausführungen in Abschnitt 341.

<sup>391</sup> Effektiv wird die Umkehrung von (2.65) ermittelt. Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 2433.

Wird der Nominalwert des Kreditportfolios auf den Wert eins normiert<sup>392</sup>, entspricht der normierte Kreditportfolioverlust  $L'_{RP}$  bei einer unterstellten Recovery Rate von null der Ausfallquote. Daraus folgt, dass die bedingte Verteilung des Kreditportfolioverlusts (resp. der Verlustquote) singularär ist:

$$\Pr[L'_{RP} \leq l' | \Psi] = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq l' < p_{i_H} | \Psi, \\ 1 & \text{für } p_{i_H} | \Psi \leq l' \leq 1. \end{cases} \quad (2.87)$$

Die unbedingte Verteilung erhält man nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit<sup>393</sup> durch Integration über alle Ausprägungen von  $\psi$ , gewichtet mit den Werten der Dichtefunktion der (Standard-)Normalverteilung:

$$\Pr[L'_{RP} \leq l'] = E\left(\Pr[L'_{RP} \leq l' | \Psi]\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pr[L'_{RP} \leq l' | u] \cdot f_{SN}(u) \cdot du. \quad (2.88)$$

Für spezifische Verlustquoten  $l'$  wird der Integrand in (2.88) wegen (2.87) für spezifische Faktorausprägungen  $u$  null. Die kritische Faktorausprägung  $u^*$ , ab dem der Integrand von null verschiedene Werte annimmt, ergibt sich durch Gleichsetzen der interessierenden Verlustgröße  $l$  mit (2.85). Nach wenigen Umformungen folgt:

$$u^* = \frac{1}{\sqrt{\rho_i}} \left( F_{SN}^{-1}(p_{i_H}) - F_{SN}^{-1}(l') \cdot \sqrt{1 - \rho_i} \right). \quad (2.89)$$

Daraus folgt mit der Symmetrie von  $f_{SN}(\cdot)$  für die (normierte) Verlustverteilung (2.88):

$$\Pr[L'_{RP} \leq l'] = \int_{u^*}^{\infty} f_{SN}(u) \cdot du = F_{SN} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_i}} \left( F_{SN}^{-1}(l') \cdot \sqrt{1 - \rho_i} - F_{SN}^{-1}(p_{i_H}) \right) \right). \quad (2.90)$$

Als Dichte ergibt sich:<sup>394</sup>

$$f_{L'_{RP}}(l') = \sqrt{\frac{1 - \rho}{\rho}} \cdot e^{\left( \frac{1}{2} (F_{SN}^{-1}(l'))^2 - \frac{1}{2\rho} (\sqrt{1 - \rho} \cdot F_{SN}^{-1}(p_{i_H}) - F_{SN}^{-1}(p_{i_H}))^2 \right)}. \quad (2.91)$$

Positive, homogene Recovery Rates lassen sich problemlos integrieren.<sup>395</sup>

$$f_{L'_{RP}, \delta}(l') = \frac{1}{1 - \delta} f_{L'_{RP}} \left( \frac{l'}{1 - \delta} \right). \quad (2.92)$$

<sup>392</sup> Vgl. auch R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 31.

<sup>393</sup> Vgl. übertragend für den diskreten Fall U. Krenzel (2003), Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 23. Für den stetigen Fall siehe D. Bertsekas und J. Tsitsiklis (2002), Probability, S. 171 f.

<sup>394</sup> Vgl. O. Vasicek (1987), Probability of loss on loan portfolio, S. 4.

<sup>395</sup> Für die Herleitung vgl. übertragend R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 32.

Heterogene Portfolios können mit dem ratingbasierten Modell CREDITMETRICS™ von J. P. MORGAN auf Kosten einer analytischen Formulierung abgebildet werden. Mit diesem Modell sind nicht nur Kreditausfälle, sondern auch Bonitätsänderungen modellierbar. Ausgangspunkt bilden periodenbezogene historische Ratingmigrationshäufigkeiten. Die historischen, von den Ratingagenturen üblicherweise auf jährlicher Basis veröffentlichten Ratingmigrationshäufigkeiten bilden Schätzer für die Migrationswahrscheinlichkeiten  $q_{m,n}$  vom anfänglichen Rating  $R_{m,t}$  zum neuen Rating  $R_{n,t+1}$  mit  $m,n=1, \dots, k$ .<sup>396</sup> Der Wert des Kredits am Ende der Betrachtungsperiode wird in Abhängigkeit des neuen Ratings bestimmt. Sofern der Kredit nicht ausfällt, werden dazu die zukünftigen Zins- und Tilgungszahlungen mit ratingklassenspezifischen Forward-Rates abgezinst.<sup>397</sup> Fällt der Kredit aus und erhält die Ratingeinstufung „Default“, wird der Wert des Kredits mit einer extern (ggf. stochastisch) modellierten Recovery Rate ermittelt.

Die Verwendung von Ratingmigrationsmatrizen ermöglicht nicht nur die Betrachtung verschiedener Kredite mit unterschiedlichen Ratings, sondern erlaubt zudem die Modellierung mehrerer Perioden. Dazu wird unterstellt, dass der Prozess der Ratingmigration stationär ist.<sup>398</sup> Die Ratingmigrationsmatrix wird dazu wiederholt zur Entscheidung der Ratingeinstufung herangezogen.<sup>399</sup> Diese Vorgehensweise bietet den Vorteil, periodische Tilgungszahlungen in die Modellierung des Verlusts im Falle eines eintretenden Kreditausfalls bei längeren Betrachtungszeiträumen mit einzubeziehen. Insbesondere bei Kreditportfolios, die überwiegend aus Darlehen mit vertraglich vereinbartem regelmäßigen Tilgungsdienst bestehen, ist die Erfassung der zwischenzeitlichen Tilgungszahlungen von Interesse.

Auf Einzelkreditbasis ist die mehrperiodige Anwendung von CreditMetrics™ unproblematisch. Auf Portfolioebene ergeben sich jedoch Probleme im Rahmen der Abhängigkeitsstruktur der Bonitätsänderungen.

---

<sup>396</sup> Kritisiert wird in diesem Zusammenhang häufig, dass die Ratingänderungen der Agenturen tendenziell verspätet auf Bonitätsänderungen reagieren. Vgl. M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2000), Current credit risk models, S. 95. Zeitnäher reagiert der Kapitalmarkt. Vgl. V. Heinke (1998), Bonitätsrisiko und Credit Ratings, S. 396-480; S. Jortzik und S. Mergner (2003), Bond Credit Spreads und Ratings, S. 11 f. u. 50-53. Daher wird zuweilen vorgeschlagen, den optionspreistheoretischen Ansatz als Grundlage für die Vergabe von Ratings zu verwenden. Vgl. R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 42. Darüber hinaus kommen grundsätzlich bankinterne Ratingverfahren in Frage.

<sup>397</sup> Vgl. H. Schulte-Mattler und T. Stausberg (1998), Kreditrisikoquantifizierung mit Übergangsmatrizen, S. 636 f. Durch die Verwendung der Forward-Rates bleiben marktzensänderungsinduzierte Wertschwankungen unberücksichtigt. Zudem werden Risikoprämien- und Definitionsänderungen der einzelnen Ratingklassen nicht erfasst. Vgl. R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 39.

<sup>398</sup> Mit der Verwendung historischer Ratingmigrationshäufigkeiten als Schätzer der Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten ist diese Annahme ohnehin implizit in CREDITMETRICS™ enthalten.

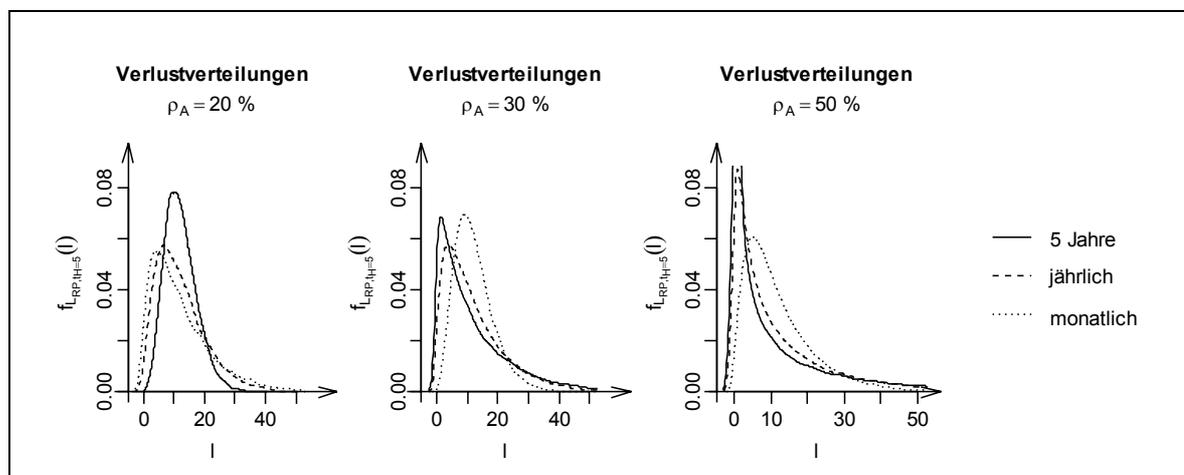
<sup>399</sup> Wird unterstellt, dass der Zustand „Default“ nicht mehr geheilt werden kann, ergibt sich die Ratingmigrationsmatrix für die gesamte Periode aus der wiederholten Multiplikation der Ratingmigrationsmatrix für eine Teilperiode mit sich selbst. Vgl. dazu ausführlich die Ausführungen in Abschnitt 322.

Zur Erfassung von Abhängigkeiten zwischen Bonitätsänderungen wird unterstellt, dass das Rating in funktionaler Beziehung zum Unternehmenswert steht. Bei gegebenem Unternehmenswert und korrespondierendem Rating ergibt sich das neue Rating am Risikohorizont nach Maßgabe der Unternehmenswertentwicklung. Die Abhängigkeiten zwischen den Ratingänderungen folgen aus den Abhängigkeiten zwischen den Unternehmenswertrenditen. Dazu werden zur folgenden Illustration die stetigen Unternehmenswertrenditen erneut mit Hilfe des Faktormodells (2.69) und der Normalverteilungsannahme modelliert.<sup>400</sup>

Im Rahmen einer Monte-Carlo-Simulation werden pro Simulationslauf  $N$  korrelierte Ausprägungen standardisierter Unternehmenswertrenditen  $Z_i$  für jede (Teil-)Periode gezogen. Die Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten  $q_{m,n}$  sind mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung in Quantile (Bonitätsschwellen) zu übersetzen:

$$z_{m,n} = F_{SN}^{-1} \left( 1 - \sum_{l=1}^n q_{m,l} \right) \quad \text{mit } m, n = 1, \dots, k. \quad (2.93)$$

Der Kredit  $i$  wechselt vom anfänglichen Rating  $R_{m,t}$  zum neuen Rating  $R_{n,t+1}$ , wenn  $z_{m,n} < Z_i \leq z_{m,n-1}$  gilt mit  $z_{m,0} = -\infty$ .



**Abb. 2-11: Korrelationseffekte bei mehrperiodiger Anwendung von CREDITMETRICS™**

Verlustverteilungen für ein Kreditportfolio mit 100 endfälligen Krediten. Die Nominalwerte sind uniform eins. Die Restlaufzeiten betragen einheitlich 5 Jahre. Alle Kredite tragen ein „BB“-Rating. Gegenübergestellt sind simulierte verstetigte Wahrscheinlichkeitsfunktionen, wobei der Zeitraum  $[0,5]$  zur mehrperiodigen CREDITMETRICS™-Anwendung in (a) einen Abschnitt, (b) 5 Teilabschnitte und (c) 60 Teilabschnitte zerlegt wurde. Die Rechnungen basieren auf der 1-jährigen Ratingmigrationsmatrix nach STANDARD & POOR'S.<sup>401</sup>

<sup>400</sup> In CREDITMETRICSTM werden die Unternehmenswertkorrelationen mit Aktienkursrenditen geschätzt. Dazu wird zur Vermeidung der Schätzung von paarweisen Aktienkurskorrelationen ein Indexmodell verwendet. Herangezogen werden 199 Branchenindizes aus 28 Ländern. Die Kreditnehmer werden anteilig den Indizes zugeordnet. Für die Ergebnisse dieses Abschnitts ist jedoch die genaue Modellierung der Unternehmenswertkorrelationen von untergeordnetem Interesse und wird nicht weiter betrachtet. Für eine ausführlichere Betrachtung vgl. R. Baule (2004), Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement, S. 40 f. Für alternative Korrelationsschätzungen vgl. P. Schwicht und C. Neske (1997), CreditMetrics, S. 471 f.

<sup>401</sup> Vgl. Tab. 3-2.

In Abb. 2-11 sind Verlustverteilungen für eine vereinfachte Default-Mode-Version von CREDITMETRICS™ auf der Basis eines homogenen Portfolios dargestellt.<sup>402</sup> Das Portfolio besteht aus 100 „BB“-gerateten Krediten mit Nominalwerten i. H. v. eins bei endfälligem Tilgungsdienst. Die Laufzeiten betragen einheitlich 5 Jahre und entsprechen dem Risiko-horizont  $t_H$ . Vereinfachend sei eine Recovery Rate von 0 % unterstellt. Ausgangspunkt bildet ein einperiodiges CREDITMETRICS™-Modell mit einer 5-jährigen Ratingmigrationsmatrix (durchgezogene Linien) und einer Unternehmenswertkorrelation von 20 % (linkes Diagramm). Wird die 5-jährige Periode in (a) 5 Teilperioden (gestrichelte Linien) bzw. (b) 60 Teilperioden (gepunktete Linien) mit entsprechend angepassten Ratingmigrationsmatrizen unterteilt, ändert sich allein durch die Zerlegung die Verlustverteilung.<sup>403</sup> Je mehr Teilperioden verwendet werden, umso mehr Wahrscheinlichkeitsmasse wird bei gleich bleibendem Erwartungswert auf den linken und rechten Abschnitt des Wertebereichs des Portfolioverlusts verschoben. Bei einer Unternehmenswertkorrelation von 0 % hingegen bleibt die Verlustverteilung von der Zerlegung wie bei einem einzelnen Kredit unberührt. Unterstellt man den theoretischen Fall einer Unternehmenswertkorrelation von 100 %, verhält sich das Portfolio wie ein einzelner Kredit und die Anzahl der Teilperioden ist ohne Bedeutung. Betrachtet man alternative Unternehmenswertkorrelationen (mittleres und rechtes Diagramm) muss man festhalten, dass die Wirkungsrichtung nicht eindeutig ist.<sup>404</sup>

Nach diesen Ergebnissen scheidet eine mehrperiodige Anwendung von CREDITMETRICS™ zur Untersuchung von Kreditportfolios mit regelmäßigem Kapitaldienst und darauf aufbauende CDO-Strukturen aus. Kapitaldiensteffekte lassen sich mit der zu ihrer Untersuchung notwendigen Zerlegung der CDO-Transaktionslaufzeit in Teilperioden nicht von Effekten der Abhängigkeitsstruktur trennen. Selbst bei endfälligen Krediten ist eine Betrachtung von Teilperioden notwendig, sofern (a) die Kredite unterschiedliche Restlaufzeiten aufweisen und/oder (b) mit obiger Diskussion<sup>405</sup> Kreditausfälle vor dem Fälligkeitszeitpunkt des Nominalbetrags möglich sind. Eine Lösung des Problems verspricht ein zeitstetiges Kreditportfoliomodell. Zur Aufrechterhaltung der ökonomischen Interpretation des Ausfallereignisses soll weiterhin der Unternehmenswert als zentraler Kreditrisikofaktor dienen. Dazu sind zeitstetige Ausfallschranken einzuführen.

<sup>402</sup> Eine Default-Mode-Version von CREDITMETRICS™ wird in M. Gordy (2000), Anatomy of credit risk models, S. 124 f. beschrieben. Hier werden jedoch (a) mehrere Perioden und (b) sämtliche Bonitätszustände betrachtet. Lediglich die buchwertbasierte Verlustdefinition ist mit der von Gordy identisch.

<sup>403</sup> Zur Methodik der Skalierung von Ratingmigrationsmatrizen auf beliebige Teilperiodenlängen vgl. die Ausführungen in Abschnitt 322.

<sup>404</sup> Einen ähnlichen Effekt beschreibt D. Pugachevsky (2002), Multi-credit models, S. 17-20 im Rahmen der mehrperiodigen Anwendung des MERTON-Modells. Vgl. auch Fn. 456.

<sup>405</sup> Vgl. Abschnitt 2426.

### 3 Entwicklung eines semi-analytisch rechenbaren unternehmenswertorientierten Modells zur Quantifizierung des Kreditrisikos heterogener CDO-Referenzportfolios

#### 31 Modellrahmen und Modelleinordnung im Lichte empirischer Analysen

Ausgangspunkt für die Ermittlung der Forderungsausfälle aus dem Referenzportfolio ist die Annahme, dass ein Forderungsausfall (Default) durch das Unterschreiten des Wertes der Vermögensgegenstände (Assets) des Kreditnehmers einer noch näher zu beschreibenden kritischen Schranke ausgelöst wird. Dieser als Unternehmenswertmodell bekannte Ansatz basiert auf den optionspreistheoretischen Überlegungen von MERTON<sup>406</sup>. Bei bekannter Verteilung des Wertes der Vermögensgegenstände am Ende eines betrachteten Zeithorizontes  $T$  und – bezogen auf denselben Zeithorizont – vorgegebener Ausfallwahrscheinlichkeit  $p$ , lässt sich auf die Ausfallschranke  $K_A$  schließen (vgl. (2.34) mit  $K_A = D_T$ ).

Frühzeitig gaben BLACK & COX<sup>407</sup> zu bedenken, dass der Unternehmenswert vor dem Zeithorizont  $T$  auf eine beliebige Höhe steigen und insbesondere auf ein beliebig niedriges Niveau fallen könnte, ohne dass dies Auswirkungen auf die Kapitalstruktur des betreffenden Unternehmens hätte. Vielmehr – so argumentierten sie – könnten spezifische Vertragsabreden dazu führen, dass die Verletzung einer (zeitabhängigen) oberen und unteren Schranke bereits vor der Fälligkeit des Nominalwertes eine Restrukturierung der Kapitalpositionen zur Folge hätte. Zur Verbesserung des Modells von MERTON führen sie eine Ausfallschranke  $K_A$  für den Verfallszeitpunkt  $T$  und darüber hinaus eine Reorganisationschranke  $C_A(t)$  mit  $t \leq T$  ein.<sup>408</sup> Im Endergebnis ermöglicht eine derartige Erweiterung die Modellierung des jederzeitigen Ausfalls des betrachteten Kredits. Implizit lassen sich dadurch auch (kontinuierliche) Zinszahlungen berücksichtigen. Sieht sich die Geschäftsführung zum Verkauf von Vermögensgegenständen gezwungen, um fälligen Zinsforderungen nachkommen zu können, kann eine u. U. daraus resultierende Verletzung der Reorganisationsschranke i. S. d. Vertragsabreden zum Übergang des Eigentums an dem verbleibenden Unternehmensvermögen an die Fremdkapitalgeber führen.<sup>409</sup> Die Reorganisationsschranke stellt dabei gleichzeitig das wiedergewonnene Kapital dar und beeinflusst somit maßgeblich die Wiedergewinnungsrate (Recovery Rate).<sup>410</sup>

---

<sup>406</sup> Vgl. R. Merton (1974), Pricing corporate debt, S. 449-470.

<sup>407</sup> Vgl. hierzu und zum Folgenden F. Black und J. Cox (1976), Bond indenture provisions, S. 352 u. 355.

<sup>408</sup> Die Reorganisationsschranke kann – muss jedoch nicht – mit der Ausfallschranke in  $T$  zusammenfallen.

<sup>409</sup> Eine Alternative besteht darin, Zinszahlungen durch die Aufnahme von frischem Eigenkapital zu finanzieren. Der Schuldtitel fällt vorzeitig aus, wenn das Unternehmen nicht mehr in der Lage ist, genügend Eigenkapital am Kapitalmarkt aufzunehmen. Ein Modellbeispiel findet sich in R. Geske (1977), Liabilities as compound options, S. 541-552. Das Modell betrachtet zeitdiskrete Zinszahlungen.

<sup>410</sup> F. Black und J. Cox (1976), Bond indenture provisions, S. 357 modellieren die Reorganisationsschranke als konstanten Bruchteil (Recovery Rate) des barwertigen Nominalwertes.

BLACK & COX<sup>411</sup> nehmen weiterhin eine Modifikation des MERTON-Modells zur Berücksichtigung einfacher Senioritätsstrukturen vor.<sup>412</sup> Voraussetzung ist jedoch die strikte Einhaltung der vorgesehenen Rangfolge der Ansprüche (Priority Rule) im Rahmen einer Umstrukturierung bzw. Insolvenz der Gesellschaft. Tatsächlich zeigen jedoch empirische Untersuchungen, dass die Verletzung<sup>413</sup> der Rangfolge eher die Regel als die Ausnahme darstellt.<sup>414</sup> In Insolvenzverhandlungen gelingt es den Eigenkapitalgebern häufig, den Fremdkapitalgebern substantielle finanzielle Zugeständnisse abzurufen.<sup>415</sup> Begründet wird dies gelegentlich mit der Möglichkeit des Schuldners, unter dem Schutz des Insolvenzrechts ein begonnenes Insolvenzverfahren gegen die Interessen der Gläubiger langwierig und somit kostenintensiv zu gestalten.<sup>416</sup> Weiterhin werden unabdingbare fach- und branchenspezifische Kenntnisse und folglich eine große Verhandlungsmacht des Managements bei einer angestrebten Fortführung des Unternehmens, sowie asymmetrische Informationsverteilungen zum Nachteil der Schuldner angeführt. LELAND<sup>417</sup> erfasst Verletzungen der Priority Rule durch eine Zahlung an das Eigenkapital in Höhe eines konstanten, exogen vorgegebenen Bruchteils der Insolvenzmasse. Demgegenüber beziehen MELLA-BARRAL & PERRAUDIN<sup>418</sup> sowie MELLA-BARRAL<sup>419</sup> die Dynamik des Verhandlungsprozesses im Rahmen eines Insolvenzverfahrens explizit in die Modellentwicklung mit ein.<sup>420</sup> Nachteilig ist jedoch die damit einhergehende – insbesondere bei zusätzlicher Einbeziehung von Insolvenzkosten – hohe Modellkomplexität.

---

<sup>411</sup> Vgl. F. Black und J. Cox (1976), Bond indenture provisions, S. 358-361.

<sup>412</sup> Eine Übertragung des Modells von MERTON auf eine Kapitalstruktur mit mehreren Schuldtiteln impliziert eine einheitliche (modellendogene) Recovery Rate.

<sup>413</sup> Die Rangfolge gilt als verletzt, wenn ein nachrangiger Anspruch tlw. oder ganz befriedigt wird, während noch ein vorrangiger Anspruch besteht. Vgl. B. Betker (1995), Deviations from absolute priority, S. 161.

<sup>414</sup> FRANKS & TOROUS haben in 21 von 27 Fällen (78 %) Verletzungen der sog. Priority Rules im Zuge der Reorganisation nach Chapter 11 des U.S. Bankruptcy Codes von 1978 festgestellt. In 18 von diesen 21 Fällen wurden den Eigenkapitalgebern im Zuge der Restrukturierungsverhandlungen erhebliche Teile der Schulden erlassen. Vgl. J. Franks und W. Torous (1989), U.S. firms in reorganisations, S. 754. Diskussionen möglicher Ursachen finden sich ebenda, S. 747 f. u. 748-752 sowie in A. Eberhart, W. Moore und R. Roenfeldt (1990), Priority rule violations, S. 1458 f. Zu ähnlichen Ergebnissen gelangt WEISS im Rahmen einer Studie von 37 an der NYSE und AMEX gelisteten Unternehmen. Er stellte 29 (78 %) Verletzungen der Priority Rules fest. Vgl. L. Weiss (1990), Violation of priority of claims, S. 294-296.

<sup>415</sup> A. Eberhart, W. Moore und R. Roenfeldt (1990), Priority rule violations, S. 1458 u. 1465-1468 haben bei einer Analyse von 30 Insolvenzverfahren einen Ø Mehrerlös i. H. v. 7,6 % der Insolvenzmasse für die Eigenkapitalgeber gegenüber der (hypothetischen) Zahlung unter strikter Einhaltung der Priority Rules festgestellt. B. Betker (1995), Deviations from absolute priority, S. 177 zeigt darüber hinaus empirisch auf, dass der Mehrerlös bei geringerer „Distance to Solvency“ tendenziell größer ist. Begründet wird dies mit der wachsenden Verhandlungsmacht des Eigenkapitals bzw. des Managements mit zunehmend positiven Unternehmensfortführungsaussichten. Vgl. L. Bebchuk und H. Chang (1992), Bargaining and the division of value, S. 255 f. u. 263 f.; J. Franks und W. Torous (1994), Financial recontracting, S. 364 f.

<sup>416</sup> Vgl. P. Mella-Barral (1999), Default and debt reorganization, S. 535 f. und die dort angegebene Literatur.

<sup>417</sup> Vgl. H. Leland (1994), Corporate debt value, S. 1242 f.

<sup>418</sup> Vgl. P. Mella-Barral und W. Perraudin (1997), Strategic debt service, S. 539-547.

<sup>419</sup> Vgl. P. Mella-Barral (1999), Default and debt reorganization, S. 547-549.

<sup>420</sup> Weitere erweiterte Unternehmenswertansätze in der Übersicht finden sich in J. Bohn (2000), Contingent-claims approaches, S. 60-62.

Anstelle einer modellendogenen Bestimmung der Recovery Rate durch die Einbeziehung der zumeist vielfältigen und international ohnehin divergierenden Bestimmungen des jeweiligen Insolvenzrechts, sollen hier die Recovery Rates modellexogen formuliert werden.<sup>421</sup> Orientierung bieten dabei empirische Untersuchungen von ALTMAN & KISHORE<sup>422</sup>, MOODY'S<sup>423</sup> sowie STANDARD & POOR'S<sup>424</sup>. In der Zusammenfassung werden Recovery Rates maßgeblich von der Seniorität der Finanztitel innerhalb der Schuldtitelrangfolge bestimmt. Die Werte (STANDARD & POOR'S) schwanken zwischen 18,7 % (Junior Subordinated) und 81,6 % (Bank Debt).<sup>425</sup> Das ursprüngliche Rating zeigt kaum einen Einfluss.<sup>426</sup>

In den 90er Jahren ist verstärkt der Kern der Unternehmenswertmodelle, die Modellierung der Unternehmenswertentwicklung als *Diffusionsprozess*, in die Kritik geraten. Anders als bei Jump-Prozessen, erlaubt die Natur der Diffusionsprozesse keine völlig überraschenden Kreditausfälle, wodurch, so heißt es, (traditionelle) Unternehmenswertmodelle die am Markt beobachteten Credit Spreads systematisch unterschätzen.<sup>427</sup> Empirische Studien zur Güte der Unternehmenswertansätze erschienen jedoch erst in jüngerer Vergangenheit.<sup>428</sup> JONES, MASON & ROSENFELD untersuchten das Modell nach MERTON anhand börslich gehandelter Anleihen für den Zeitraum von 1977 bis 1981 von Unternehmen mit „einfacher“ Kapitalstruktur.<sup>429</sup> Ihre Ergebnisse legen nahe, dass der einfache Unternehmenswertansatz zur Bewertung kreditrisikobehafteter Fremdkapitaltitel keine signifikant besseren Ergebnisse als ein herkömmlicher Barwertsansatz ohne Berücksichtigung des Kreditrisikos liefert.<sup>430</sup> In einer konzeptionell vergleichbaren Studie kommt OGDEN für Neuemissionen zu dem Schluss, dass die Credit Spreads für den Zeitraum von 1973 bis 1985 durchschnittlich um 104 Basispunkte unterschätzt werden.<sup>431</sup> LYDEN & SARANITI bestätigen die systematische Unterschätzung des Kreditrisikos in einer neueren, zeitpunktbezogenen Studie unter

---

<sup>421</sup> Vgl. auch den Ansatz von F. Longstaff und E. Schwartz (1995), Valuing risky debt, S. 794.

<sup>422</sup> Vgl. E. Altman und V. Kishore (1996), Recoveries on defaulted bonds, S. 58.

<sup>423</sup> Vgl. D. Hamilton et al. (2003), Default & recovery rates, S. 20 f. (MOODY'S Studie).

<sup>424</sup> Vgl. K. VandeCastle, D. Keisman und R. Yang (2001), Insights into recoveries, S. 81-86; R. Bos (2003), Initial trading price: Poor recovery indicator, S. 63-66 (STANDARD & POOR'S Studien).

<sup>425</sup> Vgl. R. Bos (2003), Initial trading price: Poor recovery indicator, S. 64.

<sup>426</sup> Vgl. E. Altman und V. Kishore (1996), Recoveries on defaulted bonds, S. 60-63.

<sup>427</sup> Vgl. C. Finger (2002), CG™ Technical Document, S. 5.

<sup>428</sup> Als Grund wird zuweilen der spärliche Zugriff auf verlässliches Datenmaterial durch Akademiker genannt. Vgl. S. Lyden und D. Saraniti (2000), An empirical examination of structural models, S. 3; Y. Eom, J. Helwege und J. Huang (2004), An empirical analysis of structural models, S. 500.

<sup>429</sup> Untersucht wurden ausschließlich öffentlich gehandelte Fremdkapitaltitel ohne Kündigungs- und Konvertierungsrechte. Die emittierenden Unternehmen begaben ausschließlich Stammaktien und hatten nur in unbedeutender Höhe nicht-handelbare Kredite aufgenommen. Vgl. E. Jones, S. Mason und E. Rosenfeld (1984), Empirical investigation of contingent claims analysis, S. 615-618 und 618-624.

<sup>430</sup> Eine ausführlichere Diskussion der Ergebnisse von JONES, MASON & ROSENFELD findet sich in S. Lyden und D. Saraniti (2000), An empirical examination of classical structural models, S. 5 f.

<sup>431</sup> Vgl. J. Ogden (1987), Ratings and yields, S. 335-338.

Ausschluss von Anleihen mit Callable Features und Sinking-Fund Provisions.<sup>432</sup> GEMMILL kommt dagegen für Zerobonds des Zeitraumes von 1992 bis 2001 zu dem Ergebnis, dass Kreditrisiken in Perioden niedriger Volatilität tendenziell unter- und in Perioden hoher Volatilität tendenziell überschätzt werden.<sup>433</sup> Diese Tendenz zu extremen Ergebnissen wird auch von EOM, HELWEGE & HUANG bei einzelnen Finanztiteln mit besonders hohen/niedrigen Unternehmenswertvolatilitäten und Verschuldungsgraden auch für andere Unternehmenswertmodelle beobachtet.<sup>434</sup> Auch Erweiterungen, wie die Einbeziehung stochastischer Zinsverläufe<sup>435</sup>, führen nicht zu deutlichen Verbesserungen.<sup>436</sup>

Neben der quantitativen Analyse wurde versucht, qualitative Merkmale modellendogener Credit Spreads in Abhängigkeit von Bonität und Restlaufzeit am Anleihemarkt zu identifizieren. MERTON folgend, sollten bonitätsrisikoarme Anleihen<sup>437</sup> mit wachsender Restlaufzeit steigende Credit Spreads aufweisen.<sup>438</sup> Ökonomisch wird dies mit der Gefahr der Bonitätsverschlechterung begründet. Für „Schrottanleihen“ sollten infolgedessen mit Blick auf etwaige Kreditwürdigkeitsverbesserungen fallende Verläufe gelten. Zentraler Streitpunkt sind jedoch Anleihen mittlerer Bonität mit einer prognostizierten hügelartigen Spreadstruktur. Als Ursache gelten die konträren Einflüsse der Ausfall- und Bonitätsmigrationswahrscheinlichkeiten.<sup>439</sup> Empirische Analysen von SARIG & WARGA<sup>440</sup> sowie FONS<sup>441</sup> stützen die These für den U.S. Corporate Zerobondmarkt. BOHN bestätigt die Resultate, wobei die Risikoeinstufung sowohl ratingbasiert als auch auf der Grundlage von KMV's EDF<sup>TM</sup>-Maß<sup>442</sup> erfolgt.<sup>443</sup> DÜLLMANN, UHRIG-HOMBURG & WINDFUHR<sup>444</sup> sehen die prognostizierte Struktur in der Tendenz auch für den deutschen Anleihemarkt bestätigt. HEL-

---

<sup>432</sup> Vgl. S. Lyden und D. Saraniti (2000), An empirical examination of structural models, S. 8-11.

<sup>433</sup> Vgl. G. Gemmill (2002), Testing Merton's model for credit spreads, S. 13 u. 24.

<sup>434</sup> Vgl. Y. Eom, J. Helwege und J. Huang (2004), An empirical analysis of structural models, S. 511, 516, 518, 522 u. 535.

<sup>435</sup> Empirische Studien zum Zusammenhang von Credit Spreads und Zinsstrukturen finden sich in G. Duffee (1996), Treasury yields and corporate bond yield spreads (U.S. Corporate Bondmarkt); K. Düllmann, M. Uhrig-Homburg und M. Windfuhr (2000), Risk structure of interest rates, S. 384-386 (DM-Anleihemarkt); M. Nöth (1995), Renditestruktur des DM-Euroanleihemarktes, S. 551-558; S. Jortzik und S. Mergner (2003), Bond Credit Spreads und Ratings, S. 19-26 (U.S. Corporate Bondmarkt).

<sup>436</sup> Vgl. S. Lyden und D. Saraniti (2000), An empirical examination of structural models, S. 112-115; Y. Eom, J. Helwege und J. Huang (2004), An empirical analysis of structural models, S. 519 f.

<sup>437</sup> Das zentrale Bonitätsmerkmal ist dabei MERTON's "Debt-to-Firm Value Ratio".

<sup>438</sup> Zu den theoretischen Spreadverläufen siehe C. Pitts und M. Selby (1983), Corporate debt: A further note, S. 1311-1313.

<sup>439</sup> Vgl. J. Helwege und C. Turner (1999), Credit yield curves for speculative-grade issuers, S. 1870 f.

<sup>440</sup> Vgl. O. Sarig und A. Warga (1989), Risk structure of interest rates, S. 1353-1357.

<sup>441</sup> Vgl. J. Fons (1994), Term structure of credit risk, S. 29-31.

<sup>442</sup> Vgl. M. Crouhy, D. Galai und R. Mark (2001), Risk management, S. 368-381. Siehe auch M. Sellers, O. Vasicek und A. Levinson (2000), The KMV EDF<sup>TM</sup> credit measure, S. 1-5; O. Vasicek (2001), EDF<sup>TM</sup> and bond pricing, S. 1-8.

<sup>443</sup> Vgl. J. Bohn (1999), Characterizing credit spreads, S. 13-15.

<sup>444</sup> Vgl. K. Düllmann, M. Uhrig-Homburg und M. Windfuhr (2000), Risk structure of interest rates, S. 380 ff.

WEGE & TURNER geben jedoch zu bedenken, dass die Hügelform durch systematische Verzerrungen innerhalb der Ratingklassen hervorgerufen werden könnte. Eine paarweise Analyse von Anleihen mit unterschiedlichen Restlaufzeiten, aber zur Ausschaltung von Verzerrungen innerhalb von Ratingklassen mit identischen Emittenten, zeigt steigende Zeitstrukturen für Anleihen der Ratingklassifikationen „B“ und „BB“.<sup>445</sup> In einer konzeptionell ähnlichen Studie bestätigen HE, HU & LANG dieses Ergebnis, erhalten aber für die bonitätsrisikoreichere Ratingklasse „CCC“ wiederum eine fallende Struktur.<sup>446</sup> BOHN verweist auf die Bedeutung der sorgsamsten Risikoklassifikation und zeigt auf, dass das Ergebnis mit dem verwendeten Risikomaß (Ratings, KMV's EDF<sup>TM</sup>-Maß) variieren kann.<sup>447</sup>

Die Güte der Unternehmenswertansätze wurde insbesondere im kurzfristigen Laufzeitbereich in Frage gestellt. Da im Falle kurzer Zeithorizonte für Diffusionsprozesse, anders als für Jump-Prozesse<sup>448</sup>, das Überschreiten von Ausfallsschwellen unwahrscheinlich ist, prognostizieren Unternehmenswertmodelle für abnehmende Restlaufzeiten verschwindende Credit Spreads.<sup>449</sup> Tatsächlich sind aber bereits bei kurzen Laufzeiten nicht nur bei Speculative-Grade-Anleihen beachtliche Credit Spreads zu beobachten. EOM, HELWEGE & HUANG zeigen für „BBB“ und besser geratete Anleihen eine dramatische Unterschätzung der Credit Spreads durch das MERTON-Modell gerade im kürzeren Laufzeitbereich auf.<sup>450</sup>

In der weiteren Vorgehensweise (vgl. Abb. 3-1) werden Reorganisations-, Ausfallsschranken und Unternehmenswertprozesse so zu modellieren sein, dass Ausfallwahrscheinlichkeiten für jeden beliebigen, insbesondere auch kurzfristigen Zeithorizont korrekt reflektiert werden. Die Ausfallwahrscheinlichkeiten werden modellexogen formuliert. Prinzipiell können dazu historische Informationen oder beobachtbare Marktpreise verwendet werden.

---

<sup>445</sup> Vgl. J. Helwege und C. Turner (1999), Credit yield curves for speculative-grade issuers, S. 1874-1877.

<sup>446</sup> Vgl. J. He, W. Hu und L. Lang (2000), Credit spread curves, S. 13 u. 14-17.

<sup>447</sup> Vgl. J. Bohn (1999), Characterizing credit spreads, S. 15-17.

<sup>448</sup> C. Zhou (1997), A jump-diffusion approach, S. 1-47 präsentiert ein Modell mit verändertem Unternehmenswertprozess. Dabei werden exogene Schocks modelliert, die ein überraschendes Unterschreiten der Ausfallsschwelle des Unternehmenswertes trotz vorherigem „sicheren“ Abstand ermöglichen.

<sup>449</sup> Theoretische Diskussionen der Credit Spreads im Modell nach MERTON finden sich in C. Lee (1981), Corporate debt: A note, S. 1187-1189 und C. Pitts und M. Selby (1983), Corporate debt: A further note, S. 1311-1313. Im Normalfall streben die Credit Spreads mit abnehmender Restlaufzeit gegen null. Lediglich für den Fall, dass MERTON's „Debt-to-Firm Value Ratio“  $d = D_T \exp(rT) / A$  kleiner als eins ist, strebt die Ausfallwahrscheinlichkeit für kurze Restlaufzeiten gegen eins und der Credit Spread folglich gegen unendlich. Die Existenz derartiger „Debt-to-Firm Value Ratios“ darf jedoch bezweifelt werden. Vgl. J. Helwege und C. Turner (1999), Credit yield curves for speculative-grade issuers, S. 1883. Im Modell von LONGSTAFF & SCHWARTZ streben die Credit Spreads unabhängig von der Kreditqualität stets gegen null. Vgl. A. Longstaff und E. Schwartz (1995), Valuing risky debt, S. 799-803.

<sup>450</sup> Vgl. Y. Eom, J. Helwege und J. Huang (2004), An empirical analysis of structural models, S. 505 u. 510-534. Für „Schrottanleihen“ verschwindet jedoch das Overpricing-Phänomen. Da im Rahmen der Studie „Debt-to-Firm Value Ratios“ bis max. 0,864 geschätzt wurden, erscheint dieses Ergebnis unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die theoretischen Spreadverläufe für „Debt-to-Firm Value Ratios“ knapp unterhalb von eins auch bereits für kurze Restlaufzeiten hohe Werte annehmen, plausibel.

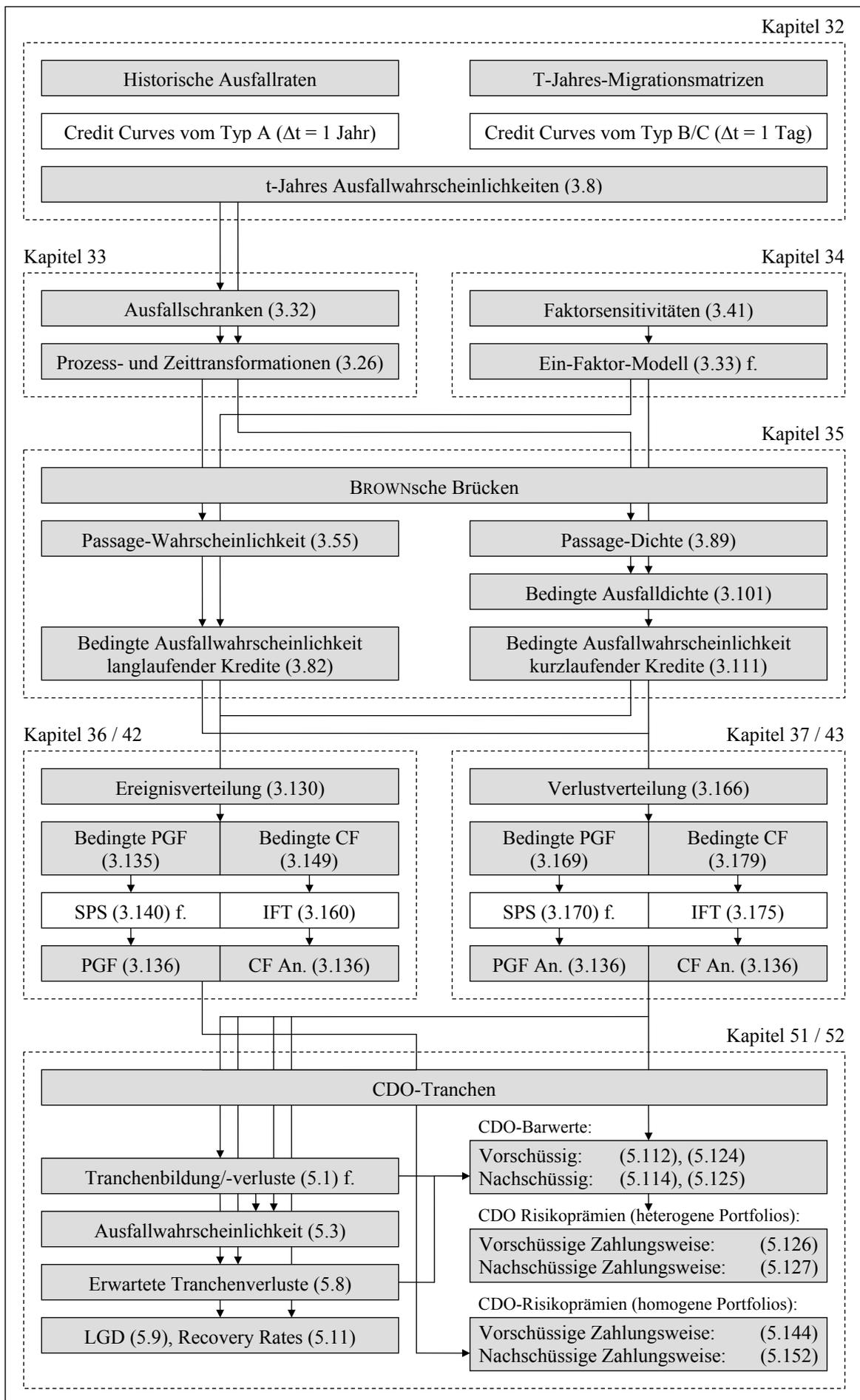


Abb. 3-1: Das semi-analytische Kreditrisikomodel im Überblick

Die Transaktionen am deutschen Verbriefungsmarkt – insbesondere die der KfW im Rahmen des PROMISE-Programms – transferieren jedoch primär Ausfallrisiken von Krediten an Unternehmen des deutschen Mittelstandes.<sup>451</sup> Da mittelständischen Unternehmen im Rahmen der Fremdkapitalfinanzierung der Zutritt zu den organisierten Kapitalmärkten aufgrund zu geringer Bedarfsvolumina und unzureichender Bonität<sup>452</sup> weitgehend verschlossen bleibt, hat sich die Kreditfinanzierung durch Kreditinstitute als vorrangige Form der Fremdkapitalbeschaffung des deutschen Mittelstandes etabliert.<sup>453</sup> Marktpreise für Mittelstandskredite sind infolgedessen nicht verfügbar. Es bleibt der Rückgriff auf historische Informationen der Hausbanken.<sup>454</sup> Sollten bankinterne Informationen für externe Analysen nicht zur Verfügung stehen, kann auf öffentlich zugängliches Datenmaterial der Ratingagenturen zurückgegriffen werden. Die modelltechnische Abbildung exogen vorgegebener Ausfallwahrscheinlichkeiten wird über zeitabhängige Reorganisationsschranken mit geometrisch BROWNSchen Unternehmenswertprozessen bzw. – völlig äquivalent – über konstante Reorganisationsschranken mit zeittransformierten Unternehmenswertprozessen erfolgen. Da im Weiteren  $C_A(T)=K_A$  gilt, werden die Begriffe der Reorganisations- und Ausfallschranke synonym verwendet. Die Betrachtung der Wertentwicklung der Vermögensgegenstände eines Unternehmens als zentralen Kreditrisikofaktor erhält die ökonomische Interpretation des Ausfallereignisses als Unvermögen des Unternehmens, den Zahlungsverpflichtungen aus dem eingegangenen Schuldverhältnis mangels eines ausreichenden Unternehmenswertes nachkommen zu können, aufrecht. Zudem können Zusammenhänge zwischen Ausfällen von Schuldtiteln verschiedener Unternehmen nach wie vor durch korrelierte Prozessänderungen erklärt werden. Im Rahmen der Berücksichtigung regelmäßiger Zins- und Tilgungszahlungen ist jedoch zu beachten, dass die Modellierung zwischenzeitlicher<sup>455</sup> Ausfälle nicht zu Verzerrungen in den Ausfallkorrelationen führt.<sup>456</sup> Angestrebt wird, das Modell so zu formulieren, dass alle Einflussfaktoren auf das Kreditrisiko im

<sup>451</sup> Vgl. D. Glüder und H. Böhm (2003), Innovationen im Fördergeschäft, S. 646 f. Zu Fragen der Abgrenzung des Mittelstandes sowie seiner Bedeutung für die deutsche Marktwirtschaft siehe D. Reis (1998), Internationale mittelständische Unternehmen, S. 11-41.

<sup>452</sup> Die Bonität mittelständischer Unternehmen entspricht im Durchschnitt einem externen „BB“-Rating. Vgl. H. Schulte-Mattler und T. Manns (2004), Kreditkosten des Mittelstandes, S. 378.

<sup>453</sup> Vgl. D. Reis (1998), Internationale mittelständische Unternehmen, S. 30 f.

<sup>454</sup> Die dominierende Form der Eigenkapitalfinanzierung deutscher mittelständischer Unternehmen stellt die Selbstfinanzierung dar. Vgl. D. Reis (1998), Internationale mittelständische Unternehmen, S. 24 f.

<sup>455</sup> „Zwischenzeitlich“ ist hier im Sinne von „vor dem Fälligkeitszeitpunkt des Kredites“ zu sehen.

<sup>456</sup> Ein Mehr-Perioden-MERTON-Modell in Form einer Aneinanderreihung einfacher Monte-Carlo-Experimente auf der Basis der multivariaten Normalverteilung mit ausfallwahrscheinlichkeitskonformen Thresholds für jede Teilperiode und jeden Kredit führt beispielsweise im Vergleich zum Ein-Perioden-MERTON-Modell der Totalperiode zu identischen univariaten aber unterschiedlichen gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten. Im bivariaten Fall können die gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten durch eine Korrektur der Unternehmenswertkorrelation für unterschiedliche Teilperiodenanzahlen einander angeglichen werden. Die Korrektur ist ökonomisch jedoch kaum interpretierbar. Siehe auch D. Pugachevsky (2002), Multi-credit models, S. 17-20. Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 2435.

Portfoliokontext *ceteris paribus* untersucht werden können. Das schließt neben regelmäßigen Tilgungszahlungen (im Gegensatz zu endfälligen Zahlungen) auch die Heterogenität der Restlaufzeiten und Nominalwerte mit ein.

Die große Anzahl der zu berücksichtigenden Parameter – insbesondere im Falle stark heterogener Referenzportfolios – legt die Verwendung von Simulationsmethoden zur Ermittlung der Verlustverteilung des Referenzportfolios nahe. Da Simulationen stets einen hohen Rechenaufwand bedeuten und selbst bei einer hohen Anzahl von Simulationswiederholungen zu Simulationsfehlern führen, ist ein analytisches, zumindest jedoch ein semi-analytisch rechenbares Verfahren der Simulation vorzuziehen. Ein solches Verfahren sollte möglichst viele Parameter – insbesondere die Heterogenität des Referenzportfolios – in die Rechnung mit einbeziehen. Ein analytisches bzw. semi-analytisches Modell würde darüber hinaus Sensitivitätsanalyseergebnisse ermöglichen, die nicht durch Simulationsfehler beeinträchtigt oder gar vollständig durch diese maskiert wären. Die Verwendung BROWNScher Bewegungen in Verbindung mit Zeittransformationen und konstanten Ausfallschranken wird im Folgenden eine weitgehend analytische Formulierung der Ereignis- und Verlustverteilung des Referenzportfolios gestatten.

## **32 Modellierung von Credit Curves**

Die Zuweisung von Ausfallwahrscheinlichkeiten an kreditrisikobehaftete Schuldtitel in Abhängigkeit ihrer Bonitätseinstufungen für jeden beliebigen Zeithorizont geschieht nachfolgend auf der Basis von ratingabhängigen Hazard Rate-Funktionen. Ihre Graphen werden in dieser Arbeit als Credit Curves bezeichnet. Zunächst ist die theoretische Verbindung zwischen zeithorizontabhängigen Ausfallwahrscheinlichkeiten und Credit Curves zu klären. Im Anschluss erfolgt die Modellierung ratingabhängiger Credit Curves mit empirischem Datenmaterial der Ratingagenturen STANDARD & POOR'S sowie MOODY'S.

### **321 Ausfallzeit, Ausfallwahrscheinlichkeit und Credit Curves**

Die Möglichkeit eines jederzeitigen Ausfalls des Schuldtitels  $i$  bedarf der Einführung einer Ausfallzeit  $\tau_i$ . Die Ausfallzeit  $\tau_i$  ist als stetige Zufallsvariable zu verstehen und wird im Folgenden mit Hilfe der First-Passage Time<sup>457</sup> modelliert. Die First-Passage Time  $\tau_{FP,i}$  gibt ausgehend vom Modellierungszeitpunkt  $t_0=0$  die Zeit bis zur Verletzung der Ausfall- bzw. Reorganisationsschranke  $K_{A,i,t}$  durch den Wert der den Schuldtitel sichernden Vermögensgegenstände  $A_{i,t}$  an. Der üblichen Notation folgend, wird  $\tau_i=\infty$  angenommen, falls innerhalb der Restlaufzeit  $[0, T_i]$  keine Verletzung der Schranke  $K_{A,i,t}$  erfolgt:

---

<sup>457</sup> Zum Konzept der First-Passage Time siehe I. Karatzas und S. Shreve (2005), *Brownian motion*, S. 79.

**Definition 3-1 (Ausfallzeit):**

$$\tau_i = \begin{cases} \tau_{FP,i} & \text{für } \tau_{FP,i} \leq T_i, \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

mit :

$$\tau_{FP,i} = \inf \{t : A_{i,t} \leq K_{A,i,t}\}.$$
(3.1)

Die First-Passage Time  $\tau_{FP,i}$  folge der Verteilungsfunktion  $F_{\tau_{FP,i}}(t)$ . Die Verteilungsfunktion sei streng monoton wachsend mit  $F_{\tau_{FP,i}}(0)=0$ . Durch Betrachtung einer infinitesimal kleinen Umgebung an der Stelle  $t$  lässt sich zur Verteilungsfunktion – sofern diese es zulässt – die zugehörige Dichtefunktion  $f_{\tau_{FP,i}}(t)$  definieren.<sup>458</sup>

**Definition 3-2 (Verteilungs- und Dichtefunktion der First-Passage Time):**

$$F_{\tau_{FP,i}}(t) = \Pr[\tau_{FP,i} \leq t] \quad \text{mit } t \geq 0, \quad (3.2)$$

$$f_{\tau_{FP,i}}(t) = \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{\Pr[t \leq \tau_{FP,i} < t + \Delta t]}{\Delta t} \quad \text{mit } t \geq 0. \quad (3.3)$$

Die Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeiten der Schuldtitle lassen sich damit betrachtungszeitpunktabhängig über die Verteilungsfunktionen der First-Passage Time darstellen. Für  $0 \leq t \leq T_i$  ergeben sich die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für den dazugehörigen Betrachtungszeitraum  $[0, t]$  gem.:<sup>459</sup>

$$p_i(t) = F_{\tau_{FP,i}}(t) \quad \text{mit } t \in [0, T_i], \quad (3.4)$$

$$\bar{p}_i(t) = 1 - p_i(t) = 1 - F_{\tau_{FP,i}}(t) \quad \text{mit } t \in [0, T_i]. \quad (3.5)$$

Wird der stochastische Prozess der Vermögensgegenstände  $A_{i,t}$  als geometrische BROWNSche Bewegung gem. (2.10) modelliert, lässt sich bei Kenntnis der Parameter  $\mu_{A,i}$  und  $\sigma_{A,i}$  sowie der (zeitabhängigen) Schranke  $K_{A,i,t}$  die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t}$  modellendogen ermitteln. Zur Vermeidung der Modellierung komplexer Reorganisations- bzw. Insolvenzverhandlungen, sollen die Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeiten jedoch nicht modellendogen ermittelt, sondern, wie auch im Anschluss die Schranken  $K_{A,i,t}$ , modellexogen geschätzt werden.<sup>460</sup> Dazu wird es sich als hilfreich erweisen, Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeiten für jedes beliebige Subzeitintervall  $(t, t+\Delta t]$  angeben zu können.

<sup>458</sup> Vgl. D. Li (2000), On default correlation, S. 44 f.

<sup>459</sup> Für einen Betrachtungszeitpunkt jenseits des Fälligkeitszeitpunktes nimmt die Ausfallwahrscheinlichkeit den Wert für den Fälligkeitszeitpunkt an.

<sup>460</sup> Vgl. Abschnitt 31.

Zur Zuordnung von Ausfall- und Überlebenswahrscheinlichkeiten zu jedem beliebigen Zeitab- und -ausschnitt wird auf die ausfallwahrscheinlichkeitsäquivalente Darstellung der Hazard Rate-Funktion zurückgegriffen. Die Hazard Rate  $h_{i,t}$  beschreibt (näherungsweise) die marginale Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t+\Delta t|t}$  eines Schuldtitels innerhalb des infinitesimal kleinen Zeitintervalls  $(t, t+\Delta t]$  unter der Bedingung, dass das Ausfallereignis bis zum Zeitpunkt  $t$  noch nicht eingetreten ist:<sup>461</sup>

$$\begin{aligned} p_{i,t+\Delta t|t} &= \Pr\left[t < \tau_{FP,i} \leq t + \Delta t \mid t < \tau_i\right] = \frac{F_{\tau_{FP,i}}(t + \Delta t) - F_{\tau_{FP,i}}(t)}{1 - F_{\tau_{FP,i}}(t)} \\ &\approx \frac{f_{\tau_{FP,i}}(t)}{1 - F_{\tau_{FP,i}}(t)} \cdot \Delta t \quad \text{für } t \in [0, T_i]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Der Term  $f_{\tau_{FP,i,t}} / (1 - F_{\tau_{FP,i,t}})$  in (3.6) ist als Hazard Rate  $h_{i,t}$  bzw. als Hazard Rate-Funktion  $h_i(t)$  bekannt und gibt die (bedingte) instantane Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitpunkt  $t$  an:<sup>462</sup>

**Definition 3-3 (Hazard Rate-Funktion):**

$$h_i(t) = \frac{f_{\tau_{FP,i}}(t)}{1 - F_{\tau_{FP,i}}(t)} \quad \text{für } t \geq 0. \quad (3.7)$$

Unter Verwendung von Standardverfahren zum Lösen der Differentialgleichung (3.7) lassen sich die Ausfall- und die Überlebenswahrscheinlichkeit mit Hilfe der Hazard Rate-Funktion beschreiben. Am Beispiel der Ausfallwahrscheinlichkeit erhält man:<sup>463</sup>

$$p_{i,t} = F_{\tau_{FP,i}}(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h_i(s) ds\right) \quad \text{für } t \in [0, T_i]. \quad (3.8)$$

Die marginale Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t+\Delta t|t}$  eines Schuldtitels für das (nicht notwendigerweise infinitesimal kleine) Zeitintervall  $(t, t+\Delta t]$  unter der Bedingung, dass der Schuldtitel bis zum Zeitpunkt  $t$  überlebt hat, lässt sich durch Integration der Hazard Rate-Funktion über dem betrachteten Zeitintervall ermitteln:

$$p_{i,t+\Delta t|t} = F_{\tau_{FP,i}}(t + \Delta t \mid t < \tau_i) = 1 - \exp\left(-\int_t^{\min(t+\Delta t, T_i)} h_i(s) ds\right) \quad \text{für } t \in [0, T_i]. \quad (3.9)$$

<sup>461</sup> Die Hazard Rate ist auch als Default Intensity bekannt. Vgl. K. Giesecke (2004), Introduction to credit risk modeling, S. 507-510.

<sup>462</sup> Vgl. D. Li (2000), On default correlation, S. 45.

<sup>463</sup> Vgl. W. Walter (2000), Gewöhnliche Differentialgleichungen, S. 9-37. Siehe auch Anlage 5.

Da die graphischen Darstellungen der Hazard Rate-Funktionen an die Zeitstruktur von Zinskurven (Yield Curves) erinnern (vgl. bspw. Abb. 3-2), bezeichnet Li<sup>464</sup> die resultierenden Graphen auch als Credit Curves. Von besonderem Interesse wird im Folgenden die nahe liegende Übertragung ausgewählter Techniken aus dem Zinsrisikomanagement auf das Kreditrisikomanagement sein.<sup>465</sup> Ebenso wie der Einfluss einer Verschiebung, Drehung oder Krümmungsänderung von Yield Curves auf die Bewertung oder Risikomessung von Zinsportfolios untersucht werden kann, lässt sich der Einfluss der Änderung der Lage und Form der Credit Curves auf die Bewertung und Risikomessung von Kreditportfolios und darauf bezogene Derivate sowie Asset-Backed-Securities-Strukturen analysieren. Zunächst sollen jedoch ratingabhängige Credit Curves mit Hilfe von Informationen der Ratingagenturen MOODY'S sowie STANDARD & POOR'S konstruiert werden.

### 322 Konstruktion von Credit Curves mittels Informationen der Ratingagenturen

Ratingagenturen wie MOODY'S und STANDARD & POOR'S veröffentlichen auf regelmäßiger Basis ausgewählte Ergebnisse ihrer statistischen Auswertungen historischer Kreditausfälle. Besondere Aufmerksamkeit erfahren dabei vor allem die ratingabhängigen 1-jährigen Ausfall- und Bonitätsänderungsraten. Ihre Bedeutung erhalten sie durch den in der Kreditrisikomessung vorherrschenden Risikohorizont von einem Jahr. Akzeptanz erhielten sie nicht zuletzt durch ihre explizite Einbeziehung in das Kreditrisikomodell CREDITMETRICS™.<sup>466</sup> Daneben veröffentlichen die Agenturen kumulative Ausfallraten für Zeithorizonte von 1-15 Jahre (STANDARD & POOR'S<sup>467</sup>) bzw. 1-20 Jahre (MOODY'S<sup>468</sup>). Beide Datenquellen lassen sich unter Berücksichtigung von bestimmten, im Folgenden genauer darzustellenden, Annahmen heranziehen, um Credit Curves zu konstruieren.

Zeitraum	1	2	3	4	5
Rating „BB“	1,47 %	4,49 %	8,18 %	11,69 %	14,77 %

**Tab. 3-1: Historische Ø kumulative Ausfallraten nach STANDARD & POOR'S (Auszug)**

Tab. 3-1 zeigt auszugsweise<sup>469</sup> die kumulativen Ausfallraten für „BB“ geratete Kredite nach STANDARD & POOR'S. Werden die Ausfallraten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert, lassen sich die bedingten 1-jährigen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t+\Delta t|t}$  ermitteln:

$$p_{i,t+\Delta t} = p_{i,t} + \bar{p}_{i,t} \cdot p_{i,t+\Delta t|t} \quad (3.10)$$

<sup>464</sup> Vgl. D. Li (2000), On default correlation, S. 46.

<sup>465</sup> Weitere Vorteile von Credit Curves finden sich in D. Li (2000), On default correlation, S. 46.

<sup>466</sup> Vgl. JPMorgan (1997), CM™ Technical Document. Für eine konzeptionelle Einführung siehe H. Schulte-Mattler und T. Stausberg (1998), Kreditrisikoquantifizierung mit Übergangsmatrizen, S. 633-638.

<sup>467</sup> Vgl. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 7 (STANDARD & POOR'S Studie).

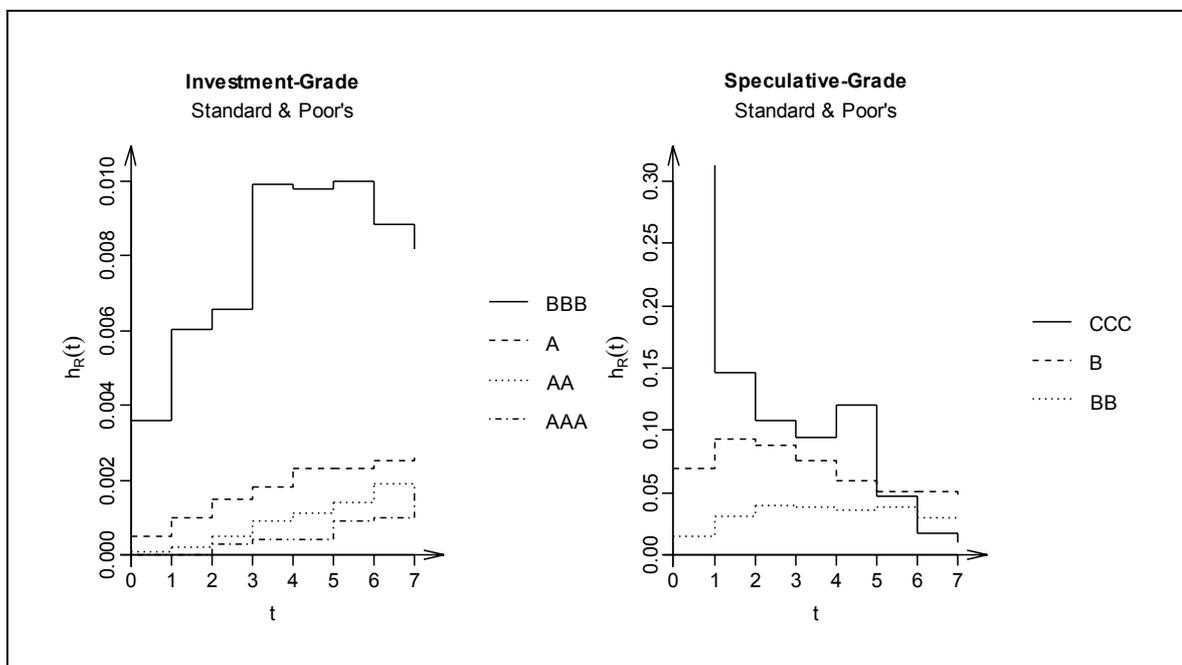
<sup>468</sup> Vgl. D. Hamilton et al. (2003), Default & recovery rates, S. 38 (MOODY'S Studie).

<sup>469</sup> Umfangreichere Datentabellen enthält Anlage 16.

Gleichung (3.10) sagt aus, dass sich die Ausfallwahrscheinlichkeit für das Zeitfenster  $[0, t+\Delta t]$  als Summe der Ausfallwahrscheinlichkeit für das Zeitfenster  $[0, t]$  und der Überlebenswahrscheinlichkeit für das Zeitfenster  $[0, t]$  mit anschließendem Ausfall im Zeitabschnitt  $\Delta t$  ergibt.<sup>470</sup> Mit dem Startwert  $p_{i,1} = p_{i,1|0} = 1,47\%$  lassen sich sukzessiv die weiteren Werte  $3,07\%$ ,  $3,86\%$ ,  $3,82\%$  und  $3,49\%$  für  $p_{i,t+\Delta t|t}$  mit  $t=2,3,4$  und  $5$  ermitteln. Die bedingten 1-jährigen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t+\Delta t|t}$  sind nun in Gleichung (3.9) einzusetzen. Unter der zentralen Annahme einer abschnittsweise konstanten Hazard Rate  $h_{i,[t,t+\Delta t]}$ , lässt sich Gleichung (3.9) wie folgt nach  $h_{i,[t,t+\Delta t]}$  auflösen:

$$h_{i,[t,t+\Delta t]} = -\frac{1}{\Delta t} \ln(1 - p_{i,t+\Delta t|t}). \quad (3.11)$$

Dem Beispiel folgend, ergeben sich die Hazard Rates  $0,0148$ ,  $0,0311$ ,  $0,0394$ ,  $0,0390$  und  $0,0355$ . In Abb. 3-2 sind die Credit Curves für den Investmentgrade- und Speculativegrade-Bereich, basierend auf den historischen, durchschnittlichen und kumulativen Ausfallraten nach STANDARD & POOR'S, graphisch abgetragen. Sie werden im Folgenden als Credit Curves vom Typ A bezeichnet. Auffallend ist die Ähnlichkeit zu den diskutierten Spreadverläufen. Die Hazard-Rates für gering bonitätsrisikobehaftete Kredite sind im Zeitablauf leicht steigend, während sie für Kredite unterster Bonität fallen und für Kredite mittlerer Bonität eine Hügelform annehmen:



**Abb. 3-2: Credit Curves vom Typ A**

Credit Curves, basierend auf den historischen, durchschnittlichen, kumulativen Ausfallraten nach STANDARD & POOR'S. Die Hazard Rate wird innerhalb eines Jahres als konstant angenommen.

<sup>470</sup> Vgl. D. Li (2000), On default correlation, S. 47.

Die Berücksichtigung von kreditausfallwahrscheinlichkeitsbeeinflussenden Bonitätsverbesserungen bzw. -verschlechterungen erlaubt eine weitergehende Verfeinerung der Credit Curves und mündet in Credit Curves des Typs B. Ausgangspunkt bildet eine auf ein Jahr bezogene stochastische Ratingmigrationsmatrix, welche die Eintrittswahrscheinlichkeiten  $q_{R_t, R_{t+1}}$  aller möglichen Bonitätszustände nach einem Jahr  $R_{t+1}$  unter der Voraussetzung eines anfänglichen Bonitätszustandes  $R_t$  (Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten) enthält:

$$\mathbf{Q}_{[t, t+1]} = \begin{pmatrix} q_{1,1} & q_{1,2} & \cdots & q_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k-1,1} & q_{k-1,2} & \cdots & q_{k-1,k} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times k}$$

mit :

$$q_{i,j} \geq 0 \quad \forall \quad i, j = 1, \dots, k,$$

$$\sum_j q_{i,j} = 1 \quad \forall \quad i = 1, \dots, k.$$
(3.12)

Die Verteilung des Kreditausfallzeitpunktes eines jeden Kredites im Referenzportfolio wird folglich mittels einer diskreten MARKOV-Kette auf den finiten Zustandsraum  $\Omega = \{1, \dots, k\}$  modelliert (MARKOV-Prozess). Der Bonitätszustand „1“ stellt den bestmöglichen Bonitätszustand dar, während der Bonitätszustand „k“ den Ausfall des Kredites bedeutet. Die ersten  $k-1$  Spalten geben ausgehend von einem Startzustand  $i$  die Übergangswahrscheinlichkeiten in einen Bonitätszustand verschieden von „Default“ wieder. Die  $k$ -te Spalte enthält die Ausfallwahrscheinlichkeiten. Da die Übergangsmatrix vollständig ist, d. h. alle denkbaren Bonitätszustände enthält, summieren sich die einzelnen Zeilen stets zu eins.<sup>471</sup>

$\mathbf{Q}_{[t, t+1]}$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	0,9305	0,0629	0,0046	0,0015	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
AA	0,0059	0,9102	0,0757	0,0061	0,0006	0,0011	0,0002	0,0001
AA	0,0005	0,0210	0,9149	0,0561	0,0047	0,0019	0,0004	0,0005
BBB	0,0003	0,0022	0,0438	0,8913	0,0463	0,0094	0,0027	0,0039
BB	0,0003	0,0009	0,0043	0,0597	0,8301	0,0775	0,0121	0,0150
B	0,0000	0,0008	0,0029	0,0040	0,0526	0,8225	0,0485	0,0688
CCC	0,0010	0,0000	0,0032	0,0063	0,0157	0,0992	0,5605	0,3142

**Tab. 3-2: Historische Ø 1-Jahres-Migrationsraten nach STANDARD & POOR'S**

Es wird im Weiteren angenommen, dass der MARKOV-Prozess absorbierend und zeithomogen ist. Absorbierend bedeutet, dass mindestens ein Zustand endgültig ist. Die Kreditri-

<sup>471</sup> Jede Zeile für sich stellt demnach einen stochastischen Vektor dar.

sikomodellierung mit Übergangsmatrizen postuliert diese Eigenschaft regelmäßig für den Zustand „Default.“<sup>472</sup> Ist ein Kredit einmal ausgefallen, kann dieser Zustand nicht wieder geheilt werden:

$$\begin{aligned} q_{k,j} &= 0 \quad \forall \quad j=1,\dots,k-1, \\ q_{k,k} &= 1. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Ein MARKOV-Prozess heißt „zeithomogen“, wenn dessen Übergangsmatrix im Zeitablauf konstant bleibt. Durch Multiplikation einer in obiger Weise definierten Übergangsmatrix mit sich selbst, lassen sich bekanntermaßen Ausfall- und Bonitätsänderungswahrscheinlichkeiten für multiple Zeitfenster ermitteln.<sup>473</sup>

Um auch Übergangswahrscheinlichkeiten für Bruchteile eines Jahres zu ermitteln, wird vorgeschlagen, aus der diskreten 1-Jahres-Übergangsmatrix, ähnlich der Vorgehensweise von JARROW, LANDO & TURNBULL zur Berechnung der Zeitstruktur von Credit Risk Spreads<sup>474</sup>, eine Generator-Matrix für einen dem zeit-diskreten MARKOV-Prozess äquivalenten zeit-kontinuierlichen MARKOV-Prozess zu berechnen. Der zeit-kontinuierliche MARKOV-Prozess soll zum zeit-diskreten MARKOV-Prozess „äquivalent“ sein, wenn sich mit Hilfe der Generator-Matrix des kontinuierlichen Prozesses die Übergangsmatrizen des diskreten Prozesses für beliebige diskrete Zeitpunkte abbilden lassen. Die Generator-Matrix stellt das den MARKOV-Prozess definierende Pendant zur Übergangsmatrix für einen infinitesimal kleinen Zeitraum dar:<sup>475</sup>

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \dots & \lambda_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{k-1,1} & \lambda_{k-1,2} & \dots & \lambda_{k-1,k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{k \times k}$$

mit :

$$\begin{aligned} \lambda_{i,j} &\geq 0 & \forall \quad i, j = 1, \dots, k, i \neq j, \\ \lambda_{i=j} &= - \sum_{j, j \neq i} \lambda_{i,j} & \forall \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

<sup>472</sup> Vgl. stellvertretend R. Jarrow, D. Lando und S. Turnbull (1997), Credit risk spreads and Markov models, S. 487 f. Abweichend davon modellieren H. Schulte-Mattler und T. Stausberg (1998), Kreditrisikoquantifizierung mit Übergangsmatrizen, S. 635, Tab. 4.

<sup>473</sup> Der Frage, inwieweit stochastische Übergangsmatrizen die MARKOV-Eigenschaft aufweisen, sind A. Bangia et al. (2002), Rating migration and the business cycle, S. 459 f. nachgegangen. Ihre Ergebnisse auf der Basis von Standardtests stützen die Annahme der MARKOV-Eigenschaft.

<sup>474</sup> Vgl. R. Jarrow, D. Lando und S. Turnbull (1997), Credit risk spreads and Markov models, S. 494-497.

<sup>475</sup> Vgl. zur Vorgehensweise auch R. Israel, J. Rosenthal und J. Wei (2001), Finding generators, S. 246-248. Zu Existenzbedingungen siehe ebenda, S. 248 f. u. S. 254-258.

Die Generator-Matrix ist keine stochastische Matrix. Die Elemente addieren sich nicht zu eins. Die Diagonalelemente weisen stets negative Werte auf. Die letzte Zeile enthält lediglich Nullen und drückt den absorbierenden Charakter des Zustands „Default“ aus.<sup>476</sup>

Zum Zwecke der Schätzung der Generator-Matrix wird der Zeitraum von einem Jahr in  $n > 0$  äquidistante Zeitperioden der Länge  $1/n$  unterteilt:

$$t_{(h+1)1/n} - t_{h1/n} = \text{const} \quad \forall \quad h = 0, \dots, n-1. \quad (3.15)$$

Die stochastische Übergangsmatrix für jede dieser Subperioden wird definiert als:

$$\mathbf{Q}_{[t+h1/n, t+(h+1)1/n]} = \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{\Lambda}_{[t, t+1/n]}}{n} \right) \quad \forall \quad h = 0, \dots, n-1. \quad (3.16)$$

Zur Schätzung der Generator-Matrix  $\mathbf{A}$  wird angenommen, dass die Ratingmigrationsmatrizen und somit auch die Generatoren  $\mathbf{A}_{[t, t+1/n]} = \mathbf{A}$  der Subperioden identisch sind (Zeit-homogenität). Die Übergangsmatrix  $\mathbf{Q}_{[t, t+1]}$  für den Zeitraum von einem Jahr lässt sich somit als Matrixprodukt von  $n$  identischen Subübergangsmatrizen  $\mathbf{Q}_{[t+h1/n, t+(h+1)1/n]} = \mathbf{Q}_{[t, t+1/n]}$  darstellen:

$$\mathbf{Q}_{[t, t+1]} = \mathbf{Q}_{[t, t+1/n]}^n = \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{\Lambda}}{n} \right)^n. \quad (3.17)$$

Um die Generatormatrix  $\mathbf{A}$  für den zeit-kontinuierlichen MARKOV-Prozess zu erhalten, ist die Länge der Subperioden infinitesimal klein zu gestalten. Unter Verwendung der Definition der Exponentialfunktion für Matrizen<sup>478</sup> ergibt sich:

$$\mathbf{Q}_{[t, t+1]} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Q}_{[t, t+1/n]}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{\Lambda}}{n} \right)^n = \exp(\mathbf{\Lambda}). \quad (3.18)$$

Damit stellt sich das Problem der Kalkulation der Logarithmusfunktion einer Matrix als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. JARROW, LANDO & TURNBULL<sup>479</sup> schlagen eine Approximation unter der Annahme vor, dass Kredite während einer Betrachtungsperiode

<sup>476</sup> Für eine Einführung in zeit-kontinuierliche MARKOV-Prozesse siehe D. Isaacson und R. Madsen (1985), Markov chains, S. 229-248.

<sup>477</sup> Dass die Übergangsmatrix für die Subperiode wieder stochastisch ist, lässt sich folgendermaßen begründen: Die Summe der Zeilenelemente ist sowohl vor als auch nach der Division durch  $n$  gleich null. Die Addition der Einheitsmatrix bewirkt zweierlei. Zum einen addieren sich nun die Zeilenelemente zu eins, zum anderen weisen die Diagonalelemente für sehr große  $n$  keine negativen Werte mehr auf.

<sup>478</sup> Zur Definition der Exponentialfunktion für Matrizen vgl. R. Jarrow, D. Lando und S. Turnbull (1997), Credit risk spreads and Markov models, S. 495, Fn. 10.

<sup>479</sup> Vgl. R. Jarrow, D. Lando und S. Turnbull (1997), Credit risk spreads and Markov models, S. 505.

nur um eine Bonitätsstufe herauf- bzw. herabgestuft werden können. Diese Herangehensweise nimmt jedoch in Kauf, dass – am Beispiel eines Tripel-A gerateten Kredites argumentiert – ein Ausfall frühestens nach 7 Betrachtungsperioden stattfinden kann. Zur Vermeidung derartiger Vereinfachungen soll hier die TAYLOR-Entwicklung der Logarithmusfunktion zur Kalkulation herangezogen werden:<sup>480</sup>

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \log(\mathbf{Q}_{[t,t+1]}) = \log(\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{[t,t+1]})) \\
 &= \frac{[-(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{[t,t+1]})]^1}{1} - \frac{[-(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{[t,t+1]})]^2}{2} + \frac{[-(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{[t,t+1]})]^3}{3} - \dots \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_{[t,t+1]})^n}{n}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Tendenziell konvergiert die TAYLOR-Entwicklung der Logarithmusfunktion umso schlechter, je stärker sich die betrachtete Matrix von der Einheitsmatrix unterscheidet.<sup>481</sup> Ratingmigrationsmatrizen stellen jedoch stochastische Matrizen dar, bei denen sich ein Großteil der Wahrscheinlichkeitsmasse auf den Diagonalelementen befindet. Die Wahrscheinlichkeit einer Bonitätsveränderung um mehr als eine Stufe ist insbesondere im Investmentgrade-Bereich sehr klein und nimmt mit einer zunehmenden Anzahl von Bonitätsstufen weiter ab. Werden die Elemente der 1-Jahres-Migrationsraten aus Tab. 3-2 als Wahrscheinlichkeiten interpretiert, erhält man bereits nach ca. 100 Elementen der Taylorentwicklung für  $\Lambda$ :

$\mathcal{A}$	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,0722	0,0683	0,0021	0,0013	0,0005	-0,0001	0,0000	0,0000
AA	0,0064	-0,0953	0,0829	0,0042	0,0004	0,0012	0,0002	0,0000
AA	0,0005	0,0229	-0,0914	0,0620	0,0037	0,0016	0,0004	0,0003
BBB	0,0003	0,0019	0,0484	-0,1185	0,0536	0,0083	0,0031	0,0029
BB	0,0003	0,0008	0,0031	0,0693	-0,1911	0,0929	0,0140	0,0106
B	-0,0001	0,0008	0,0030	0,0022	0,0632	-0,2030	0,0708	0,0631
CCC	0,0014	-0,0002	0,0039	0,0078	0,0178	0,1449	-0,5850	0,4095

**Tab. 3-3: Generator-Matrix**<sup>482</sup>

<sup>480</sup> Vgl. L. Dieci (1996), Computing real logarithms of matrices, S. 35-54. Für weitere Algorithmen und Approximationen siehe stellvertretend L. Dieci und A. Papini (2000), Padé approximation of the logarithm of a matrix, S. 913-930; S. Cheng et al. (1999), Approximating the logarithm of a matrix, S. 1-14 (PADÉ-Entwicklungen); C. Kenney und A. Laub (1998), Logarithm and exponential of a matrix, S. 640-663 (SCHUR-FRECHÉT-Methode) sowie die dort angegebene Literatur.

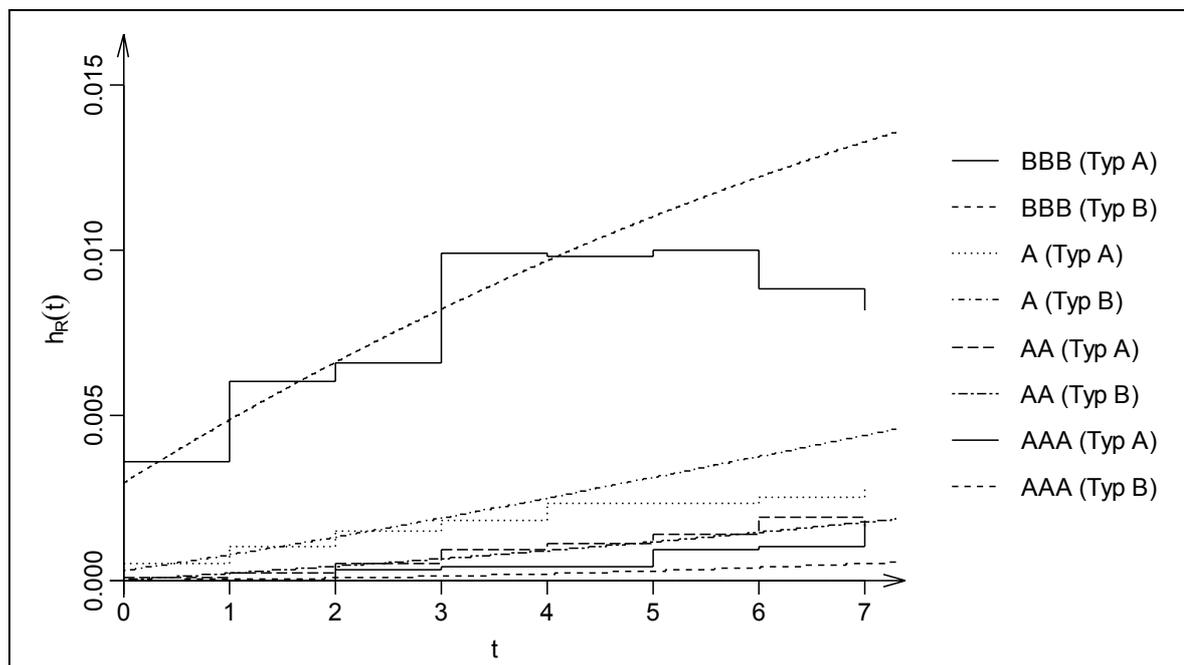
<sup>481</sup> Vgl. S. Cheng et al. (1999), Approximating the logarithm of a matrix, S. 2. Für Lösungsmöglichkeiten siehe die Literaturverweise unter Fußnote 480.

<sup>482</sup> Einzelne Elemente abseits der Hauptdiagonalen mit Werten kleiner als null weisen auf Nicht-Stationarität des MARKOV-Prozesses hin. Vereinfachend werden im Folgenden alle negativen Elemente abseits der Hauptdiagonalen auf null gesetzt. Die Diagonalelemente werden entsprechend (3.14) adjustiert. Eine Neuberechnung der 1-Jahres Übergangsmatrix mit Hilfe des „bereinigten“ Generators hat le-

Bonitätsübergangsmatrizen beliebiger Zeiträume ergeben sich ganz analog zu (3.17) und (3.18) auf Basis der nun bekannten Generator-Matrix mit Hilfe der Exponentialfunktion:<sup>483</sup>

$$\mathbf{Q}_{[t,t+\Delta t]} = \exp(\Delta t \cdot \mathbf{\Lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Delta t \cdot \mathbf{\Lambda})^n}{n!}. \quad (3.20)$$

In einem reinen Default-Mode-Modell wären die Elemente der Spalte „D“ der Generator-Matrix bereits die gesuchten Hazard Rates.<sup>484</sup> Die Credit Curves würden eine flache Zeitstruktur aufweisen. Da jedoch Bonitätsmigrationen zu berücksichtigen sind, müssen die Hazard Rates erneut aus den marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten gewonnen werden. Dazu wird in Analogie zur obigen Vorgehensweise eine konstante Hazard Rate pro Zeitabschnitt unterstellt. Die Zeitabschnittslänge  $\Delta t$  kann diesmal jedoch beliebig klein gewählt werden. Für jeden Zeitpunkt  $t$  bzw.  $t+\Delta t$  können die ratingabhängigen Überlebens- und Ausfallwahrscheinlichkeiten mit Hilfe von (3.20) ermittelt werden und ergeben sich auf der Basis der letzten Spalte von  $\mathbf{Q}_{[0,t]}$  bzw.  $\mathbf{Q}_{[0,t+\Delta t]}$ . Mit (3.10) lassen sich daraus die marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t+\Delta t|t}$  für alle betrachteten Zeitabschnitte  $[t,t+\Delta t]$  errechnen. Gleichung (3.11) liefert die dazugehörigen Hazard Rates  $h_{i,[t,t+\Delta t]}$ .



**Abb. 3-3: Credit Curves vom Typ A und B des Investment-Grades im Vergleich**

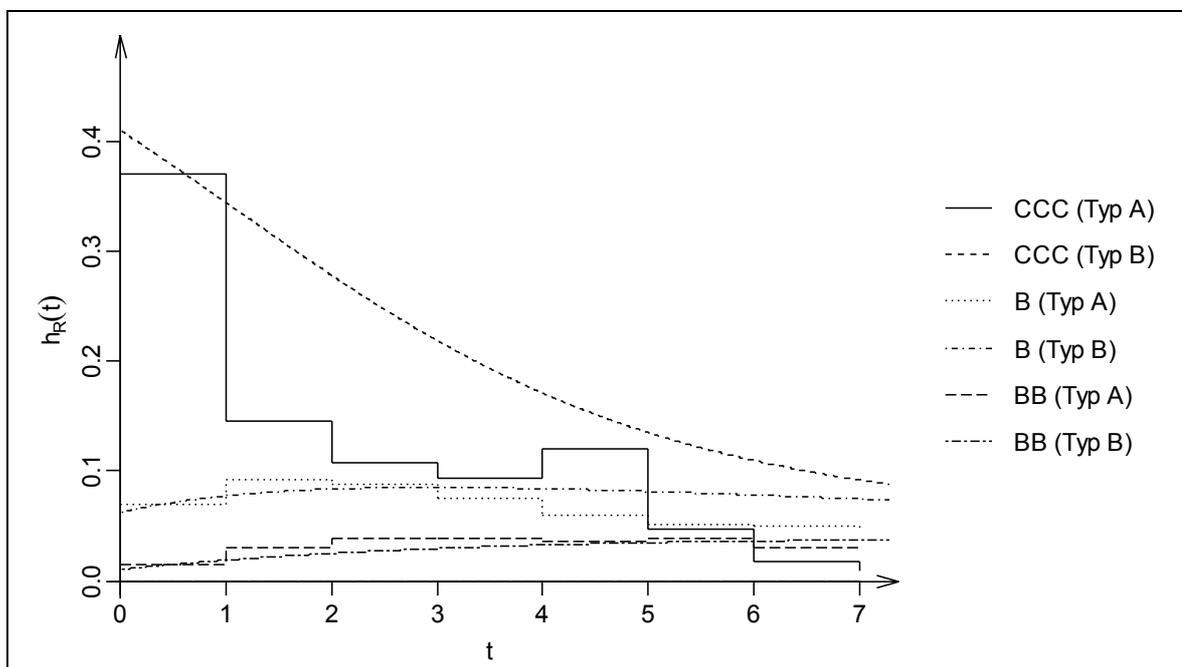
Credit Curves, basierend auf den historischen, durchschnittlichen, kumulativen Ausfallraten (Stufen) sowie den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Linien) nach STANDARD & POOR'S.

diglich Fehler in der vierten Stelle nach dem Komma ergeben. Die adjustierte Generator-Matrix findet sich in Tab. A - 3 der Anlage 17. Eine alternative Lösung des Problems schlagen [A. Kreinin und M. Sidelnikova \(2001\)](#), Regularization algorithms, S. 29-33 vor.

<sup>483</sup> Für die TAYLOR-Entwicklung der Exponentialfunktion siehe [S. Cheng et al. \(1999\)](#), Approximating the logarithm of a matrix, S. 1. Zur numerischen Berechnung reichen i. d. R. wenige hundert Summanden.

<sup>484</sup> Ein reines Default-Mode-Modell stellen [A. Jarrow und S. Turnbull \(1995\)](#), Pricing credit risky derivatives, S. 58 f. u. S. 59-62 vor.

Abb. 3-3 und Abb. 3-4 zeigen die so gewonnenen ratingabhängigen Credit Curves im Vergleich zu denen auf der Basis der kumulativen Ausfallraten. Der verwendete Zeitabschnitt  $\Delta t$  beträgt einen Tag. Diese Credit Curves werden im weiteren Verlauf der Arbeit als Credit Curves vom Typ B bezeichnet. Die graphische Gegenüberstellung zeigt, dass insbesondere für größere Laufzeiten beachtliche Divergenzen auftreten können. Behoben werden könnte dies, indem die Generator-Matrix nicht auf der Basis der 1-Jahres-Übergangsmatrix, sondern, dem Durchschnittsgedanken folgend, auf der Basis einer  $T$ -Jahres-Übergangsmatrix geschätzt werden würde.<sup>485</sup> Unter Umständen ließe sich der Bezugszeitraum der verwendeten Matrix in Einklang mit dem verwendeten Risikohorizont bringen.



**Abb. 3-4: Credit Curves vom Typ A und B des Speculative-Grades im Vergleich**

Credit Curves, basierend auf den historischen, durchschnittlichen, kumulativen Ausfallraten<sup>486</sup> (Stufen) sowie den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Linien) nach STANDARD & POOR'S.

Anhand des Graphen für die Ratingklasse „CCC“ wird weiterhin deutlich, dass in Abhängigkeit der verwendeten Credit Curve die Ergebnisse für die Ausfallwahrscheinlichkeiten „CCC“-gerateter Kredite bereits im mittleren Laufzeitbereich erheblich voneinander abweichen werden. Da die Credit Curve des Typs B regelmäßig oberhalb derjenigen des Typs A verläuft (vgl. Abb. 3-4), werden die Ausfallwahrscheinlichkeiten auf der Basis des Typs B regelmäßig deutlich höher ausfallen (vgl. Tab. 3-4).

<sup>485</sup> Die veröffentlichten  $T$ -Jahres-Übergangsmatrizen der Ratingagenturen (vgl. bspw. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 36-41 (STANDARD & POOR'S Studie)) lassen sich in der Regel nicht durch Multiplikation der 1-Jahres-Übergangsmatrix errechnen. Vgl. zur MARKOV-Eigenschaft von Ratingmigrationsmatrizen auch die Fußnote 473 sowie die dort angegebene Literatur.

<sup>486</sup> Vgl. Anlage 16, Tab. A - 1.

$p_{CCC,t}$	t=1	t=2	t=3	t=4	t=5
Typ A <sup>487</sup>	30,95 %	40,35 %	46,43 %	51,25 %	56,77 %
Typ B	31,41 %	49,72 %	60,75 %	67,66 %	72,22 %
Typ C <sup>488</sup>	31,41 %	41,42 %	48,99 %	55,66 %	63,87 %

**Tab. 3-4: Ausfallwahrscheinlichkeiten für "CCC" -geratete Kredite bei unterschiedlichen Credit Curves**

Ein höherer Grad an Genauigkeit wird durch die Einbeziehung des gesamten zur Verfügung stehenden Datenmaterials, d. h. die Übergangsmatrizen sämtlicher Zeithorizonte, erreicht. Der MARKOV-Prozess verliert zwar über die Jahre hinweg betrachtet die Eigenschaft der Zeithomogenität, für die einzelnen Zeitabschnitte zwischen zwei benachbarten Übergangsmatrizen kann und muss die Annahme der Zeithomogenität jedoch aufrechterhalten werden. Zunächst sind die *1*-Jahres-Forward-Matrizen<sup>489</sup> zwischen den benachbarten Zeithorizonten zu ermitteln:

$$\mathbf{Q}_{[0,t]} = \mathbf{Q}_{[0,t-1]} \times \mathbf{Q}_{[t-1,t]} \quad \text{für } t = 2, 3, 4, \dots \quad (3.21)$$

Dann kann – Invertierbarkeit der Übergangsmatrizen vorausgesetzt – für jede Teilperiode eine Forward-Übergangsmatrix berechnet werden:

$$\mathbf{Q}_{[t-1,t]} = \bar{\mathbf{Q}}_{[0,t-1]} \times \mathbf{Q}_{[0,t]}. \quad (3.22)$$

Unterteilt man die Teilperioden in Analogie zu (3.15) in kleine, äquidistante Zeitabschnitte, lässt sich unter der Annahme der Zeithomogenität innerhalb der einzelnen Teilperioden gem. (3.16) bis (3.19) für jede dieser Teilperioden eine eigene Generator-Matrix errechnen:

$$\mathbf{\Lambda}_{[t-1,t]} = \log(\mathbf{Q}_{[t-1,t]}). \quad (3.23)$$

Die Übergangsmatrix für einen beliebigen Zeitraum  $[0,t]$  mit  $t > 0$  ermittelt sich, indem für den ganzjährigen Teil  $\lfloor t \rfloor$  dieses Zeitraumes zunächst die *1*-jährigen Forward-Übergangsmatrizen miteinander multipliziert werden und anschließend in Analogie zu (3.20) für den übrigen unterjährigen Teil  $t - \lfloor t \rfloor$  die jeweilige Generator-Matrix Anwendung findet:

$$\mathbf{Q}_{[0,t]} = \begin{cases} \exp(t \cdot \mathbf{\Lambda}_{[0,1]}) & \text{für } 0 < t < 1, \\ \left( \prod_{s=1}^{\lfloor t \rfloor} \mathbf{Q}_{[s-1,s]} \right) \times \exp((t - \lfloor t \rfloor) \cdot \mathbf{\Lambda}_{[\lfloor t \rfloor, \lfloor t \rfloor + 1]}) & \text{für } t \geq 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

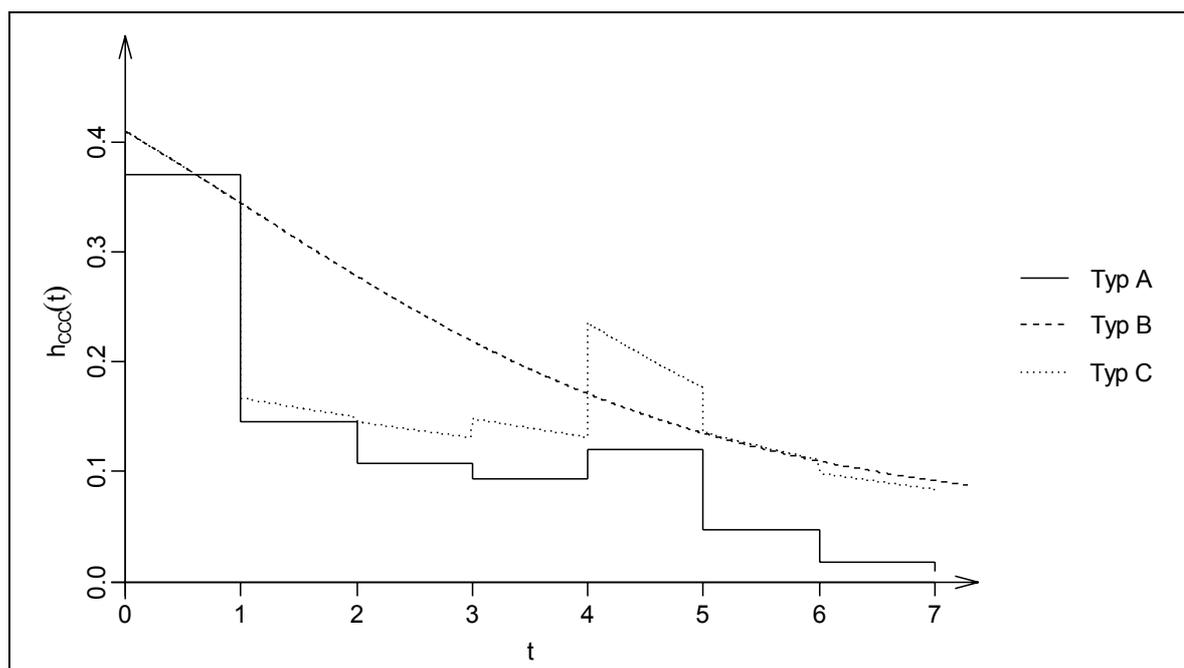
<sup>487</sup> Die Werte entsprechen den historischen, kumulativen Ausfallraten. Vgl. Anlage 16, Tab. A - 1.

<sup>488</sup> Die Werte entsprechen annähernd den Default-Rates aus den historischen T-Jahres-Übergangsmatrizen. Vgl. **B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003)**, Corporate defaults, S. 36 f. (STANDARD & POOR'S Studie). Die marginalen Abweichungen sind auf die verwendete Diskretisierung der Zeitachse zurückzuführen.

<sup>489</sup> Bspw. ist die 3-Jahres-Übergangsmatrix über die 2-Jahres- und eine 2,3-Forward-Matrix darstellbar.

Die Hazard Rates werden erneut aus den marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten gewonnen. Für beliebig kleine Zeitabschnitte  $\Delta t$  sind konstante Hazard Rates zu unterstellen. Für die Zeitpunkte  $t$  und  $t+\Delta t$  werden die ratingabhängigen Überlebens- und Ausfallwahrscheinlichkeiten den mit (3.24) ermittelten Übergangsmatrizen  $\mathbf{Q}_{[0,t]}$  bzw.  $\mathbf{Q}_{[0,t+\Delta t]}$  entnommen. Daraus werden gem. (3.10) die marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t+\Delta t|t}$  für alle betrachteten Zeitabschnitte  $[t,t+\Delta t]$  errechnet. Mit (3.11) folgen die dazugehörigen Hazard Rates  $h_{i,[t,t+\Delta t]}$ . Ihre Graphen seien als Credit Curves vom Typ C bezeichnet.

Abb. 3-5 stellt die Credit Curves des Typs A, B und C für „CCC“-gerate Kredite einander gegenüber. Die zugehörigen Ausfallwahrscheinlichkeiten für ausgewählte Analysezeitpunkte sind der Tab. 3-4 zu entnehmen. Theoretisch dürften die Ausfallwahrscheinlichkeiten bei ganzzahligen Laufzeiten für die Credit Curves vom Typ A und C nicht voneinander abweichen. Dass sie es dennoch tun, ist auf die divergierende Datenbasis zurückzuführen, die STANDARD & POOR'S zur Schätzung der kumulativen Ausfallraten und der T-Jahres-Migrationsraten heranzieht.<sup>490</sup>



**Abb. 3-5: Credit Curves vom Typ A, B und C im Vergleich für "CCC"-geratete Kredite**

Credit Curves, basierend auf den historischen, durchschnittlichen, kumulativen Ausfallraten<sup>491</sup> (Typ A), den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Typ B) sowie den historischen, durchschnittlichen T-Jahres-Migrationsraten (Typ C) nach STANDARD & POOR'S für „CCC“-geratete Kredite.

Nach der modellexogenen Modellierung von betrachtungszeitpunktabhängigen, ratingspezifischen Ausfallwahrscheinlichkeiten mit Hilfe von ratingabhängigen Credit Curves sind im Anschluss die zugehörigen Ausfallschranken zu kalibrieren.

<sup>490</sup> Vgl. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 19 (STANDARD & POOR'S Studie).

<sup>491</sup> Vgl. Anlage 16, Tab. A - 1.

### 33 Credit Curves, Ausfallschranken und zeittransformierte Prozesse

Mit der Einführung einer Reorganisationsschranke  $C_A(t)$  mit  $t \leq T$  neben einer Ausfallschranke  $K_A$  für den Verfallszeitpunkt  $T$  entwickelten BLACK & COX<sup>492</sup> erstmalig ein Unternehmenswertmodell, das jederzeitige Kreditausfälle abbildet. Die Ausfallschranke  $K_A$  hängt dabei von dem geschuldeten Kreditbetrag ab, während die Reorganisationsschranke  $C_A(t)$  aus den sog. „Bond Indenture Provisions“ abzuleiten ist. Die Ausfall- bzw. Reorganisationswahrscheinlichkeit  $p_{i,t}$  ergibt sich dabei stets modellendogen.

In dieser Arbeit wird der umgekehrte Weg eingeschlagen. Ausgehend von den modellexogen vorgegebenen, aus den Credit Curves abgeleiteten Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t}$  für jeden Zeithorizont  $[0,t]$  mit  $t \leq T_i$ , wird eine ausfallwahrscheinlichkeitskonsistente Ausfall- und Reorganisationsschranke  $K_{i,t}$  ermittelt.<sup>493</sup> Ausfall- und Reorganisationsschranke fallen im Verfallszeitpunkt  $T_i$  zusammen. Daher werden die beiden Begriffe im Rahmen dieses Modells synonym verwendet. Erreicht der Unternehmenswert  $A_{i,t}$  innerhalb des Zeitabschnittes  $[0,T_i]$  die Ausfallschranke  $K_{i,t}$ , erfolgt der Kreditausfall.

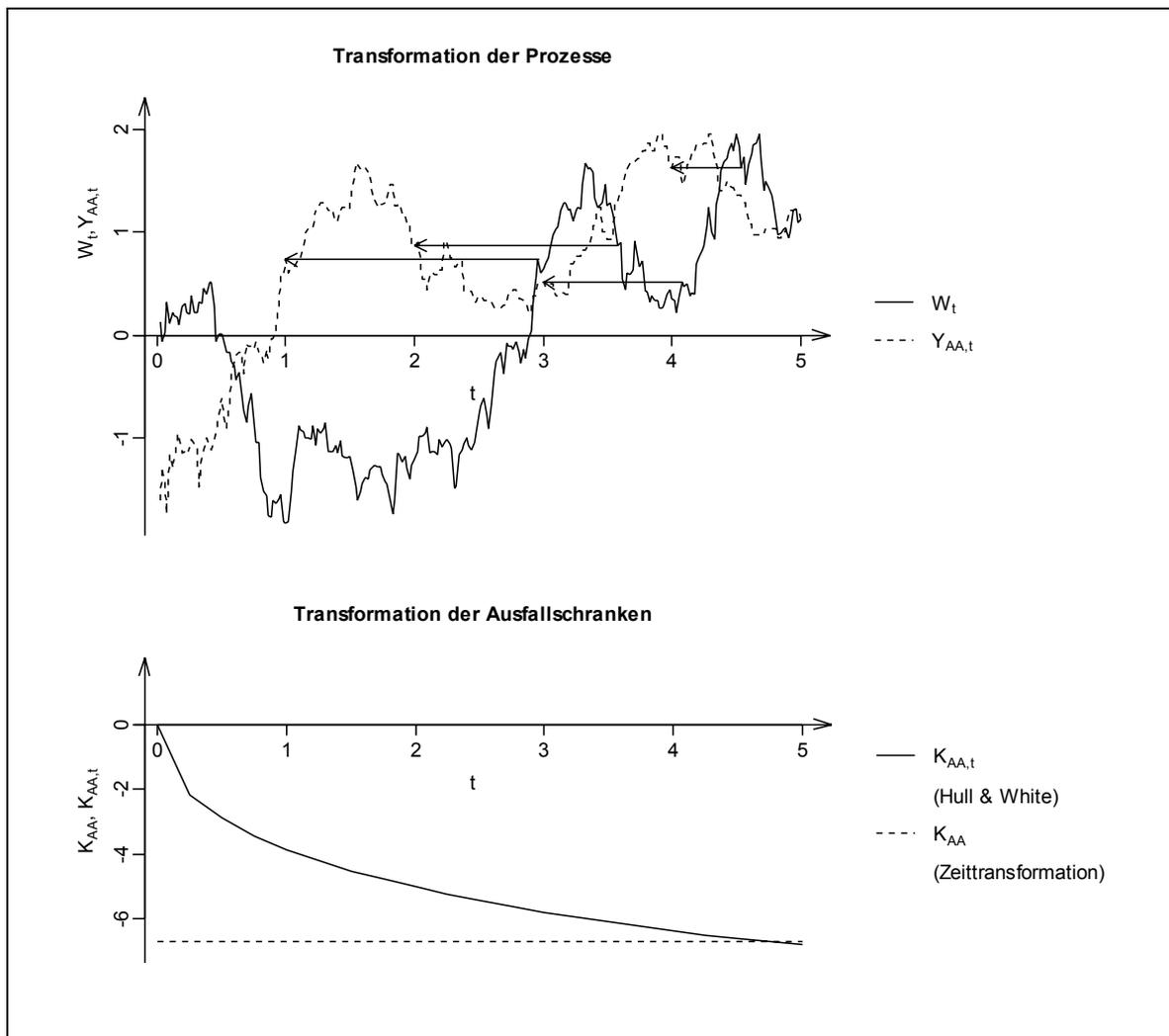
Ein erstes Modell mit ausfallwahrscheinlichkeitskonsistenten Ausfall- und Reorganisationsschranken stammt von HULL & WHITE<sup>494</sup>. Sie modellieren dazu ein diskretes Zeitgitter  $0=t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T_i$ . Der Ausfall tritt ein, wenn der stochastische Prozess der standardisierten, kontinuierlichen Unternehmenswertrenditen  $W_{i,t}$  der Unternehmung  $i$  zu den Zeitpunkten  $t_k$  kleiner oder gleich der zeitpunktspezifischen Ausfallschranke  $K_{i,t_k}$  ist. Zwischen den Zeitpunkten  $t_k$  können die Unternehmenswertrenditen beliebig klein werden. Die Ausfallzeit  $\tau_i$  kann folglich lediglich diskrete Werte annehmen. Das Zeitgitter kann beliebig feinmaschig gewählt werden, jedoch steigt damit der Rechenaufwand erheblich. Soll bspw. eine zeitabhängige, ausfallwahrscheinlichkeitskonsistente Ausfallschranke für den Zeithorizont von einem Jahr mit täglicher Zeitpunkt Betrachtung ermittelt werden, ist die rekursive Auswertung von 365 Integralen mit 1 bis 365 Dimensionen nötig. Das ist rechentechnisch aufwendig und nur mit dem Einsatz numerischer Approximationsverfahren möglich. Die resultierenden Schranken fallen zunächst steil ab, womit im kurzfristigen Bereich von null verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten möglich sind (vgl. Abb. 3-6, unten, durchgezogene Linie). Langfristig können die Schranken wieder ansteigen.<sup>495</sup>

<sup>492</sup> Vgl. hierzu und zum Folgenden F. Black und J. Cox (1976), Bond indenture provisions, S. 352 u. 355.

<sup>493</sup> Notation:  $K_{A,i,t}$  Zeitvariable Ausfallschranke auf der Basis der Vermögenswerte  
 $K_{r,i,t}$  Zeitvariable Ausfallschranke auf der Basis der Vermögenswertrenditen  
 $K_{i,t}$  Standardisierte zeitvariable Ausfallschranke für den Kredit  $i$   
 $K_{R,t}$  Standardisierte zeitvariable Ausfallschranke für einen Kredit mit dem Rating  $R$

<sup>494</sup> Vgl. Anlage 13 sowie J. Hull und A. White (2001), Valuing credit default swaps II, S. 13 f.

<sup>495</sup> Vgl. J. Hull und A. White (2001), Valuing credit default swaps II, S. 15, Exhibit 3.



**Abb. 3-6: Zeittransformierte BROWNsche Bewegung**

Zeittransformierte BROWNsche Bewegung für einen „AA“ gerateten Kredit auf der Basis der historischen, durchschnittlichen, kumulativen Ausfallraten (Credit Curves vom Typ A) nach STANDARD & POOR'S. Die Pfeile markieren die Transformationen für die Zeitpunkte 1, 2, 3 und 4. Der Risikohorizont  $t_H=5$  bleibt von der Transformation unberührt. Die zeitkontinuierliche, zeitabhängige Ausfallsschranke  $K_{AA,t}$  wurde mit Hilfe eines diskreten, vierteljährlichen Zeitgitters auf der Basis des Modellansatzes von HULL & WHITE<sup>496</sup> approximiert.

Eine alternative Lösung schlagen OVERBECK & SCHMIDT<sup>497</sup> vor. Anstatt die Ausfallsschranke zeitabhängig zu kalibrieren, nehmen sie eine Transformation der Zeitachse vor. Vereinfacht gesprochen wird eine geometrische BROWNsche Bewegung in einigen Abschnitten „beschleunigt“ und in anderen Abschnitten „gebremst“. Die Zeittransformation ist äquivalent zu einer zeitabhängigen jedoch vollständig deterministischen Volatilität der BROWNschen Bewegung. Je höher die Volatilität, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit des Durchbrechens der Ausfall- und Reorganisationsschranke. Dadurch sind auch mit diesem Verfahren im kurzfristigen Bereich von null verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten möglich. Der Vorteil liegt dabei in der Verwendung einer zeitkonstanten Ausfallsschranke

<sup>496</sup> Vgl. J. Hull und A. White (2001), Valuing credit default swaps II, S. 13 f.

<sup>497</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 12 f.; L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Abhängigkeitsmodellierung mit transformierten Austrittszeiten, S. 742 f.

$K_{i,t}=K_i$ . Damit lassen sich viele Ergebnisse aus der Erforschung der BROWNSchen Bewegung auf den zeittransformierten Prozess bzw. den Ursprungsprozess mit transformierter Zeitachse übertragen. Dieser Modellansatz wird hier aufgegriffen, umgesetzt und weiterentwickelt.

**Definition 3-4 (Zeittransformierte BROWNSche Bewegung):** Sei  $W_t$  eine BROWNSche Bewegung. Sei weiterhin  $g:[0,\infty)\rightarrow [0,\infty)$  eine streng monoton wachsende Funktion mit  $g(0)=0$ , dann ist

$$Y_t = W_{g_t} \quad \text{mit} \quad g_t = g(t) \quad (3.25)$$

eine zeittransformierte BROWNSche Bewegung.

Abb. 3-6 (oben) zeigt die Realisation einer zeittransformierten BROWNSchen Bewegung  $Y_t$  (gestrichelte Linie). Sie stellt ein entlang der Zeitachse verzerrtes Abbild der Ursprungsbewegung  $W_t$  (durchgezogene Linie) dar. Die Pfeile markieren die Transformation für die Zeitpunkte 1, 2, 3 und 4. Beispielsweise entspricht der zeittransformierte Prozess  $Y_t$  im Zeitpunkt  $t=1$  dem Wert nach dem Ursprungsprozess  $W_t$  im Zeitpunkt  $t=2,95$ . Das heißt  $g(1)=2,95$ . Es ist deutlich zu erkennen, dass der zeittransformierte Prozess – ähnlich einem gemischten Sprung-Diffusionsprozess – bereits frühzeitig sehr geringe Werte annehmen kann. Anhand des vorliegenden Beispiels betrachtet, ist die Ursache – anders als bei einem gemischten Sprung-Diffusionsprozess – nicht ein zufälliger Sprung nach unten, sondern die deterministische, horizontale Verschiebung der niedrigen Werte des Ursprungsprozesses für den Zeitabschnitt  $[0.5,3]$  in den Zeitabschnitt  $[0,0.5]$ . Damit ist die Möglichkeit eines frühen Ausfalls trotz einer konstanten Ausfallschranke nicht ausgeschlossen. Alternativ kann man sich des Ursprungsprozesses in Verbindung mit einer Transformation der Zeitachse bedienen. Wird – das Beispiel fortführend – nach einem Ausfall innerhalb des Zeitabschnittes  $[0,1]$  gefragt, wird tatsächlich der Zeitabschnitt  $[0,2.95]$  betrachtet. Vereinfacht gesprochen erhält die BROWNSche Bewegung (Ursprungsprozess) mehr Zeit, um die Ausfallschranke zu erreichen. Daraus folgen signifikant von null verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten im kurzfristigen Bereich.

Es bleibt zu klären, wie die Zeittransformation bei Vorgabe von zeitraumspezifischen Ziel- ausfallwahrscheinlichkeiten auszusehen hat. Es bleibt ebenfalls zu klären, wie die zeitkonstante Ausfallschranke  $K_i$  zu kalibrieren ist. Die Abb. 3-6 macht bereits deutlich, dass die Zeittransformation ceteris paribus umso stärker ausfallen muss, je weiter die Ausfallschranke von null entfernt liegt. Ursache ist die Zeit, die der BROWNSchen Bewegung „ges-

tattet“ werden muss, um die Ausfallschranke mit einer vorgegeben (Ausfall-)Wahrscheinlichkeit zu erreichen. Ebenfalls deutlich wird, dass zunächst ein Freiheitsgrad in der Wahl der Ausfallschranke vorliegt.<sup>498</sup>

Die Zeittransformationen erfolgen kreditspezifisch. Die Zielausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t}$  mit  $p_i(t)=F_{\tau_{FP,i}}(t)$  für den Zeitabschnitt  $[0,t]$  ergibt sich dabei aus den kreditspezifischen Credit Curves gem. (3.8). Die zeitkonstante Ausfallschranke  $K_i$  ist zunächst frei wählbar. Die Zeittransformation kann dann über die Verteilungsfunktion der First-Passage-Time bestimmt werden:

**Satz 3-1 (Zeittransformation):** Sei  $F_{\tau_{FP,i}}(\cdot)$  eine stetige, auf  $[0,\infty)$  streng monoton wachsende Verteilungsfunktion mit  $F_{\tau_{FP,i}}(0)=0$ . Wenn die Zeittransformation  $g_{i,t}$  durch

$$g_i(t) = \left( \frac{K_i}{F_{SN}^{-1}\left(\frac{1}{2} \cdot F_{\tau_{FP,i}}(t)\right)} \right)^2 \quad (3.26)$$

beschrieben wird, dann gilt:

$$\Pr[\gamma_{FP,i} \leq t] = F_{\tau_{FP,i}}(t), \quad (3.27)$$

wobei:

$$\gamma_{FP,i} = \inf \{t : Y_{i,t} \leq K_i\}. \quad (3.28)$$

Beweis:<sup>499</sup>

Die Verteilungsfunktion der First-Passage-Time der zeittransformierten BROWNSchen Bewegung kann mit Hilfe von (3.25) wie folgt beschrieben werden:

$$\Pr[\gamma_i \leq t] = \Pr\left[\min_{s \leq t} Y_{i,s} \leq K_i\right] = \Pr\left[\min_{s \leq t} W_{g_{i,s}} \leq K_i\right] = \Pr\left[\min_{s \leq g_{i,t}} W_s \leq K_i\right]. \quad (3.29)$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass die BROWNSche Bewegung  $W_s$  die konstante Schranke  $K_i$  innerhalb des transformierten Zeitabschnitts  $[0,t]$  erreicht bzw. durchschlägt.<sup>500</sup>

<sup>498</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 14.

<sup>499</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 12 f. Aufgrund der Bedeutung der Beweisführung für das Verständnis des Transformationskonzeptes sei der Beweis hier noch einmal geführt.

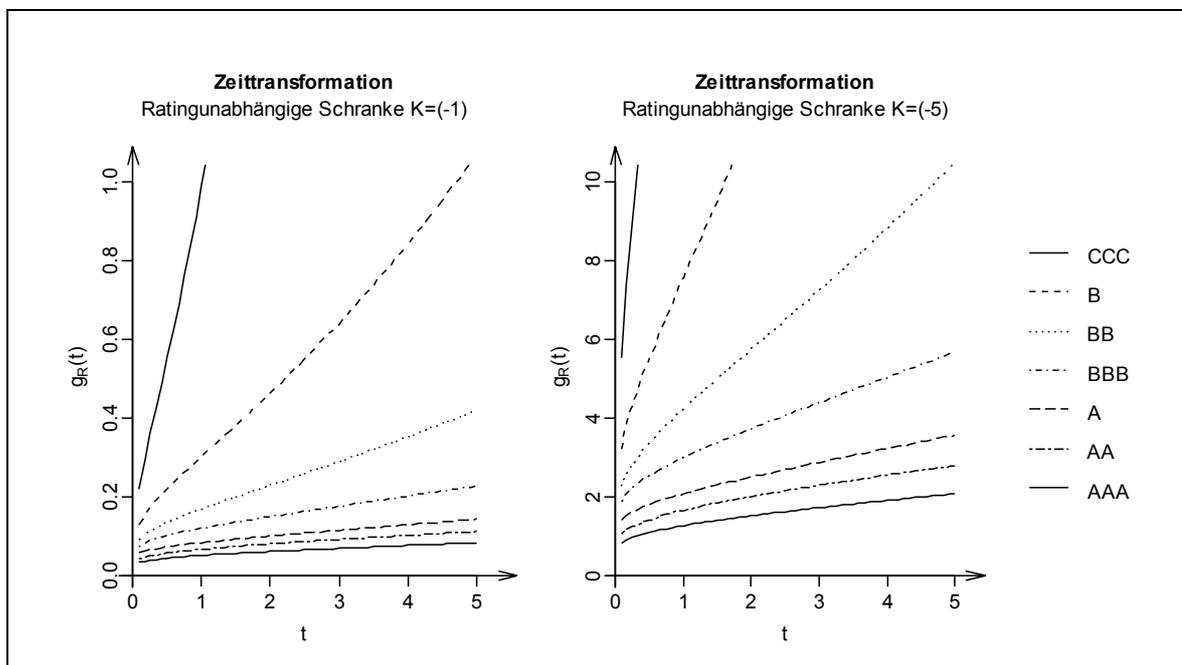
<sup>500</sup> Die Herleitung von (3.30) erfolgt nach dem Reflexionsprinzip. Vgl. I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 79 f. Zu beachten ist, dass KARATZAS & SHREVE eine obere Schranke betrachten.

$$\Pr \left[ \min_{s \leq g_{i,t}} W_s \leq K_i \right] = 2 \cdot F_{SN} \left( \frac{K_i}{\sqrt{g_{i,t}}} \right). \quad (3.30)$$

Das Ergebnis folgt durch Auflösung von (3.30) nach  $g_{i,t}$  wenn man fordert:

$$2 \cdot F_{SN} \left( \frac{K_i}{\sqrt{g_{i,t}}} \right) = F_{\tau_{FP,i}}(t). \quad (3.31)$$

Für eine willkürlich gewählte Schranke  $K_i$  lässt sich für jeden Kredit  $i$  eine Zeittransformation  $g_{i,t}$  anhand exogen vorgegebener Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t}$  ermitteln. Die Durchführung der Transformation kommt ohne numerische oder simulative Verfahren aus.

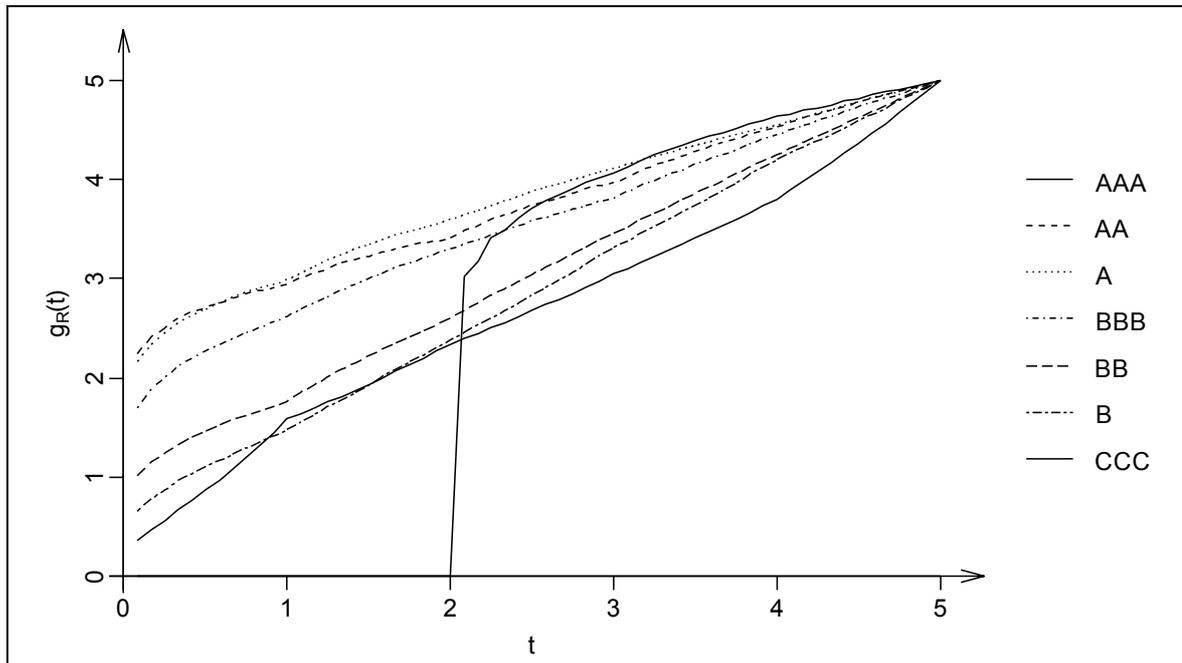


**Abb. 3-7: Zeittransformation mit ratingunabhängigen Ausfallsschranken**

Zeittransformationen auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten nach STANDARD & POOR'S (Credit Curves vom Typ B).

Im weiteren Verlauf der Arbeit erfolgen die Zeittransformationen ratingspezifisch. Einem Rating  $R$  wird mit Hilfe der Credit Curve  $h_R(t)$  eine Zeittransformation  $g_R(t)$  zugeordnet. In Abb. 3-7 sind für zwei willkürlich gewählte Schranken ratingabhängige Zeittransformationen abgetragen. Als Basis dienen dabei die Credit Curves vom Typ B (vgl. Abb. 3-3 u. Abb. 3-4). Liegt – wie im rechten Diagramm – die gewählte Schranke weit entfernt von null, fällt die Transformation entsprechend stark aus. Die BROWNSchen Bewegungen erhalten ausreichend Zeit, um die Schranke zu erreichen. Ein diametrales Bild ergibt sich, wenn – wie im linken Diagramm – die Schranke nahe bei null liegt. Die BROWNSchen Prozesse erhalten relativ wenig Zeit. Mit sinkender Bonität bzw. steigender Ausfallwahrscheinlichkeit nimmt die Stärke der Transformation zu. Der starke Anstieg der Transformation im

kurzfristigen Bereich gibt dem zeittransformierten Prozess  $Y_R(t)$  im Gegensatz zum Ursprungsprozess  $W(t)$  auch hier eine ausreichende Variabilität (vgl. Abb. 3-6).<sup>501</sup>



**Abb. 3-8: Zeittransformation mit ratingabhängigen Ausfallschranken (Typ A)**

Zeittransformationen auf der Basis der historischen, durchschnittlichen, kumulativen Ausfallraten (Credit Curves vom Typ A) nach STANDARD & POOR'S. Die ratingabhängigen Ausfallschranken sind so kalibriert, dass der Risikohorizont  $t_H=5$  von der Transformation  $g_R(t)$  unberührt bleibt.

OVERBECK & SCHMIDT schlagen vor, die Schranke  $K$  genau so zu bestimmen, dass die Zeittransformation  $g_t$  den betrachteten Risikohorizont  $t_H$  verlässt.<sup>502</sup> Beispielsweise könnte der Risikohorizont der Laufzeit des am längsten laufenden Kredits des betrachteten Portfolios entsprechen. Im Folgenden wird ein Risikohorizont von fünf Jahren angenommen.<sup>503</sup> Da  $g_t$  als streng monoton wachsende Funktion definiert wurde (vgl. Definition 3-4), sind dazu in den Beispielen aus Abb. 3-7 die Schranken so zu wählen, dass für den Risikohorizont  $t_H=5$  die Graphen  $g_R(t)$  für  $t=5$  ebenfalls den Wert fünf annehmen. Damit sich alle Graphen in einem Punkt treffen, ist für jede Ratingklasse eine separate Ausfallschranke  $K_R$  notwendig. Formell ist die Gleichung (3.26) für  $t_H=g_R(t_H)$  nach  $K_R$  aufzulösen:

$$K_R = F_{SN}^{-1} \left( \frac{F_{\tau_{FP,R}}(t_H)}{2} \right) \cdot \sqrt{t_H} \quad (3.32)$$

Tab. 3-5 zeigt ratingabhängige Ausfallschranken. Die Kalibrierung erfolgte auf der Basis aller drei Credit-Curve-Typen A, B und C:

<sup>501</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 15.

<sup>502</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 14.

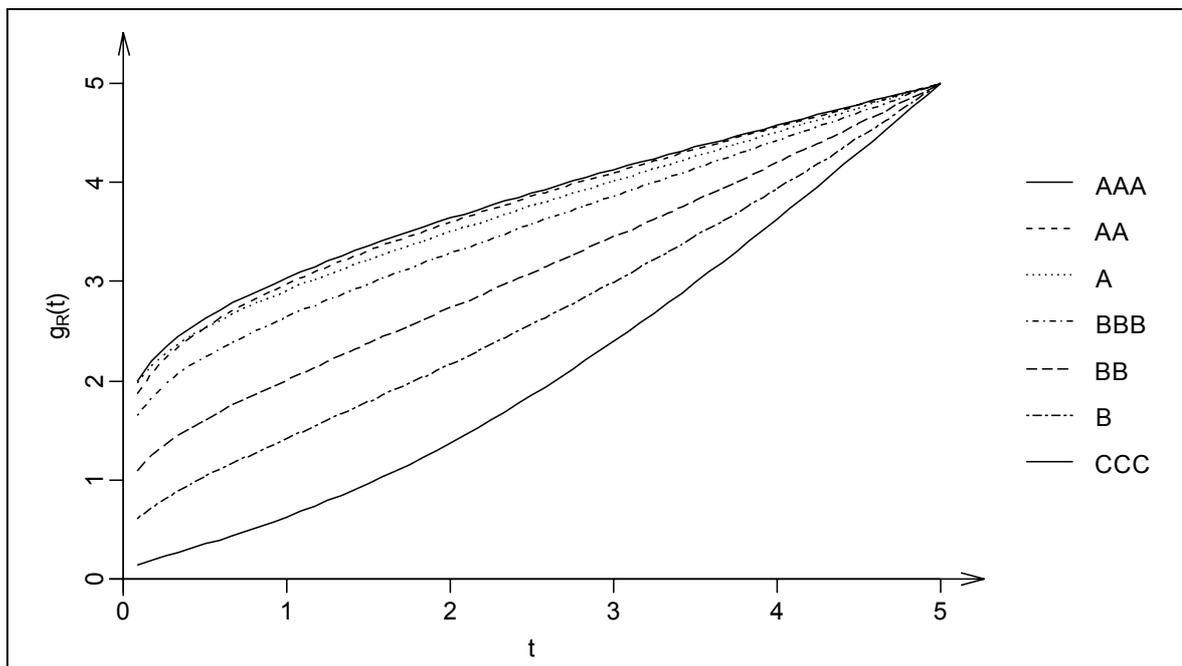
<sup>503</sup> Der Risikohorizont entspricht mit Blick auf das nachfolgende anwendungsbezogene Kapitel der Laufzeit der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion der KfW.

Credit Curves	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Typ A	-7,2956	-6,6836	-6,0198	-4,7067	-3,2372	-2,2242	-1,2778
Typ B	-7,7582	-6,6994	-5,9218	-4,6947	-3,4535	-2,1648	-0,7949
Typ C	-7,0895	-6,4243	-5,9363	-4,7781	-3,2198	-2,0590	-1,0498

**Tab. 3-5: Ratingabhängige Ausfallschranken**

Ratingabhängige Ausfallschranken für zeittransformierte BROWNSche Bewegungen auf der Basis der historischen, durchschnittlichen, kumulativen Ausfallraten (Credit Curves vom Typ A) sowie der historischen, durchschnittlichen T-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B und C) nach STANDARD & POOR'S. Die Kalibrierung erfolgte auf der Basis des Risikohorizonts  $t_H=5$ .

Die Graphen der Zeittransformationen sind in Abb. 3-8 (Credit Curves vom Typ A) sowie in Abb. 3-9 (Credit Curves vom Typ B) eingezeichnet. Auffällig ist zunächst der ungewöhnliche Verlauf der Zeittransformation für Tripel-A geratete Kredite in Abb. 3-8 (durchgezogene Linie). Ursache sind die kumulativen Ausfallraten in Höhe von null für die ersten beiden Jahre.<sup>504</sup> Die Credit Curve verläuft in diesem Zeitabschnitt entlang der Abszisse (vgl. Abb. 3-2). Sämtliche Zeitpunkte zwischen  $t=0$  und  $t=2$  werden folglich durch  $g_{AAA}(t)$  auf die Null transformiert. Infolgedessen kann die BROWNSche Bewegung die Ausfallsschranke auf der transformierten Zeitachse für beliebige Betrachtungshorizonte bis  $t=2$  nicht erreichen.<sup>505</sup>



**Abb. 3-9: Zeittransformation mit ratingabhängigen Ausfallschranken (Typ B)**

Zeittransformationen auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S. Die ratingabhängigen Ausfallschranken sind so kalibriert, dass der Risikohorizont  $t_H=5$  von der Transformation  $g_R(t)$  unberührt bleibt.

<sup>504</sup> Vgl. Anlage 16, Tab. A - 1.

<sup>505</sup> Genau betrachtet, ist die Annahme der streng monoton wachsenden Verteilungsfunktion der First-Passage Time verletzt. Siehe dazu die Voraussetzungen in Satz 3-1. Die Verletzung dieser Voraussetzung führt dazu, dass die Umkehrung von (3.31) nicht eindeutig ist. Um dennoch eine Zeittransformation durchführen zu können, wurde die Hazard-Rate für Tripel-A geratete Kredite für den Zeitabschnitt  $[0,2)$  (willkürlich) auf  $I^{-10}$  gesetzt.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass, anders als in Abb. 3-7, die Stärke der Transformation mit steigender Bonität zunimmt. Der Grund dafür ist in den unterschiedlichen Ausfallschranken zu sehen. Während die Schranke für Tripel-A geratete Kredite mit einem Wert von ca. (-7) weit von null entfernt und somit eine entsprechende Zeittransformation zur Erzeugung von signifikant positiven Ausfallwahrscheinlichkeiten erforderlich ist, liegt die Schranke für „CCC“ geratete Engagements mit einem Wert von ca. (-1) relativ dicht am Wert null. Die Zeittransformation bedarf lediglich moderater Ausmaße.

Ein Beispiel für die Ausprägung eines zeittransformierten Prozesses auf der Basis der zugehörigen ratingabhängigen Ausfallschranke ist in Abb. 3-6 zu sehen. Die durchgezogene Linie (oben) stellt eine Ausprägung eines Standard-WIENER-Prozesses dar. Die gestrichelte Linie (oben) ist der auf der Basis der Credit Curve vom Typ A für „AA“ geratete Kredite transformierte Prozess. Ebenfalls in gestrichelter Form (unten) ist die dazugehörige zeitkonstante Ausfallschranke  $K_{AA}=(-6,6836)$  (vgl. Tab. 3-5) zu sehen. Zum Vergleich wurde in durchgezogener Form (unten) die entsprechende, zum Ursprungsprozess gehörende, zeitvariable Ausfallschranke  $K_{AA,t}$  abgetragen. Sie wurde mit Hilfe eines diskreten, vierteljährlichen Zeitgitters auf der Basis des Modellansatzes von HULL & WHITE<sup>506</sup> approximiert. Die zeitvariable Ausfallschranke fällt von null ausgehend zunächst steil ab und verläuft anschließend relativ flach. Diese Form spiegelt die in der Credit Curve  $h_{AA,t}$  implizierten zeithorizontspezifischen Ausfallwahrscheinlichkeiten wider. Verschiebt man nun die zeitvariable Ausfallschranke  $K_{AA,t}$  in die Richtung der zeitkonstanten Ausfallschranke  $K_{AA}$ , geht damit ceteris paribus eine entsprechende Transformation des Ursprungsprozesses einher. Die deutliche Transformation der Ausfallschranke im kurzfristigen Bereich findet ihr Pendant in der entsprechend deutlich ausgeprägten Prozesstransformation. Im langfristigen Bereich fallen beide Transformationen lediglich moderat aus. Im Risikohorizont  $t_H=5$  treffen sich schließlich sowohl die Prozesse als auch die Ausfallschranken. Begründet ist dies in der Wahl der Ausfallschranke  $K_{AA}$  gem. (3.32). Der Risikohorizont bleibt von der Zeittransformation unberührt. Gleiches gilt für die Ausfallschranken.

Wegen der einfachen mathematischen Handhabbarkeit BROWNScher Bewegungen wird im Weiteren nach wie vor der Ursprungsprozess anstelle des transformierten Prozesses betrachtet, jedoch unter Berücksichtigung der transformierten Zeitachse.<sup>507</sup> Damit liegen für einen einzelnen Kredit drei verschiedene, jedoch völlig äquivalente Sichtweisen vor, die mathematisch stets ineinander überführt werden können:

<sup>506</sup> Vgl. J. Hull und A. White (2001), Valuing credit default swaps II, S. 13 f.

<sup>507</sup> Vgl. auch die einführende Illustration im Anschluss an Definition 3-4.

- (1) BROWNSche Bewegung mit zeitvariabler Ausfallschranke und ursprünglicher Zeitachse bzw. ursprünglichen Zeitabschnitten  $[0, t]$  (durchgezogene Linien in Abb. 3-6),
- (2) Zeittransformierte BROWNSche Bewegung mit zeitkonstanter Ausfallschranke und ursprünglicher Zeitachse bzw. ursprünglichen Zeitabschnitten  $[0, t]$  (gestrichelte Linien in Abb. 3-6),
- (3) BROWNSche Bewegung mit zeitkonstanter Ausfallschranke und transformierter Zeitachse bzw. transformierten Zeitabschnitten  $[0, g_i(t)]$  (vgl. Abb. 3-6, oben: durchgezogene Linie sowie Projektion der Pfeile auf die Abszisse in umgekehrter Richtung, unten: gestrichelte Linie).

Auf Einzelkreditbasis kann jederzeit zwischen diesen drei *Ability-to-Pay*-Konzepten gewechselt werden. Die Sichtweise (1) ist i. S. v. HULL & WHITE und basiert auf *Ability-to-Pay*-Prozessen, die zeitkontinuierliche standardisierte Prozesse stetiger Renditen von Vermögensgegenständen mit zeitvariablen Ausfallschranken repräsentieren. Diese Prozesse werden in der Sichtweise (2) so transformiert, dass die Ausfallschranken im Zeitablauf konstant bleiben. Der *Ability-to-Pay*-Prozess ist ein transformierter Prozess. Durch die Betrachtung des Ursprungsprozesses im Rahmen der Sichtweise (3) können (und werden im Folgenden) analytische Formeln für (bedingte) Passage-Wahrscheinlichkeiten (resp. Ausfallwahrscheinlichkeiten) zeittransformierter Prozesse hergeleitet.

### 34 Berücksichtigung von Ausfallkorrelationen

Nachdem über das Instrument der Credit Curves den einzelnen Krediten in Abhängigkeit ihrer Bonität für jeden beliebigen Zeithorizont Ausfallwahrscheinlichkeiten zuordenbar sind und diese durch BROWNSche Bewegungen auf transformierten Zeitachsen bei zeitkonstanten Ausfallschranken korrekt reflektiert werden, ist zu klären, in welcher Form die Abhängigkeitsstruktur zwischen den Kreditausfällen modelliert wird. Im Rahmen des Ansatzes von HULL & WHITE werden wie beim einfachen Unternehmenswertansatz korrelierte BROWNSche Bewegungen als zentrale Kreditrisikofaktoren modelliert.

Bei zeittransformierten BROWNSchen Bewegungen ist zu hinterfragen, inwieweit Wechselwirkungen zwischen der Zeittransformation und der Korrelation zwischen den zeittransformierten Prozessen bestehen. OVERBECK & SCHMIDT nehmen eine Transformation korrelierter BROWNScher Bewegungen vor.<sup>508</sup> Anhand eines Ein-Faktor-Modells wird hier gezeigt, dass bei dieser Vorgehensweise die Prozesskorrelation von der Zeittransformation

---

<sup>508</sup> Vgl. die Beschreibung zur Implementation ihres Modells in L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 16.

beeinflusst wird. Die Zeittransformation hängt – wie oben demonstriert wurde – von der Wahl der Ausfallschranke ab. Da bei Einzelkrediten ein Freiheitsgrad besteht, ist die Ausfallschranke auf Portfolioebene mit Bedacht zu wählen.<sup>509</sup> Alternativ wird eine Korrelation der zeittransformierten Prozesse skizziert, die unabhängig von der Zeittransformation ist.

### 341 Ein-Faktor-Modell für Unternehmenswertentwicklungen

Die Ausfallkorrelation wird, die obige Sichtweise (1) vor Augen, implizit über die Modellierung einer Korrelation zwischen den ausfallrisikotreibenden Parametern, den Unternehmenswerten  $\{(A_{i,t}, A_{j,t})\}_{1 \leq i, j \leq N}$ , respektive den Unternehmenswertentwicklungen, erzeugt.<sup>510</sup> Wg. (2.62) bis (2.64) ließen sich grundsätzlich die Korrelationen zwischen den Unternehmenswertentwicklungen, respektive den Bonitätsveränderungen der Kredite des Referenzportfolios, bezüglich eines festen Zeitpunktes  $t$  durch die Ziehung eines  $N$ -dimensionalen Zufallsvektors aus einer  $N$ -dimensionalen Normalverteilung mit  $N$ -dimensionaler Varianz-Kovarianz-Matrix  $\Sigma_A$  berücksichtigen. Das hätte den Vorteil, dass sich individuelle, paarweise Korrelationskoeffizienten angeben ließen. Der große Nachteil dieser Vorgehensweise liegt – insbesondere bei großen Portfolios wie dem in dieser Arbeit zu betrachtenden Referenzportfolio – in dem rechentechnischen Aufwand. Bereits bei einem Kreditportfolio mit 1.000 Krediten wären 499.500 Korrelationen zu schätzen.<sup>511</sup> Deshalb wird zur Ermittlung der Portfolioausfälle auf ein Ein-Faktor-Modell zurückgegriffen. Es sei bereits an dieser Stelle hervorgehoben, dass auch in einem Ein-Faktor-Modell mehr als nur eine einzelne, uniforme Unternehmenswertkorrelation möglich ist.

Zunächst wird in (2.69) die Zahl der makroökonomischen Faktoren  $M^* = I$  gesetzt. Dadurch werden die kontinuierlichen Renditen der die Kredite sichernden Vermögensgegenstände  $\ln(A_{i,t}/A_{i,0})$  durch einen gemeinsamen Faktor  $\Psi_t$ , respektive einen Faktorprozess  $B_{M^*,t} = B_{\Psi,t}$ , und  $N$  kreditspezifische Faktoren  $\varepsilon_{i,t}$ , respektive Faktorprozesse  $B_{M^*+i,t} = B_{\varepsilon_i,t}$ , modelliert.<sup>512</sup> Die Betrachtung der kontinuierlichen Renditen führt zur renditeorientierten Ausfallschranke  $K_{r_k,i,t} = \ln(K_{A,i,t}/A_{i,0})$ . Die renditeorientierte Ausfallschranke  $K_{r_k,i,t}$  macht einmal mehr

<sup>509</sup> OVERBECK & SCHMIDT nehmen statt dessen eine Adjustierung mit Hilfe von paarweisen Ausfallkorrelation vor. Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 13 f. Wie jedoch demonstriert wurde, wird die multivariate Verteilung der Ausfallindikatoren nicht vollständig durch die Vorgabe paarweiser Ausfallkorrelationen determiniert. Vgl. Abschnitt 2432.

<sup>510</sup> Vgl. Abschnitt 2433.

<sup>511</sup>  $I/2N(N-1)$  Matrixelemente.

<sup>512</sup> Das Faktormodell im Zeitpunkt  $t$  stellt sich unter Berücksichtigung von (2.74)-(2.78) wie folgt dar:

$$\ln \begin{pmatrix} \mathbf{A}_t \\ \mathbf{A}_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\sqrt{t} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{A,1}^{(1)} \\ \vdots \\ \sigma_{A,N}^{(1)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}} B_{1,t}}_{\Psi_t} + \underbrace{\sqrt{t} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{A,1}^{(2)} \\ \vdots \\ \sigma_{A,N}^{(M)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \begin{pmatrix} B_{2,t} \\ \vdots \\ B_{M,t} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_{A,1} - 0.5 \cdot \sigma_{A,1}^2 \\ \vdots \\ \mu_{A,N} - 0.5 \cdot \sigma_{A,N}^2 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\mu}}.$$

deutlich, dass nicht die absolute Höhe der Unternehmenswerte  $A_{i,t}$  und der Ausfallschranken  $K_{A_{i,t}}$ , sondern ihre Verhältnisse zueinander entscheidend sind.<sup>513</sup>

Daraus resultiert die Möglichkeit, in Analogie zum Modell nach MERTON, mit standardisierten Zufallsvariablen zu arbeiten.<sup>514</sup> Das Faktormodell (2.69) ist demzufolge so aufzustellen, dass die Mischung der gemeinsamen, systematischen BROWNSchen Bewegung  $B_{\psi,t}$  und der idiosynkratischen BROWNSchen Bewegungen  $B_{\varepsilon_i,t}$  die kontinuierlichen Renditen der Vermögensgegenstände bezüglich eines geeignet zu wählenden Zeitpunktes standardisiert. Sinnvoll erscheint dabei der Zeitpunkt  $t=1$ . Während der Erwartungswertvektor dazu durch den Nullvektor zu substituieren ist, sind die unternehmensspezifischen (standardisierten) Faktorsensitivitäten  $a'_{i,1}$  und  $b'_i$  wie folgt zu wählen.<sup>515, 516</sup>

$$\mathbf{a}'' = \sqrt{t} \cdot (\sqrt{\rho_1}, \dots, \sqrt{\rho_N}), \quad (3.33)$$

$$\mathbf{b}'' = \sqrt{t} \cdot (\sqrt{1-\rho_1}, \dots, \sqrt{1-\rho_N}),$$

mit :

$$0 \leq \rho_1, \dots, \rho_N \leq 1. \quad (3.34)$$

Mit der Wahl der Faktorsensitivitäten gem. (3.33) und (3.34) werden in der Konsequenz Standard-WIENER-Prozesse  $W_{i,t}$  betrachtet. Die Zufallsvariablen  $W_{i,t}$  sind normalverteilt mit einem Erwartungswert von null und einer Varianz von  $t$ :

$$W_{i,t} = \sqrt{t\rho_i} \cdot \psi_t + \sqrt{t(1-\rho_i)} \cdot \varepsilon_{i,t} = \sqrt{\rho_i} \cdot B_{\psi,t} + \sqrt{1-\rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,t}, \quad (3.35)$$

$$E\left(\sqrt{\rho_i} \cdot B_{\psi,t} + \sqrt{1-\rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,t}\right) = \sqrt{\rho_i} \cdot E\left(B_{\psi,t}\right) + \sqrt{1-\rho_i} \cdot E\left(B_{\varepsilon_i,t}\right) = 0, \quad (3.36)$$

$$Var\left(\sqrt{\rho_i} \cdot B_{\psi,t} + \sqrt{1-\rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,t}\right) = \rho_i \cdot Var\left(B_{\psi,t}\right) + (1-\rho_i) \cdot Var\left(B_{\varepsilon_i,t}\right) = t. \quad (3.37)$$

Die Standardisierung erstreckt sich auch auf die Ausfallschranke. Sie sei im Folgenden kurz mit  $K_{i,t}$  bezeichnet.

Für die Konformität der betrachteten Modellmutationen ist entscheidend, dass mit Blick auf das Ergebnis (2.67) die Korrelationsmatrix stets unberührt bleibt. Es ist lediglich noch

<sup>513</sup> Vgl. auch die Darstellung der Ausfallwahrscheinlichkeiten im Modell nach MERTON gem. der Gleichung (2.65).

<sup>514</sup> Vgl. auch die Ausführungen zum Modell nach MERTON im Abschnitt 2433 sowie die Gleichungen (2.65) und (2.66).

<sup>515</sup> Zu den Faktorsensitivitäten vgl. die Gleichungen (2.76) und (2.77) bzw. (2.81) und (2.82).

<sup>516</sup> Die Modellierung der Faktorsensitivitäten erlaubt ausschließlich positive Unternehmenswertkorrelationen. Einen leicht veränderten jedoch gleichwertigen Ansatz wählt C. Finger (1999), Conditional approaches, S. 14 f.

zu klären, welche Form die Korrelationsmatrix  $\mathbf{K}_A$  im obigen Ein-Faktor-Modell annimmt. Da die Faktorsensitivitäten gem. (3.33) und (3.34) wegen (2.81) und (2.82) die Volatilitätsparameter  $\sigma_{A,i}^{(m)}$  der Form

$$\sigma_{A,i}^{(1)} = \sqrt{\rho_i} \cdot \sigma_{A,i} \quad \text{und} \quad (3.38)$$

$$\sigma_{A,i}^{(1+i)} = \sqrt{1-\rho_i} \cdot \sigma_{A,i} \quad (3.39)$$

implizieren, folgt mit der Auswertung der Gleichung (2.79) für die Korrelationskoeffizientenmatrix  $\mathbf{K}_A$ :

$$[\mathbf{K}_A]_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{\rho_i \cdot \rho_j} & \text{für } i \neq j, \\ 1 & \text{für } i = j. \end{cases} \quad (3.40)$$

Für ein Kreditportfolio mit 1.000 Titeln sind anstelle der 499.500 Unternehmenswertkorrelationen lediglich noch 1.000 Faktorsensitivitäten, respektive 1.000 Volatilitätsparameter, zu schätzen. Da die Credit Curves und folglich die Ausfallwahrscheinlichkeiten bereits ratingabhängig gestaltet wurden, liegt es nahe, die notwendige Datenmenge dadurch weiter zu verringern, dass auch die Faktorsensitivitäten ratingabhängig formuliert werden. Für zwei Kredite  $i$  und  $j$  derselben Ratingklasse  $R$  gilt somit annahmegemäß  $\rho_i = \rho_j = \rho_R$ . Aus (3.40) folgt, dass für diesen Spezialfall der Parameter  $\rho_R$  als Unternehmenswertkorrelation  $\rho_{A_i A_j}$  interpretiert werden kann.

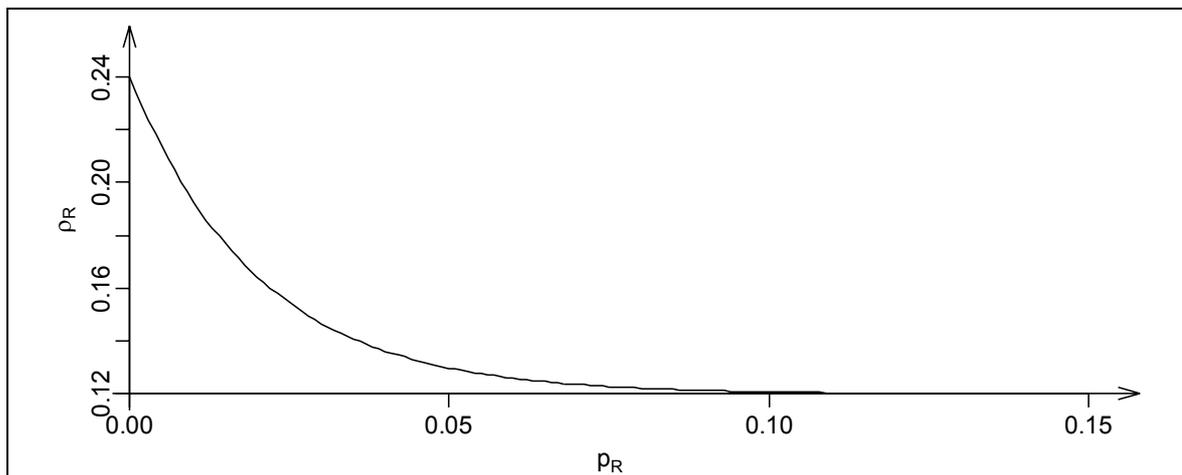
### 342 Modellierung der Unternehmenswertkorrelationen

Dem BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF SICHT folgend, wird die Unternehmenswertkorrelation  $\rho_R$  für Kredite derselben Ratingklasse  $R$  und somit die Faktorsensitivitäten  $\sqrt{\rho_i}$  bzw.  $\rho_i$  in Abhängigkeit der ratingabhängigen 1-jährigen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{R,1}$  modelliert:

$$\rho_R = 0,12 \cdot \frac{1 - \exp(-50 \cdot p_{R,1})}{1 - \exp(-50)} + 0,24 \cdot \left( 1 - \frac{1 - \exp(-50 \cdot p_{R,1})}{1 - \exp(-50)} \right)^{.517} \quad (3.41)$$

Gleichung (3.41) stellt ein exponentielles Mittel dar. Die maximale Korrelation beträgt 24 %. Die minimale Korrelation beträgt 12 %. Generell sinkt die Korrelation mit steigender Ausfallwahrscheinlichkeit. Der Interpolationsfaktor i. H. v. 50 bewirkt dabei eine rasche Annäherung an die untere Grenze von 12 %:

<sup>517</sup> Vgl. BCBS (2004), Basel II, Abs. 272. Das BCBS hat bisher keine ökonomische Begründung für die verwendete Formel (3.41) veröffentlicht. U. U. ist die Begründung politischer Natur, da diese Abhängigkeit zu dem angestrebten Ergebnis flacherer Risikogewichtungsfunktionen führt. Vgl. M. Wilkens, R. Baule und O. Entrop (2004), Kreditrisiko nach Basel II, S. 75.



**Abb. 3-10: Ausfallwahrscheinlichkeitsabhängige Unternehmenswertkorrelationen**

Ausfallwahrscheinlichkeitsabhängige Unternehmenswertkorrelationen für Unternehmenskredite in Anlehnung an das dritte Konsultationspapier des BCBS zur neuen Eigenkapitalvereinbarung.

Ökonomisch wird die abnehmende Unternehmenswertkorrelation damit begründet, dass eine Zunahme der Ausfallwahrscheinlichkeit hauptsächlich auf gestiegene idiosynkratische Risiken zurückgeht. Die Bindung an den systematischen Risikofaktor ist schwächer ausgeprägt.<sup>518</sup> Im Ein-Faktor-Modell wird gem. (3.38)-(3.39) mit sinkendem  $\rho_i$  der idiosynkratische Einfluss verstärkt, während im gleichen Maße der systematische Einfluss sinkt. Auf der Basis der 1-jährigen Ausfallraten nach STANDARD & POOR'S (Tab. 3-1 bzw. Anlage 16) ergeben sich die folgenden Unternehmenswertkorrelationen:

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
$p_{i,1}$	0,00 %	0,01 %	0,05 %	0,36 %	1,47 %	6,72 %	30,95 %
$\rho_i$	24,00 %	23,94 %	23,70%	22,02%	17,75 %	12,42 %	12,00 %

**Tab. 3-6: Ratingabhängige Unternehmenswertkorrelationen**

Ratingabhängige Unternehmenswertkorrelationen für Unternehmenskredite in Anlehnung an das dritte Konsultationspapier des BCBS zur neuen Eigenkapitalvereinbarung. Die Ausfallwahrscheinlichkeiten entsprechen den 1-jährigen Ausfallraten nach STANDARD & POOR'S (Credit Curves vom Typ A).<sup>519</sup>

Für den Spezialfall  $\rho_i = \rho_j = \rho$  für alle  $i, j = 1, \dots, N$  mit  $i \neq j$  ergibt sich gem. (3.40) eine uniforme (ratingübergreifende) Unternehmenswertkorrelation in Höhe von  $\rho$ .<sup>520</sup>

### 343 Prozesskorrelationen im Lichte der Zeittransformation

Entsprechend den obigen Ausführungen können auf Einzelkreditbasis anstelle BROWNScher Bewegungen mit zeitvariablen Ausfallschranken zeittransformierte BROWNSche Bewegungen  $Y_{i,t}$  mit  $Y_{i,t} = W_{i,g_{i,t}}$  gem. (3.25) sowie die dazugehörigen zeitkonstanten Ausfallschranken  $K_i$  betrachtet werden. Sollen korrelierte BROWNSche Bewegungen transformiert

<sup>518</sup> Vgl. J. Lopez (2004), Asset correlation vs. probability of default, S. 266 u. 277-281.

<sup>519</sup> Vgl. Anlage 16, Tab. A - 1.

<sup>520</sup> Das BCBS geht bei der Formulierung der Risikogewichtungsfunktionen zur neuen Eigenkapitalverordnung von einer uniformen Korrelation aus. Vgl. H. Rau-Bredow (2001), Kreditrisikomodellierung im Neuen Basler Accord, S. 1004. Damit modelliert das BCBS praktisch für jede Kreditklasse ein homogenes Portfolio mit uniformer Korrelation.

werden, kann übertragend das obige Ein-Faktor-Modell (3.33) bis (3.34) herangezogen werden. Im Zeitpunkt  $g_i(t)$  ist  $W_{i,g_i,t}$  demnach als Mischung aus dem Faktorprozess  $B_{\psi,g_i,t}$  und der idiosynkratischen Komponente  $B_{\varepsilon_i,g_i,t}$  darzustellen:

$$W_{i,g_i,t} = \sqrt{\rho_i} \cdot B_{\psi,g_i,t} + \sqrt{1-\rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,g_i,t}. \quad (3.42)$$

Für den Risikohorizont  $t_H$  mit den auf diesen Risikohorizont kalibrierten Ausfallsschranken  $K_R$  ist das Faktormodell (3.42) problemlos anwendbar, da für alle Kredite, gleichwohl welches Rating  $R$  sie tragen, die Zeittransformationen wegen (3.32) identisch ausfallen:

$$g_{1,t_H} = g_{2,t_H} = \dots = g_{N,t_H} = t_H. \quad (3.43)$$

Wird dagegen ein Analysezeitpunkt  $t_A$  mit  $t_A < t_H$  betrachtet, ist zu beachten, dass die Zeittransformationen der einzelnen Kredite  $g_i(t_A)$  unterschiedlich ausfallen können. Das gleiche gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt  $t \in (0, t_A]$ . Ausprägungen von  $W_{i,g_i,t}$  beziehen sich dann auf unterschiedliche Stellen der Zeitachse. Dadurch fließen unterschiedliche Zufallszahlen für den systematischen Faktor  $B_{\psi,g_i,t}$  in das Faktormodell (3.42) ein. Mit Blick auf die zeittransformierten Prozesse  $Y_{i,t}$  wäre es vielmehr wünschenswert, Ausprägungen im Zeitpunkt  $t$  mit einem systematischen Faktor in Verbindung zu bringen, der sich ebenfalls auf den Zeitpunkt  $t$  bezieht. Hilfreich zur Konstruktion einer derartigen Modellrepräsentation ist die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit BROWNScher Bewegungen.<sup>521</sup> Danach gilt:

$$\sqrt{\rho_i} \cdot B_{\psi,g_i,t} + \sqrt{1-\rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,g_i,t} =_d \sqrt{\frac{g_{i,t}}{t}} \rho_i \cdot B_{\psi,t} + \sqrt{\frac{g_{i,t}}{t} (1-\rho_i)} \cdot B_{\varepsilon_i,t}. \quad (3.44)$$

Die Verteilungen der  $B_{\psi,g_i,t}$  in den kreditabhängigen Zeitpunkten  $g_{i,t}$  sind identisch mit der Verteilung eines Faktors  $B_{\psi,t}$ , reskaliert mit den kreditabhängigen Zeittransformationen  $g_{i,t}$ . Mit (3.44) erhält man einen Bezug zwischen der Faktorzufallsvariable  $B_{\psi,t}$  im Zeitpunkt  $t$  und den Faktorzufallsvariablen  $B_{\psi,g_{i,t}}$  in den Zeitpunkten  $g_{i,t}$ .

Zur Vereinfachung der Schreibweise kann, dem Faktormodell (2.69) folgend, mit den standardnormalverteilten Zufallsvariablen  $\Psi_t \sim N(0, 1)$  und  $\varepsilon_{i,t} \sim N(0, 1)$  gearbeitet werden:

$$\sqrt{\rho_i} \cdot B_{\psi,g_{i,t}} + \sqrt{1-\rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,g_{i,t}} =_d \sqrt{g_{i,t}} \rho_i \cdot \Psi_t + \sqrt{g_{i,t} (1-\rho_i)} \cdot \varepsilon_{i,t}. \quad (3.45)$$

<sup>521</sup> Die BROWNSche Bewegung besitzt die Eigenschaft der Selbstähnlichkeit, da gilt:

$$\left( \sqrt{T} \cdot B_{1,t}, \dots, \sqrt{T} \cdot B_{m,t} \right) =_d \left( B_{1,T-t}, \dots, B_{m,T-t} \right).$$

Zur Selbstähnlichkeit stochastischer Prozesse siehe T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 36.

<sup>522</sup> Zwei Zufallszahlen  $X$  und  $Y$  sind identisch in der Verteilung, d. h.  $X =_d Y$ , wenn gilt:

$$\Pr[X \leq z] = \Pr[Y \leq z] \quad \forall \quad z.$$

Vgl. P. Embrechts, C. Klüppelberg und T. Mikosch (2003), Modelling extremal events, S. 554.

Im Rahmen der Erzeugung einer Pfadrealisation auf der Basis von  $B_{\psi,t}$ , wirkt die Zeittransformation wie ein skalierender Multiplikator. Eine Veränderung des systematischen Faktors  $B_{\psi,t}$  während eines Zeitschrittes von  $s$  nach  $t$  mit  $s < t$  wird bonitätsabhängig über die Wurzel-Zeit-Formel und die Zeittransformationen „beschleunigt“ bzw. „gebremst“:

$$\begin{aligned}
 B_{\psi,g_{i,t}} - B_{\psi,g_{i,s}} &= {}_d B_{\psi,g_{i,t}-g_{i,s}} \\
 &= {}_d \sqrt{\frac{g_{i,t} - g_{i,s}}{t - s}} \cdot B_{\psi,t-s} \\
 &= {}_d \sqrt{g_{i,t} - g_{i,s}} \cdot B_{\psi,1} \\
 &= \sqrt{g_{i,t} - g_{i,s}} \cdot \psi_t.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Vorsicht ist jedoch bei der Abhängigkeitsstruktur der zeittransformierten Prozesse geboten. Die Selbstähnlichkeit einer multivariaten, korrelierten BROWNSchen Bewegung bezieht sich zwar neben den Erwartungswerten und Varianzen auch auf die Korrelationskoeffizientenmatrix, jedoch bedarf es dabei einer einheitlichen Zeitskalierung.<sup>523</sup> Dagegen wurden hier zur Skalierung bonitätsabhängige Zeittransformationen verwendet:

**Satz 3-2 (Korrelation zeittransformierter Prozesse):** Seien  $W_{i,g_{i,t}}$  und  $W_{j,g_{j,t}}$  durch das Faktormodell (3.42) mit identischen Zeittransformationen  $g_{i,t}=g_{j,t}$  beschrieben, dann ergibt sich die Korrelationskoeffizientenmatrix  $\mathbf{K}_A$  nach wie vor ausschließlich auf der Basis der Faktorsensitivitäten  $\rho_i$  und  $\rho_j$  gem. (3.40). Für den allgemeinen Fall gilt jedoch:

$$\text{Korr}(W_{i,g_{i,t}}, W_{j,g_{j,t}}) = \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot \frac{\min(g_{i,t}, g_{j,t})}{\sqrt{g_{i,t}} \cdot \sqrt{g_{j,t}}}. \tag{3.47}$$

Beweis:

Für identische Zeittransformationen stellt sich die Varianz-Kovarianz-Matrix der Zufallsvariablen  $W_{i,g_{i,t}}$  und  $W_{j,g_{j,t}}$  gem. (2.70) wie folgt dar:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} g_{i,t} \cdot \rho_i + g_{i,t} \cdot (1 - \rho_i) & \sqrt{g_{i,t} \cdot \rho_i} \cdot \sqrt{g_{j,t} \cdot \rho_j} \\ \sqrt{g_{i,t} \cdot \rho_i} \cdot \sqrt{g_{j,t} \cdot \rho_j} & g_{j,t} \cdot \rho_j + g_{j,t} \cdot (1 - \rho_j) \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Damit ergeben sich für die Korrelationskoeffizienten  $[\mathbf{K}_A]_{i \neq j}$ :

$$[\mathbf{K}_A]_{i \neq j} = \frac{\sqrt{g_{i,t} \cdot \rho_i} \cdot \sqrt{g_{j,t} \cdot \rho_j}}{\sqrt{g_{i,t} \cdot \rho_i + g_{i,t} \cdot (1 - \rho_i)} \cdot \sqrt{g_{j,t} \cdot \rho_j + g_{j,t} \cdot (1 - \rho_j)}} = \sqrt{\rho_i \cdot \rho_j}. \tag{3.49}$$

<sup>523</sup> Vgl. T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 36-38.

Da die Zeittransformationen durch Kürzung entfallen, folgt die obige Behauptung.<sup>524</sup> Für unterschiedliche Zeittransformationen kann auf Grund des unterschiedlichen Zeitbezugs nicht auf (2.70) zurückgegriffen werden. Zunächst ist der Erwartungswert des Produkts von  $W_{i,g_{i,t}}$  und  $W_{j,g_{j,t}}$  zu ermitteln. Dazu sei o. B. d. A.  $g_{i,t} < g_{j,t}$  unterstellt:

$$\begin{aligned}
E\left(W_{i,g_{i,t}} \cdot W_{j,g_{j,t}}\right) &= \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E\left(B_{\Psi,g_{i,t}} \cdot B_{\Psi,g_{j,t}}\right) \\
&= \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E\left(B_{\Psi,g_{i,t}} \cdot \left(B_{\Psi,g_{i,t}} + \left(B_{\Psi,g_{j,t}} - B_{\Psi,g_{i,t}}\right)\right)\right) \\
&= \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E\left(B_{\Psi,g_{i,t}}^2 + B_{\Psi,g_{i,t}} \left(B_{\Psi,g_{j,t}} - B_{\Psi,g_{i,t}}\right)\right) \\
&= \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E\left(B_{\Psi,g_{i,t}}^2\right) \\
&= \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot g_{i,t}.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Damit ergibt sich für die Korrelationskoeffizienten  $[K_A]_{i \neq j}$  wie behauptet:

$$\begin{aligned}
\text{Korr}\left(W_{i,g_{i,t}} \cdot W_{j,g_{j,t}}\right) &= \frac{E\left(W_{i,g_{i,t}} \cdot W_{j,g_{j,t}}\right)}{\sqrt{\text{Var}\left(W_{i,g_{i,t}}\right)} \cdot \sqrt{\text{Var}\left(W_{j,g_{j,t}}\right)}} \\
&= \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot \frac{\min\left(g_{i,t}, g_{j,t}\right)}{\sqrt{g_{i,t}} \cdot \sqrt{g_{j,t}}}.
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Für den Spezialfall  $g_{i,t} = g_{j,t}$  folgt aus (3.51) durch Kürzung sofort (3.49).

Wird dagegen zur Modellierung multivariater zeittransformierter Prozesse auf die rechte Seite von (3.44) zurückgegriffen, ergibt sich die Korrelation stets aus den Faktorsensitivitäten  $\rho_i$  und  $\rho_j$ . Auf der Basis der Einzelkreditbetrachtung ändern sich die Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht. Auf Kreditportfolioebene erhält man jedoch ein anderes Modell mit anderen Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\text{Korr}\left(\sqrt{\frac{g_{i,t}}{t}} \rho_i \cdot B_{\Psi,t} + \sqrt{\frac{g_{i,t}}{t}} (1 - \rho_i) \cdot B_{\varepsilon_{i,t}}, \sqrt{\frac{g_{j,t}}{t}} \rho_j \cdot B_{\Psi,t} + \sqrt{\frac{g_{j,t}}{t}} (1 - \rho_j) \cdot B_{\varepsilon_{j,t}}}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\frac{g_{i,t}}{t}} \rho_i \sqrt{\frac{g_{j,t}}{t}} \rho_j \cdot E\left(B_{\Psi,t}^2\right)}{\sqrt{g_{i,t}} \sqrt{g_{j,t}}} = \sqrt{\rho_i \rho_j}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

<sup>524</sup> Das Ergebnis lässt sich alternativ auf der Basis der Selbstähnlichkeit BROWNScher Prozesse ableiten. Mit

$$\sqrt{\rho_i g_{i,t}} / t \cdot B_{\Psi,t} + \sqrt{(1 - \rho_i) g_{i,t}} / t \cdot B_{\varepsilon_{i,t}} = \sqrt{g_{i,t}} / t \cdot \left(\sqrt{\rho_i} \cdot B_{\Psi,t} + \sqrt{1 - \rho_i} \cdot B_{\varepsilon_{i,t}}\right) = \sqrt{g_{i,t}} / t \cdot W_{i,t}$$

folgt sofort die Selbstähnlichkeit von  $W_{i,t}$ , formuliert unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_{i,t}$ :

$$W_{i,g_{i,t}} =_d \sqrt{g_{i,t}} / t \cdot W_{i,t}.$$

Die Selbstähnlichkeit eines Zufallsvektors beinhaltet nicht nur die Erwartungswerte und Varianzen, sondern auch die Korrelationsstruktur. Vgl. T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 36-38.

### 35 Modellierung zeitpunktspezifischer, faktorbedingter Ausfallwahrscheinlichkeiten für Kredite mit heterogenen Ausstattungsmerkmalen

Mit der Formulierung zeitraumspezifischer Ausfallwahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Credit Curves, der Ermittlung ausfallwahrscheinlichkeitskonformer, einfach zu bestimmender, zeitkonstanter Ausfallschranken mit Hilfe der Prozesstransformation sowie der Erfassung von Ausfallkorrelationen durch die Modellierung korrelierter BROWNScher Bewegungen auf der Basis eines Ein-Faktor-Modells, stehen alle Mittel zur Verfügung, um mit Hilfe von Simulationstechniken einzelne, korrelierte zeittransformierte Pfadausprägungen zu generieren. Ziel dieses Abschnitts ist es, die Voraussetzungen dafür zu schaffen, anstelle der Simulation ein semi-analytisch rechenbares Modell zu verwenden.

#### 351 BROWNSche Brücken als Basis der semi-analytischen Modellierung

Die Konstruktion des semi-analytisch rechenbaren Modells basiert auf dem Verzicht der Ermittlung der vollständigen Ausprägungen der BROWNSchen Pfade bzw. der zeittransformierten Prozesse. An die Stelle der Totalbetrachtung des Zeitraumes vom Modellierungszeitpunkt  $t_0$  bis zum (transformierten) Analysezeitpunkt  $t_A$  ( $g_i(t_A)$ ) tritt eine Punktbetrachtung des (transformierten) Analysezeitpunkts  $t_A$  ( $g_i(t_A)$ ). Im Mittelpunkt der Überlegungen stehen die Endpunkte  $\beta_i$  der BROWNSchen Pfade bei vorgegebenem Startpunkt  $\alpha$ . Auf diese Weise bedingte BROWNSche Bewegungen werden als BROWNSche Brücken bezeichnet.<sup>525</sup>

**Definition 3-5 (BROWNSche Brücke):** Die Zufallsvariable  $X_s = X(s)$  folgt einer BROWNSchen Brücke von  $\alpha$  nach  $\beta$  auf  $[t, T]$  mit  $T > t$  wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $X_t = \alpha$ ,
- (2)  $X_s$  ist eine kontinuierliche Funktion von  $s$  und
- (3) die Werte von  $X_s$  sind normalverteilt mit  $E(X_s) = (\alpha(T-s) + \beta(s-t))/(T-t)$ ,  $Var(X_s) = (T-s)(s-t)/(T-t)$  und  $Cov(X_s, X_u) = (T-s)(u-t)/(T-t)$ , wobei stets  $t \leq u < s \leq T$  gilt.

Eine mögliche Repräsentation stellt die folgende Gleichung mit Startzeitpunkt  $t_0$  dar.<sup>526</sup>

$$X_t = \alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right) + \beta \frac{t}{T} + (T-t) \int_0^t \frac{dB_s}{T-s} \quad \text{für } 0 \leq t < T. \quad (3.53)$$

Für ein mögliches Ausfallereignis ist zu klären, ob die BROWNSche Brücke zwischenzeitlich die Ausfallschranke  $K$  erreicht oder durchschlagen hat:

<sup>525</sup> Vgl. S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 175 f.

<sup>526</sup> Vgl. I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 358.

**Satz 3-3 (Passage-Wahrscheinlichkeit einer BROWNSchen Brücke):** Sei  $X_s$  eine BROWNSche Brücke von  $\alpha$  nach  $\beta$  auf  $[t, T]$  mit  $T > t$ . Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $X_s$  eine konstante Schranke  $K$  mit  $K < \alpha, \beta$  innerhalb des Zeitabschnitts  $[t, T]$  erreicht bzw. durchschlägt:

$$\Pr \left[ \min_{s \in [t, T]} X_s \leq K \mid \alpha, \beta > K \right] = \exp \left( \frac{-2 \cdot (\beta - K) \cdot (\alpha - K)}{T - t} \right). \quad (3.54)$$

Beweis:

*J. Cheng (2001, S. V-16).<sup>527</sup>*

Betracht sei ein Kredit  $i$ , der mindestens bis zum Analysezeitpunkt  $t_A > 0$  läuft. Mit Blick auf  $W_{i, g_i, t}$  ist im transformierten Analysezeitpunkt  $g_i(t_A)$  eine Fallunterscheidung notwendig. Liegt der Endpunkt des realisierten Pfades  $\beta_{i, g_i(t_A)}$  unterhalb der Schranke  $K_i$ , liegt ein Kreditausfall mit der Wahrscheinlichkeit von eins vor. Liegt  $\beta_{i, g_i(t_A)}$  jedoch oberhalb der Schranke  $K_i$ , ist zu berücksichtigen, dass der Pfad die Schranke bereits zu einem früheren Zeitpunkt erreicht haben könnte. Die endpunktbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit ist demnach unter Berücksichtigung von (3.54) mit  $\alpha = 0$  und  $K_i < 0$  gegeben durch:

$$p_i(t_A) \mid \beta_{i, g_i(t_A)} = \begin{cases} \exp \left( \frac{2 \cdot (\beta_{i, g_i(t_A)} - K_i) \cdot K_i}{g_i(t_A)} \right) & \text{für } \beta_{i, g_i(t_A)} > K_i, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.55)$$

mit :

$$t_A \in (0, T_i].$$

Eine Verbindung zwischen der BROWNSchen Brücke mit dem Endpunkt  $\beta_{i, g_i(t_A)}$  und dem Ability-to-Pay-Prozess kann dadurch hergestellt werden, dass der Endpunkt  $\beta_{i, g_i(t_A)}$  nicht als deterministischer Parameter, sondern als Zufallsvariable aufgefasst wird:

$$\beta_{i, g_i(t_A)} \sim N(0, g_{i, t_A}) \quad \forall \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.56)$$

Diese Überlegung führt zudem zur unbedingten Ausfallwahrscheinlichkeit (3.4) für  $t_A \in (0, T_i]$ <sup>528</sup> nach der Maßgabe der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit<sup>529</sup>. Danach ist über alle Ausprägungen von  $\beta_{i, g_i(t_A)}$ , gewichtet mit den Werten der Dichtefunktion der

<sup>527</sup> Vgl. J. Cheng (2001), Stochastic processes, S. V-16.

<sup>528</sup> Die Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitpunkt  $t=0$  ist per Definition null. Vgl. Abschnitt 321.

<sup>529</sup> Vgl. übertragend für den diskreten Fall U. Krengel (2003), Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 23. Für den stetigen Fall siehe D. Bertsekas und J. Tsitsiklis (2002), Probability, S. 171 f.

Normalverteilung, zu integrieren. Das Resultat stimmt mit der Passage-Wahrscheinlichkeit einer BROWNSchen Bewegung überein.<sup>530</sup>

$$\begin{aligned}
 p_i(t_A) &= \int_{-\infty}^{K_i} 1 \cdot f_N(u) \cdot du + \int_{K_i}^{\infty} \exp\left(\frac{2 \cdot (u - K_i) \cdot K_i}{g_i(t_A)}\right) \cdot f_N(u) \cdot du \\
 &= 2 \cdot F_{SN}\left(\frac{K_i}{\sqrt{g_i(t_A)}}\right)
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

mit :

$$t_A \in (0, T_i].$$

### 352 BROWNSche Brücken als Faktoren

Während im vorhergehenden Abschnitt der Endpunkt  $\beta_i$  des Ability-to-Pay-Prozesses  $W_{i,g_i,t}$  fixiert wurde, soll hier lediglich der systematische Faktorprozess  $B_{\psi,g_i,t}$  im Faktormodell (3.42) auf einen Endpunkt  $\beta_\psi$  im transformierten Analysezeitpunkt  $g_{i,t_A}$  bedingt werden. Der Endpunkt  $\beta_i$  des Ability-to-Pay-Prozesses in  $g_{i,t_A}$  stellt wegen der idiosynkratischen Komponente  $B_{\varepsilon_i,g_i,t}$  für  $\rho_i \neq 1$  wieder eine Zufallsvariable dar. Damit wird  $W_{i,g_i,t}$  respektive der zeittransformierte Prozess  $Y_{i,t}$  mit  $Y_{i,t} = W_{i,g_i,t}$  mittels einer BROWNSchen Faktorbrücke  $X_{\psi,g_i,t}$  auf  $[0, g_i(t_A)]$  anstelle einer BROWNSchen Faktorbewegung  $B_{\psi,g_i,t}$  modelliert:

$$W_{i,g_i,t} = \sqrt{\rho_i} \cdot X_{\psi,g_i,t} + \sqrt{1 - \rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,g_i,t} \quad \text{für } 0 < t \leq t_A. \tag{3.58}$$

mit :

$$E(B_{\varepsilon_i,g_i,t}) = 0, \text{Var}(B_{\varepsilon_i,g_i,t}) = g_{i,t},$$

$$E(X_{\psi,g_i,t}) = \beta_{\psi,g_{i,t_A}} \cdot \frac{g_{i,t}}{g_{i,t_A}}, \text{Var}(X_{\psi,g_i,t}) = (g_{i,t_A} - g_{i,t}) \cdot \frac{g_{i,t}}{g_{i,t_A}},$$

$$\text{Cov}(B_{\varepsilon_i,g_i,t}, B_{\varepsilon_i,g_i,t}) = 0, \text{Cov}(X_{\psi,g_i,t}, B_{\varepsilon_i,g_i,t}) = 0,$$

$$\text{Cov}(X_{\psi,g_i,t}, X_{\psi,g_i,t}) = (g_{i,t_A} - g_{i,t}) \cdot \frac{g_{i,t}}{g_{i,t_A}}.$$

Entstammen alle Kredite derselben Ratingklasse, ist das Faktormodell (3.58) problemlos anwendbar, da in diesem Fall für alle Kredite die Zeittransformationen identisch ausfallen. Es fließt für alle  $t$  stets derselbe Wert für  $X_{\psi,g_i,t}$  in (3.58) ein. Bei Krediten unterschiedlicher Bonität gilt dies nur für  $t = t_A$  mit  $t_A = t_H$ , da für alle Kredite, gleichwohl welches Rating sie tragen, mit (3.32) immer  $g_{i,t_H} = t_H$  gilt.<sup>531</sup>

<sup>530</sup> Vgl. dazu auch Gleichung (3.30). Die Übereinstimmung lässt sich exemplarisch durch numerisches Integrieren leicht feststellen.

<sup>531</sup> Vgl. Gleichung (3.43) sowie die entsprechenden Ausführungen in Abschnitt 343.

Fraglich ist die Vorgehensweise für  $t_A < t_H$  bei Krediten mit unterschiedlicher Bonität. Soll für eine kreditspezifische Betrachtung der Endpunkt der BROWNSchen Brücke mit dem bonitätsspezifisch transformierten Analysezeitpunkt  $g_{i,t_A}$  übereinstimmen, sind kreditweise Faktorbrücken zu modellieren. Mit Blick auf faktorendpunktbedingte Passage-Wahrscheinlichkeiten für  $W_{i,g_{i,t}}$  stellt sich sofort die Frage nach der Vergleichbarkeit der jeweilig ermittelten Werte. Für  $t_A = t_H$  hingegen stellt sich das Problem nicht, da kredit- bzw. bonitätsübergreifend identische Brückenendpunkte zu Passage-Wahrscheinlichkeiten führen, die nur von der Lage der jeweiligen Ausfallschranke abhängen. Für  $t_A < t_H$  hingegen ist der Wert des Brückenendpunktes zu berücksichtigen. Daher sei vorgeschlagen, auf die Selbstähnlichkeit<sup>532</sup> der BROWNSchen Faktorbewegung in (3.42) zurückzugreifen und eine Skalierung vorzunehmen. Ausgehend von einem spezifischen Wert soll der jeweilige Brückenendpunkt  $\beta_{\psi,g_i(t_A)}$  wie folgt ermittelt werden:

$$\beta_{\psi,g_{i,t_A}} = \sqrt{\frac{g_{i,t_A}}{t_A}} \cdot \beta_{\psi,t_A}. \quad (3.59)$$

Für den bereits betrachteten Spezialfall  $t_A = t_H$  beträgt der Brückenendpunkt wegen  $g_i(t_H) = t_H$  mit (3.59) kredit- bzw. bonitätsübergreifend  $\beta_{\psi,t_H}$ .

Die Prozesse  $Y_{i,t} = W_{i,g_{i,t}}$  bedingt auf (3.59), besitzen für jeden Zeitpunkt  $t \in (0, t_A]$  bzw.  $g_i(t) \in (0, g_i(t_A)]$  einen Erwartungswert und eine Varianz:<sup>533</sup>

$$E(W_{i,g_{i,t}}) | \beta_{\psi,t_A} = \sqrt{\rho_i} \cdot \beta_{\psi,t_A} \cdot \frac{g_{i,t}}{\sqrt{t_A \cdot g_{i,t_A}}}, \quad (3.60)$$

$$\text{Var}(W_{i,g_{i,t}}) | \beta_{\psi,t_A} = g_{i,t} \cdot \left( 1 - \rho_i \cdot \frac{g_{i,t}}{g_{i,t_A}} \right). \quad (3.61)$$

Der Faktorendpunkt beeinflusst lediglich den Erwartungswert, nicht aber die Varianz.<sup>534</sup> Wäre  $g_{i,t} = t$  für alle  $t$ , ließe sich der Erwartungswert als lineare Interpolation zwischen dem Wert null und dem Punkt  $\sqrt{\rho_i} \cdot \beta_{\psi,t_A} = \sqrt{\rho_i} \cdot \beta_{\psi,g_i(t_A)}$  darstellen. Da i. d. R.  $g_{i,t} \neq t$  gilt, führt die Zeittransformation zu einer systematischen Verzerrung des Erwartungswertverlaufes. Für  $\rho_i = 0$  wird der Erwartungswert lediglich von der idiosynkratischen Komponente beeinflusst und beträgt null. Die Varianz entspricht in diesem Fall der Zeittransformation  $g_{i,t}$ .

<sup>532</sup> Vgl. T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 36.

<sup>533</sup> Eine graphische Darstellung des Erwartungswertverlaufes für verschiedene Faktorendpunkte findet sich in Anlage 6. Die Anlage 7 zeigt eine entsprechende Darstellung des Verlaufs der Varianzen, abgetragen auf der originalen Zeitachse  $[0, t_A]$  als auch auf der transformierten Zeitachse  $[0, g_{i,t_A}]$ .

<sup>534</sup> Dasselbe gilt bereits für die BROWNSche Brücke. Vgl. Definition 3-5.

Sollen einzelne Realisationen von  $Y_{i,t}=W_{i,g_{i,t}}$  unter Berücksichtigung der BROWNSchen Faktorbrücke erzeugt werden, ist zunächst der Zeitraum  $[0,t_A]$  in äquidistante Zeitabschnitte der Länge  $\Delta t=t_A/n$  zu unterteilen. Unter Berücksichtigung der Bonität des betrachteten Kredits werden zu den transformierten Zeitpunkten  $g_i(\Delta t \cdot h)$  mit  $h=1, \dots, n$  Ausprägungen von  $W_i(g_{i,\Delta t \cdot h})$  ermittelt. Dazu werden ausgehend von  $W_i(0)=0$  Realisationen der Prozessänderungen  $W_i(g_{i,\Delta t \cdot h})-W_i(g_{i,\Delta t \cdot (h-1)})$  erzeugt:

$$\begin{aligned} \Delta W_i(g_{i,\Delta t \cdot h}) \Big|_{h-1} &= \sqrt{\rho_i} \cdot (X_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot h}} - X_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}}) + \sqrt{1-\rho_i} \cdot (B_{\varepsilon_i, g_{i,\Delta t \cdot h}} - B_{\varepsilon_i, g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}}) \\ &= {}_d \sqrt{\rho_i} \cdot (X_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot h}} - X_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}}) + \sqrt{(g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)})^2 (1-\rho_i)} \cdot Z_{i,h} \quad (3.62) \\ \text{mit : } Z_{i,h} &\sim N(0,1). \end{aligned}$$

Besondere Aufmerksamkeit ist den Änderungen der Faktorbrücke  $\Delta X_{\psi}(g_{i,\Delta t \cdot h})$  zu widmen, da, anders als bei den Realisationen von Änderungen BROWNScher Bewegungen wie die der idiosynkratischen Komponente<sup>535</sup>, diese mit Definition 3-5 nicht unabhängig voneinander sind. Eine Lösung besteht darin, in jedem Zeitpunkt  $g_{i,\Delta t \cdot h}$  eine neue BROWNSche Brücke  $X'_{\psi,s}$  in der Form zu definieren, dass zwar der Endpunkt der Brücke mit  $\beta_{\psi, g_i(\Delta t \cdot n)}$  konstant bleibt, der Startpunkt  $\alpha_{\psi, g_i(\Delta t \cdot (h-1))}$  jedoch stets der letzten Realisation  $X_{\psi}(g_{i,\Delta t \cdot (h-1)})$  entspricht. Varianz und Erwartungswert aus Definition 3-5 sind stets neu zu adjustieren. Mit jeder Realisation verkürzt sich zudem die Laufzeit der Brücke um  $(g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)})$ :

$$\Delta X_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot h}} \Big|_{h-1} = {}_d X'_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \Big|_{h-1} - X_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \quad (3.63)$$

mit :

$$\begin{aligned} E\left(X'_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \Big|_{h-1}\right) &= \frac{X_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \cdot (g_{i,\Delta t \cdot n} - g_{i,\Delta t \cdot h}) + \beta_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot n}} \cdot (g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)})}{g_{i,\Delta t \cdot n} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}}, \\ \text{Var}\left(X'_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \Big|_{h-1}\right) &= \frac{(g_{i,\Delta t \cdot n} - g_{i,\Delta t \cdot h}) \cdot (g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)})}{g_{i,\Delta t \cdot n} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}}. \end{aligned}$$

Damit erhält man als Realisation für  $W_i(g_{i,\Delta t \cdot h})$  im Zeitpunkt  $g_{i,\Delta t \cdot h}$ :

$$\begin{aligned} W_i(g_{i,\Delta t \cdot h}) \Big|_{h-1} &= {}_d W_i(g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}) \\ &\quad + \sqrt{\rho_i} \cdot \left( E\left(X'_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot h}} \Big|_{h-1}\right) + Z_{\psi, h} \cdot \sqrt{\text{Var}\left(X'_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot h}} \Big|_{h-1}\right)} \right) \\ &\quad - \sqrt{\rho_i} \cdot X_{\psi, g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} + \sqrt{(1-\rho_i)} \cdot Z_{i,h} \cdot \sqrt{\Delta g_{i,\Delta t \cdot h}} \quad (3.64) \end{aligned}$$

mit :  $\Delta g_{i,\Delta t \cdot h} = g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}$ ,  $Z_{\psi, h} \sim (0,1)$ ,  $Z_{i,h} \sim (0,1)$ .

<sup>535</sup> Vgl. P. Glasserman (2004), Monte Carlo methods, S. 79-92.

Die Realisationen von  $W_i(g_{i,\Delta t,h})$ , ermittelt auf der Basis von (3.64), ergeben bezüglich der Zeitpunkte  $g_{i,\Delta t,h}$  faktorendpunktbedingte Pfadausprägungen der BROWNSchen Bewegungen.<sup>536</sup> Durch Anwendung der Zeittransformation  $g_{i,\Delta t,h}$  erhält man bezüglich der Zeitpunkte  $\Delta t \cdot h$  Realisationen der entsprechenden faktorendpunktbedingten zeittransformierten Prozesse  $Y_{i,\Delta t,h}$ .

Geht man gedanklich in einem weiteren Schritt davon aus, dass die Realisation des systematischen Risikos gegenüber dem unsystematischen Risiko zeitlich vorgelagert ist, dann erhält man faktorpfadbedingte BROWNSche Bewegungen, respektive deren Transformationen.<sup>537</sup> Für die Prozessvariablen  $Y_{i,t} = W_{i,g_{i,t}}$  diesmal bedingt auf vollständige Faktorpfadausprägungen, lassen sich erneut für jeden Zeitpunkt  $t \in (0, t_A]$  bzw.  $g_i(t) \in (0, g_i(t_A)]$  Erwartungswert und eine Varianz angeben:

$$E\left(W_{i,g_{i,t}}\right) \Big| X_{\psi,g_{i,t}} = \sqrt{\rho_i} \cdot X_{\psi,g_{i,t}}, \quad (3.65)$$

$$\text{Var}\left(W_{i,g_{i,t}}\right) \Big| X_{\psi,g_{i,t}} = g_{i,t} \cdot (1 - \rho_i). \quad (3.66)$$

Zur Erzeugung von Realisationen faktorpfadbedingter Prozesse ist (3.64) lediglich leicht zu modifizieren. Die Änderungen der Faktorprozesse stellen keine Zufallszahlen dar, sondern sind zu jedem (transformierten) Zeitpunkt  $\Delta t \cdot h$  gegeben:<sup>538</sup>

$$\begin{aligned} W_i(g_{i,\Delta t,h}) = & W_i(g_{i,\Delta t,(h-1)}) \\ & + \sqrt{\rho_i} \cdot \left( X_{\psi,g_{i,\Delta t,h}} - X_{\psi,g_{i,\Delta t,(h-1)}} \right) \\ & + \sqrt{1 - \rho_i} \cdot \left( Z_{i,h} \cdot \sqrt{\Delta g_{i,\Delta t,h}} \right). \end{aligned} \quad (3.67)$$

<sup>536</sup> Alternativ lässt sich anstelle von  $[0, t_A]$  der Zeitabschnitt  $[0, g_{i,t_A}]$  in äquidistante Zeitabschnitte einteilen. Pfadrealisationen sind nun in Analogie zu (3.64) wie folgt zu erzeugen:

$$\begin{aligned} W_{i,\Delta t,h} = & W_{i,\Delta t,(h-1)} \\ & + \sqrt{\rho_i} \cdot \left( E\left(X'_{\psi,\Delta t,h} \Big|_{h-1}\right) + Z_{\psi,h} \cdot \sqrt{\text{Var}\left(X'_{\psi,\Delta t,h} \Big|_{h-1}\right)} - X_{\psi,\Delta t,(h-1)} \right) \\ & + \sqrt{1 - \rho_i} \cdot \left( Z_{i,h} \cdot \sqrt{\Delta t} \right) \end{aligned}$$

mit:

$$E\left(X'_{\psi,\Delta t,h} \Big|_{h-1}\right) = \frac{X_{\psi,\Delta t,(h-1)} \cdot \Delta t \cdot (n-h) + \beta_{\psi,\Delta t,h} \cdot \Delta t}{\Delta t \cdot (n-h+1)},$$

$$\text{Var}\left(X'_{\psi,\Delta t,h} \Big|_{h-1}\right) = \frac{\Delta t \cdot (n-h)}{(n-h+1)},$$

$$Z_{\psi,h} \sim N(0,1), Z_{i,h} \sim N(0,1).$$

Beide Vorgehensweisen führen mit Blick auf die im Folgenden interessierenden Passage-Wahrscheinlichkeiten zu identischen Ergebnissen.

<sup>537</sup> Vgl. zur Sichtweise der zeitlichen Verlagerung der Faktorrealisationen H. Rau-Bredow (2001), Kreditrisikomodellierung im Neuen Basler Accord, S. 1004.

<sup>538</sup> Fn. 536 gilt analog.

### 353 Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten im Ein-Faktor-Modell und die Modellierung von Ausfällen langlaufender Kredite

Mit Hilfe des Konzeptes der BROWNSchen Brücke lässt sich für jeden Kredit  $i$  eine faktorendpunktbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit ermitteln. Dazu werden die Endpunkte  $\beta_i$  der Ability-to-Pay-Prozesse  $W_{i,g_i,t}$  in den transformierten Analysezeitpunkten  $g_i(t_A)$  in Abhängigkeit der Endpunkte  $\beta_{\Psi,g_i(t_A)}$  BROWNScher Faktorprozesse  $B_{\Psi,g_i,t}$  modelliert. Die Verknüpfung beider Endpunkte erfolgt durch das Ein-Faktor-Modell (3.33) bis (3.34) respektive (3.42):<sup>539</sup>

$$\beta_{i,g_i,t_A} = \sqrt{\rho_i} \cdot B_{\Psi,g_i,t_A} + \sqrt{1-\rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,g_i,t_A} \quad (3.68)$$

mit :

$$B_{\Psi,g_i,t_A} = \beta_{\Psi,g_i,t_A} = \sqrt{\frac{g_{i,t_A}}{t_A}} \cdot \beta_{\Psi,t_A}.$$

Durch die Fixierung des Endpunktes der BROWNSchen Faktorbewegung wird der Ability-to-Pay-Prozess implizit mit einer BROWNSchen Faktorbrücke modelliert.<sup>540</sup>

Im weiteren Verlauf des Abschnitts soll unabhängig vom Analysezeitpunkt  $t_A$  mit standardisierten Faktoren  $\Psi_{t_A}$  und  $\varepsilon_{i,t_A}$  gearbeitet werden:

$$\psi_{t_A} = \frac{1}{\sqrt{t_A}} \cdot \beta_{\Psi,t_A} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{i,t_A} = \frac{1}{\sqrt{t_A}} \cdot B_{\varepsilon_i,t_A}. \quad (3.69)$$

Daraus folgt für den Endpunkt des Ability-to-Pay-Prozesses:

$$\beta_{i,g_i,t_A} = \sqrt{g_{i,t_A} \rho_i} \cdot \psi_{t_A} + \sqrt{1-\rho_i} \cdot B_{\varepsilon_i,g_i,t_A} = \sqrt{g_{i,t_A} \rho_i} \cdot \psi_{t_A} + \sqrt{g_{i,t_A} (1-\rho_i)} \cdot \varepsilon_{i,t_A}. \quad (3.70)$$

Für einen Kredit  $i$ , der mindestens bis zum Zeitpunkt  $t_A$  läuft (langlaufender Kredit), kann für den Zeitpunkt  $t_A$  eine bedingte, d. h. von der jeweiligen Höhe des systematischen Faktors  $\Psi_{t_A}$  abhängige Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t_A|\Psi}$  angegeben werden.

Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t_A|\Psi}$  stellt eine faktorendpunktbedingte Wahrscheinlichkeit dar. Da es (unendlich) viele BROWNSche Faktorpfadrealisationen gibt, die in einem gegebenen Faktorpfadendpunkt münden, stellt sie zudem eine Synthese faktorpfadbedingter Wahrscheinlichkeiten dar. Dabei ist jede in Frage kommende Faktorpfadrealisation mit einer entsprechenden „Eintrittswahrscheinlichkeit“ zu gewichten.

<sup>539</sup> Das letzte Gleichheitszeichen in (3.68) folgt aus (3.59).

<sup>540</sup> Vgl. Abschnitt 352.

Wird zunächst unter Ausschaltung der Zeittransformation für den systematischen Faktor in  $t_A$  ein sehr hoher Wert angenommen, muss dies durch einen sehr kleinen Wert des unsystematischen Faktors kompensiert werden, um entweder die Ausfallschranke in  $t_A$  zu erreichen oder um eine hohe Passage-Wahrscheinlichkeit für den Zeitraum  $[0, t_A]$  zu generieren. Die Ausfallwahrscheinlichkeit hängt bei gegebenem  $\Psi_{t_A}$  somit ausschließlich von den einzelnen  $\varepsilon_{i, t_A}$  ab. Der systematische Faktor steuert lediglich die Tendenz ihrer Höhe. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kredit bei gegebener Realisation des systematischen Faktors ausfällt, ergibt sich nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit<sup>541</sup> durch Integration über alle möglichen Ausprägungen des unsystematischen Faktors  $\varepsilon_{i, t_A}$ :

**Satz 3-4 (Bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit):** Sei  $X_s$  eine BROWNSche Brücke mit dem Startpunkt  $\alpha=0$  und einem zufälligen Endpunkt  $\beta$  auf  $[0, t]$  mit  $t>0$ . Der Endpunkt  $\beta$  wird dabei durch ein Ein-Faktor-Modell gem. (3.35) beschrieben. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X_s$  bei gegebenem Faktor  $\Psi_t$  eine konstante Schranke  $K$  mit  $K<0$  innerhalb des Zeitabschnitts  $[0, t]$  erreicht bzw. durchschlägt:

$$p(t)|\Psi = F_{SN} \left( \frac{K - \Psi_t \sqrt{t\rho}}{\sqrt{t(1-\rho)}} \right) + \exp \left( -2 \frac{1}{t} K \sqrt{\rho} (K \sqrt{\rho} - \Psi_t \sqrt{t}) \right) \cdot F_{SN} \left( \frac{K - \sqrt{\rho} (2K \sqrt{\rho} - \Psi_t \sqrt{t})}{\sqrt{t(1-\rho)}} \right). \quad (3.71)$$

Beweis:

Zunächst ist  $\beta$  in (3.54)/(3.55) durch das Ein-Faktor-Modell (3.35) zu ersetzen:

$$p(t)|\beta = \exp \left( \frac{2 \left( \left( \sqrt{t\rho} \cdot \Psi_t + \sqrt{t(1-\rho)} \cdot \varepsilon_t \right) - K \right) K}{t} \right) \quad (3.72)$$

$$\text{für: } \left( \sqrt{t\rho} \cdot \Psi_t + \sqrt{t(1-\rho)} \cdot \varepsilon_t \right) > K.$$

Bei gegebenem systematischem Faktor  $\Psi_t$ , ist über alle Ausprägungen des idiosynkratischen Faktors  $\varepsilon_t$  zu integrieren. Für sehr kleine Ausprägungen von  $\varepsilon_t$  ist es möglich, dass das resultierende  $\beta$  jenseits der Ausfallschranke  $K$  liegt, womit die Ausfallwahrscheinlichkeit gem. (3.55) eins wäre. Den kritischen Wert  $\varepsilon_t^*$  erhält man durch Umstellung der Nebenbedingung in Gleichung (3.72) unter Verwendung des Gleichheitszeichens:

<sup>541</sup> Vgl. Fn. 529.

$$\varepsilon_t^* = \frac{K - \psi_t \sqrt{t\rho}}{\sqrt{t(1-\rho)}}. \quad (3.73)$$

Damit erhält man für die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit:

$$p_{t|\Psi} = \int_{-\infty}^{\varepsilon_t^*} 1 \cdot f_N(u) \cdot du + \int_{\varepsilon_t^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{2 \cdot \left(\left(\sqrt{t\rho} \cdot \psi_t + \sqrt{t(1-\rho)} \cdot u\right) - K\right) \cdot K}{t}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \cdot du. \quad (3.74)$$

Wir erhalten den ersten Summanden in (3.71), indem wir das erste Integral in (3.74) mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung wie folgt schreiben:

$$F_{SN}(\varepsilon_t^*). \quad (3.75)$$

Im zweiten Integral lassen sich die beiden Exponentialfunktionen zusammenfassen. Nach quadratischer Ergänzung sind die binomischen Formeln auf den Exponenten anwendbar:

$$\exp\left(-2\frac{1}{t}K\sqrt{\rho}(K\sqrt{\rho} - \psi_t\sqrt{t})\right) \cdot \int_{\varepsilon_t^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{t}K\sqrt{t(1-\rho)} - u\right)^2\right) \cdot du. \quad (3.76)$$

Aus der Substitution

$$l = 2\frac{1}{t}K\sqrt{t(1-\rho)} - u \quad (3.77)$$

mit der neuen oberen Integrationsgrenze

$$-\infty \quad (3.78)$$

und der neuen unteren Integrationsgrenze

$$\frac{\left(K - \sqrt{\rho}(2K\sqrt{\rho} - \psi_t\sqrt{t})\right)}{\sqrt{t(1-\rho)}} \quad (3.79)$$

sowie der Umkehrung der Integrationsgrenzen folgt:

$$\exp\left(-2\frac{1}{t}K\sqrt{\rho}(K\sqrt{\rho} - \psi_t\sqrt{t})\right) \cdot \int_{-\infty}^{\frac{K - \sqrt{\rho}(2K\sqrt{\rho} - \psi_t\sqrt{t})}{\sqrt{t(1-\rho)}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}l^2\right) \cdot dl. \quad (3.80)$$

Da der Integrand in (3.80) die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung darstellt, erhält man schließlich mit Hilfe der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung den zweiten Summanden:

$$\exp\left(-2\frac{1}{t}K\sqrt{\rho}\left(K\sqrt{\rho}-\psi_t\sqrt{t}\right)\right)\cdot F_{SN}\left(\frac{K-\sqrt{\rho}\left(2K\sqrt{\rho}-\psi_t\sqrt{t}\right)}{\sqrt{t(1-\rho)}}\right). \quad (3.81)$$

In einem Analysezeitpunkt  $t_A$  stellt sich somit unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t_A)$  sowie der dazugehörigen Ausfallschranke  $K_i$  die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t_A|\Psi}$  des Kredits  $i$  wie folgt dar:

$$p_i(t_A)|\Psi = F_{SN}\left(\frac{K_i-\psi_{t_A}\sqrt{g_i(t_A)}\cdot\rho_i}{\sqrt{g_i(t_A)}\cdot(1-\rho_i)}\right) + \exp\left(-2\frac{1}{g_i(t_A)}K\sqrt{\rho_i}\left(K_i\sqrt{\rho_i}-\Psi_{t_A}\sqrt{g_i(t_A)}\right)\right) \times F_{SN}\left(\frac{K_i-\sqrt{\rho_i}\left(2K_i\sqrt{\rho_i}-\Psi_{t_A}\sqrt{g_i(t_A)}\right)}{\sqrt{g_i(t_A)}\cdot(1-\rho_i)}\right) \quad (3.82)$$

mit :

$$t_A \in (0, T_i].$$

Die Struktur der Gleichung (3.82) soll durch die Betrachtung eines Spezialfalles näher beleuchtet werden. Setzen wir die Faktorsensitivität  $\rho_i=1$ , bedeutet das zunächst, dass der Ability-to-Pay-Prozess  $W_{i,g_i,t}$  absolut deckungsgleich mit dem Prozess des systematischen Faktors  $B_{\Psi,g_i,t}$  ist. Bei gegebenem Wert für  $\Psi_{t_A}\sqrt{g_{i,t_A}}$  ist mit (3.59) auch der Endpunkt  $\beta_{i,g_i(t_A)}$  festgelegt. Der idiosynkratische Faktor  $\varepsilon_{i,t_A}$  führt zu keiner weiteren Variabilität bei der Höhe des Endpunktes. Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t_A|\Psi}$  wird für diesen Spezialfall durch die einfachere Formel (3.55) berechnet, wobei  $\beta_{i,g_i(t_A)}$  durch den systematischen Faktorendpunkt  $\Psi_{t_A}\sqrt{g_{i,t_A}}$  zu ersetzen ist. Je nachdem, ob der systematische Faktor diesseits oder jenseits der Ausfallschranke  $K_i$  liegt, nimmt die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit entweder (a) die First-Passage-Wahrscheinlichkeit einer einfachen BROWNSchen Brücke oder (b) den Wert eins an.

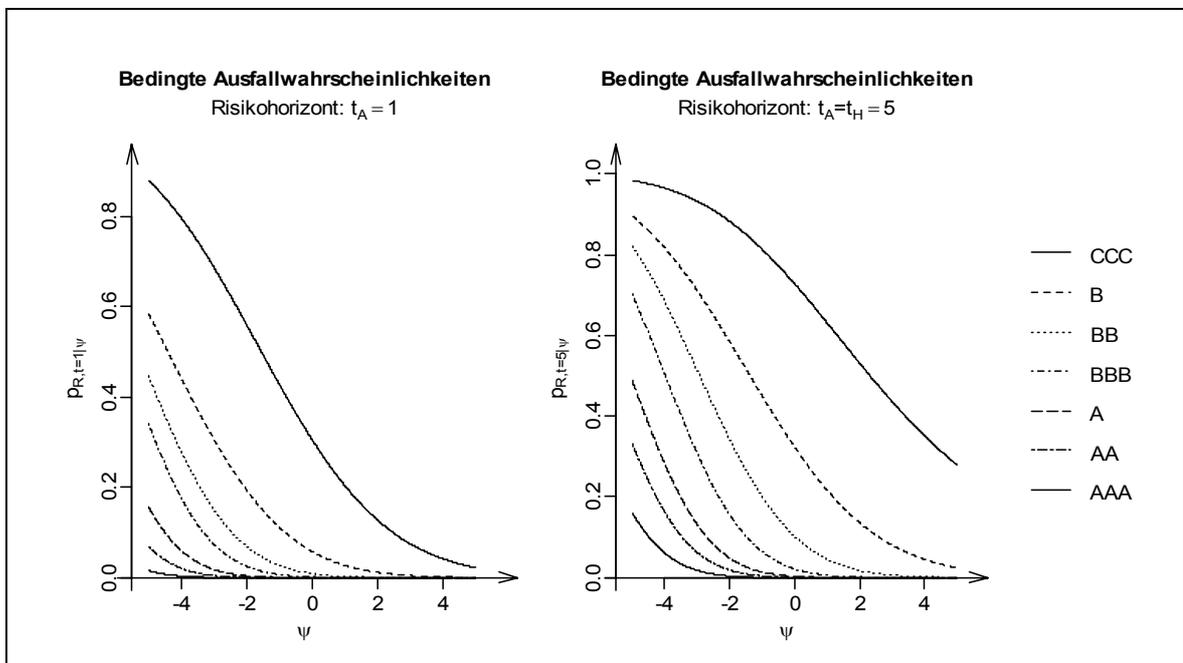
Anhand von (3.82) ist die obige Argumentation durch eine Grenzwertbetrachtung der einzelnen Terme demonstrierbar:

$$\lim_{\rho_i \nearrow 1} F_{SN} \left( \frac{K_i - \psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}} \rho_i}{\sqrt{g_{i,t_A}} (1 - \rho_i)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } K_i > \psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}} \\ 0,5 & \text{für } K_i = \psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}} \\ 0 & \text{für } K_i < \psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}} \end{cases}, \quad (3.83)$$

$$\lim_{\rho_i \nearrow 1} F_{SN} \left( \frac{K_i - \sqrt{\rho_i} (2K_i \sqrt{\rho_i} - \Psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}})}{\sqrt{g_{i,t_A}} (1 - \rho_i)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } K_i < \psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}} \\ 0,5 & \text{für } K_i = \psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}} \\ 0 & \text{für } K_i > \psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}} \end{cases}, \quad (3.84)$$

$$\lim_{\rho_i \nearrow 1} \exp \left( -2 \frac{1}{g_{i,t_A}} K_i \sqrt{\rho_i} (K_i \sqrt{\rho_i} - \Psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}}) \right) = \exp \left( \frac{2 \cdot (\Psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}} - K_i) \cdot K_i}{g_{i,t_A}} \right). \quad (3.85)$$

Liegt der systematische Faktorendpunkt diesseits der Ausfallschranke, d. h.  $K_i < \Psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}}$ , reduziert sich (3.82) auf (3.85). Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit vereinfacht sich zur First-Passage-Wahrscheinlichkeit einer einfachen BROWNSchen Brücke. Liegt der systematische Faktorendpunkt jenseits der Ausfallschranke, d. h.  $K_i > \Psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}}$ , reduziert sich (3.82) auf (3.83), respektive auf eins. Die Verteilungsfunktion (3.84) fungiert somit als „digitaler Schalter“, der die First-Passage-Wahrscheinlichkeit (3.85) in Abhängigkeit von  $\Psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}}$  „ein- und ausschaltet“.<sup>542</sup>



**Abb. 3-11: Ratingspezifische bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten**

Ratingspezifische bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S für die Analysezeitpunkte  $t_A=1$  und  $t_A=t_H=5$ . Der systematische Faktor  $\Psi_{t_A}$  ist auf dem Wertebereich  $[-5,5]$  abgetragen und deckt somit nahezu 100 % seiner Wahrscheinlichkeitsverteilung ab.

<sup>542</sup> Für  $K_i = \Psi_{t_A} \sqrt{g_{i,t_A}}$  nimmt (3.85) den Wert eins an. Mit (3.83) und (3.84) fällt der Kredit definitiv aus.

Im weiteren Verlauf werden die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten ratingspezifisch ermittelt. Abb. 3-11 zeigt die ratingspezifischen bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten für die Analysezeitpunkte von  $t_A=1$  und  $t_A=t_H=5$ . Am Beispiel des 5-jährigen Analysezeitpunkts ist die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit bei einer Höhe des Faktors von  $\Psi_{t_A}=(-5)$  für einen „CCC“-gerateten Kredit 98,35 %. Die verbleibenden 1,65 % stützen sich auf die Möglichkeit, dass der idiosynkratische Faktor mindestens den Wert 1,4674<sup>543</sup> annimmt und somit der Endpunkt der BROWNSchen Bewegung die Ausfallschranke  $K_{CCC}=(-0,7949)$  (vgl. Tab. 3-5) überschreitet und gleichzeitig der Pfad auch in einem früheren Zeitpunkt die Ausfallschranke nicht verletzt hat.<sup>544</sup>

Die unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit (3.4) für  $t_A \in (0, T_i]$ <sup>545</sup> ergibt sich nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit<sup>546</sup> durch Integration über alle Ausprägungen von  $\Psi_{t_A}$ , gewichtet mit den Werten der Dichtefunktion der Normalverteilung und stimmt mit der Passage-Wahrscheinlichkeit einer BROWNSchen Bewegung (vgl. (3.30)) überein:<sup>547</sup>

$$p_i(t_A) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_i(t_A) | u \cdot f_{SN}(u) \cdot du = 2 \cdot F_{SN} \left( \frac{K_i}{\sqrt{g_i(t_A)}} \right) \quad \text{mit } t_A \in (0, T_i] \quad (3.86)$$

Die Integration über den Faktor  $\Psi_{t_A}$  führt zur Eliminierung des Parameters  $\rho_i$ . Zur Ermittlung von einzelnen Ausfallwahrscheinlichkeiten sind das Faktormodell und die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht notwendig. Ihr Zweck wird in der kreditübergreifenden Kontrolle bedingter Ausfallereignisse liegen. Der systematische Faktor beeinflusst und verschiebt je nach Höhe die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Kredite gemeinsam nach oben oder unten. Über alle Ausprägungen des systematischen Faktors hinweg betrachtet, ergibt sich für jeden einzelnen Kredit in Abhängigkeit der Bonität wieder die Credit Curve-konforme Ausfallwahrscheinlichkeit. Aus der Sicht des Portfolios treten jedoch gemeinsame Ausfallereignisse mit positiven Korrelationen auf.

<sup>543</sup> Der Wert 1,4674 ergibt sich gem.

$$\frac{(-0,7949) - \sqrt{5 \cdot 0,12} \cdot (-5)}{\sqrt{5 \cdot (1 - 0,12)}}$$

<sup>544</sup> Der Wert 1,65 % ergibt sich unter Verwendung der BROWNSchen Brücke durch Auswertung des Integrals

$$\int_{1,4674}^{\infty} \left( 1 - \exp \left( 2/5 \cdot \left( \left( \sqrt{5 \cdot 0,12} \cdot (-5) + \sqrt{5 \cdot (1 - 0,12)} \cdot u \right) + 0,7949 \right) \cdot (-0,7948) \right) \right) \cdot f_{SN}(u) \cdot du,$$

wobei  $f_{SN}(\cdot)$  die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung darstellt.

<sup>545</sup> Die Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitpunkt  $t=0$  ist per Definition null. Vgl. Abschnitt 321.

<sup>546</sup> Vgl. Fn. 529.

<sup>547</sup> Die Übereinstimmung lässt sich exemplarisch durch numerisches Integrieren leicht feststellen.

### 354 Bedingte Ausfalldichten im Ein-Faktor-Modell und die Modellierung der zeitlichen Struktur von Kreditausfällen

Vereinfachend, jedoch o. B. d. A., wird zunächst der Risikohorizont  $t_H$  betrachtet. Das heißt, die Zeittransformationen für diesen Zeitpunkt sind gem. (3.43) kreditübergreifend identisch. Voraussetzung ist, dass sämtliche Kredite eine Laufzeit von mindestens  $t_H$  aufweisen. Betrachtet wird eine BROWNSche Brücke auf dem Zeitabschnitt  $[0, t_H]$  mit dem Endpunkt  $\beta_{i, t_H}$ . Der Endpunkt  $\beta_{i, t_H}$  sei zunächst als gegeben betrachtet. Dann kann auf ein Ergebnis von METWALLY & ATIYA<sup>548</sup> zurückgegriffen werden:

**Satz 3-5 (Passage-Dichte einer BROWNSchen Brücke):** Sei  $X_s$  eine BROWNSche Brücke von  $\alpha$  nach  $\beta$  auf  $[t, T]$  mit  $T > t$ . Dann ist die Dichte zur Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X_s$  eine konstante Schranke  $K$  mit  $K < \alpha, \beta$  innerhalb des Zeitabschnitts  $[t, T]$  erreicht bzw. durchschlägt im Zeitpunkt  $s \in (t, T)$ :<sup>549</sup>

$$f_X(s) | \alpha, \beta = \frac{\alpha - K}{2\xi\pi} (s - t)^{-\frac{3}{2}} (T - s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\left(\frac{(\beta - K)^2}{2(T - s)} + \frac{(\alpha - K)^2}{2(s - t)}\right)\right)$$

mit :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T - t)}} \cdot \exp\left(-\frac{(\alpha - \beta)^2}{2(T - t)}\right). \quad (3.87)$$

Beweis:

S. Metwally & A. Atiya (2002, S. 47 f.).

Diskret betrachtet, gibt (3.87) die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die endpunktkonditionierte BROWNSche Bewegung  $X_s$  genau im Zeitpunkt  $s$  die Schranke  $K$  *erstmalig* erreicht bzw. durchschlägt. Es liegt demnach eine bedingte Dichte vor.<sup>550</sup>

Unter Berücksichtigung von  $\alpha = 0$  in  $t_0 = 0$  sowie der bonitätsabhängigen Ausfallsschranke  $K_i < 0$  ergibt sich die vereinfachte endpunktbedingte Passage-Dichte für die auf  $\beta_{i, t_H}$  bedingte BROWNSche Bewegung  $W_{i, t}$  für alle  $s \in (0, t_H)$  wie folgt:

$$f_{W_i}(s) | \beta_{i, t_H} = -\frac{K_i}{2\xi\pi} s^{-\frac{3}{2}} (t_H - s)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\beta_{i, t_H} - K_i)^2}{t_H - s} + \frac{K_i^2}{s}\right)} \quad \text{mit } s \in (0, t_H). \quad (3.88)$$

<sup>548</sup> Vgl. S. Metwally und A. Atiya (2002), Brownian bridge and barrier options, S. 47 f.

<sup>549</sup> METWALLY & ATIYA berücksichtigen noch einen von null verschiedenen Drift und eine von eins verschiedene Volatilität. Vgl. S. Metwally und A. Atiya (2002), Brownian bridge and barrier options, S. 48.

<sup>550</sup> Vgl. S. Metwally und A. Atiya (2002), Brownian bridge and barrier options, S. 48.

Mit Blick auf den zeittransformierten Prozess  $Y_{i,t}$  erhält man unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t)$  die folgende Passage-Dichte, die zugleich die endpunktbedingte Ausfalldichte  $f_{i,\tau_{FP}}(t)|\beta_{i,t_H}$  für  $t \in (0, t_H)$  darstellt:

$$f_{i,\tau_{FP}}(t)|\beta_{i,t_H} = f_{W_i}(g_{i,t})|\beta_{i,t_H} \cdot \frac{dg_{i,t}}{dt} \quad \text{mit } t \in (0, t_H). \quad (3.89)$$

Zur Verdeutlichung sei bemerkt, dass die Integration der endpunktbedingten Passage-Dichte (3.88) bzw. der endpunktbedingten Ausfalldichte (3.89) für den Kredit  $i$  über den Zeitabschnitt  $(0, t_H)^{551}$  zur endpunktbedingten Ausfallwahrscheinlichkeit (3.55) auf der Basis der Passage-Wahrscheinlichkeit einer BROWNSchen Brücke auf  $[0, t_H]$  führt. Voraussetzung ist dabei, dass der Kredit  $i$  mindestens bis zum Zeitpunkt  $t_H$  läuft.<sup>552</sup>

$$p_i(t_H)|\beta_{i,t_H} = \int_0^{t_H} f_{W_i}(s)|\beta_{i,t_H} ds = \int_0^{t_H} f_{i,\tau_{FP}}(t)|\beta_{i,t_H} dt \quad \text{für } t_H \leq T_i. \quad (3.90)$$

Alternativ kann jederzeit ein Analysezeitpunkt  $t_A \neq t_H$  betrachtet werden. Zu beachten ist dabei, dass im Allgemeinen der Analysezeitpunkt  $t_A$  und dessen Transformation – anders als im Falle des Risikohorizonts  $t_H$  – nicht zusammenfallen. Demzufolge ist in (3.88) - (3.90) der transformierte Analysezeitpunkt zu verwenden. In Analogie zur obigen Vorgehensweise ist vorauszusetzen, dass der Kredit  $i$  mindestens bis zum Zeitpunkt  $t_A$  läuft.<sup>553</sup>

$$p_i(t_A)|\beta_{i,t_A} = \int_0^{g_{i,t_A}} f_{W_i}(s)|\beta_{i,t_A} ds = \int_0^{t_A} f_{i,\tau_{FP}}(t)|\beta_{i,t_A} dt \quad \text{für } t_A \leq T_i. \quad (3.91)$$

Die Passage-Dichte der BROWNSchen Brücke ist um das Faktormodell zu erweitern. Dazu werden in Analogie zur Ermittlung der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit (3.82) die Endpunkte  $\beta_i$  der Ability-to-Pay-Prozesse  $W_{i,g_{i,t}}$  im Risikohorizont  $t_H$  in Abhängigkeit des Endpunkts  $\beta_{\psi,t_H}$  des BROWNSchen Faktorprozesses  $B_{\psi,g_{i,t}}$  modelliert. Der Endpunkt der BROWNSchen Faktorbewegung  $B_{\psi,g_{i,t}}$  wird auf  $\beta_{\psi,t_H}$  fixiert und folglich der Ability-to-Pay-Prozess implizit mit einer BROWNSchen Faktorbrücke  $X_{\psi,g_{i,t}}$  modelliert. Erneut soll weitgehend mit den standardisierten Zufallsvariablen  $\Psi_{t_H}$  und  $\varepsilon_{i,t_H}$  gem. (3.69) gearbeitet werden:

<sup>551</sup> Für die Zeitpunkte  $0$  und  $t$  ist (3.88) nicht definiert. Grenzbetrachtungen zeigen jedoch, dass (3.88) für beide Zeitpunkte den Wert null annimmt. Siehe auch die nachfolgenden Grenzwertbetrachtungen zur bedingten Ausfalldichte im Anschluss an Satz 3-6 i. V. m. Anlage 8 und Anlage 9.

<sup>552</sup> Zur Integration der Dichtefunktion vgl. S. Metwally und A. Atiya (2002), *Brownian bridge and barrier options*, S. 52 f.

<sup>553</sup> Die Gültigkeitsbedingung  $t_A \leq T_i$  bedarf keiner Transformation. Da die Zeittransformation als streng monoton wachsende Funktion definiert wurde, gilt  $t_A \leq T_i \Leftrightarrow g(t_A) \leq g(T_i)$ .

**Satz 3-6 (Bedingte Ausfalldichte):** Sei  $X_s$  eine BROWNSche Brücke mit dem Startpunkt  $\alpha=0$  und einem zufälligen Endpunkt  $\beta$  auf  $[0,t]$ . Der Endpunkt  $\beta$  wird dabei durch das Ein-Faktor-Modell (3.35) beschrieben. Dann ist die Dichte zur Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $X_s$  bei gegebenem Faktor  $\Psi_t$  eine konstante Schranke  $K$  mit  $K < 0$  innerhalb des Zeitabschnitts  $[0,t]$  erreicht bzw. durchschlägt im Zeitpunkt  $s \in (0,t)$ :

$$f_{X|\Psi}(s) = -\frac{K\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi s^3(t-s\rho)}} e^{\frac{1}{2}\left(\rho\psi^2 \frac{(K-\sqrt{\rho}\psi_t)^2}{(t-s)} - \frac{K^2}{s} + \frac{(s\sqrt{\rho(1-\rho)}\psi_t - K\sqrt{t(1-\rho)})^2}{(t-s)(t-s\rho)}\right)}. \quad (3.92)$$

Beweis:

Zunächst ist  $\beta$  in (3.87) durch das Ein-Faktor-Modell (3.35) zu ersetzen:

$$f_{X|\beta}(s) = \underbrace{-\frac{K}{2\pi} s^{-\frac{3}{2}} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi t}}_a \cdot e^{\left(\frac{1}{2} \frac{(\sqrt{t\rho}\psi_t + \sqrt{t(1-\rho)}\varepsilon_t)^2}{t} - \frac{1}{2} \frac{(\sqrt{t\rho}\psi_t + \sqrt{t(1-\rho)}\varepsilon_t - K)^2}{t-s} - \frac{1}{2} \frac{K^2}{s}\right)}. \quad (3.93)$$

Umformung und Separation des idiosynkratischen Faktors  $\varepsilon_t$  liefern:

$$f_{X|\beta}(s) = a \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{2}\left(-\rho\psi_t^2 + \frac{(K-\sqrt{\rho}\psi_t)^2}{(t-s)} + \frac{K^2}{s}\right)}}_b \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s(1-\rho)}{(t-s)}\varepsilon_t^2 + 2\left(\frac{t\sqrt{\rho(1-\rho)}\psi_t}{(t-s)} - \frac{\sqrt{t(1-\rho)}K}{(t-s)} - \sqrt{\rho(1-\rho)}\psi_t\right)\varepsilon_t\right)}. \quad (3.94)$$

Bei gegebenem systematischem Faktor  $\Psi_t$  ist über alle Ausprägungen des idiosynkratischen Faktors  $\varepsilon_t$  gewichtet mit der Dichte seiner Verteilung (Standardnormalverteilung), zu integrieren:

$$f_{X|\Psi}(s) = a \cdot b \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-s\rho}{(t-s)}u^2 + 2\left(\frac{t\sqrt{\rho(1-\rho)}\psi_t}{(t-s)} - \frac{\sqrt{t(1-\rho)}K}{(t-s)} - \sqrt{\rho(1-\rho)}\psi_t\right)u\right)} \cdot du. \quad (3.95)$$

Durch quadratische Ergänzung des Exponenten in (3.95) sind die binomischen Formeln anwendbar:

$$f_{X|\Psi}(s) = a \cdot b \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}\zeta^2}}_c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-s\rho}{(t-s)}\right)u+\zeta} \cdot du \quad (3.96)$$

mit :

$$\zeta = \frac{\frac{t\sqrt{\rho(1-\rho)}\psi_t}{\sqrt{(t-s)}} - \frac{\sqrt{t(1-\rho)}K}{\sqrt{(t-s)}} - \sqrt{\rho(1-\rho)(t-s)}\psi_t}{\sqrt{t-s\rho}}.$$

Durch Substitution,

$$l = \frac{t-s\rho}{(t-s)} \cdot u + \zeta, \quad (3.97)$$

folgt:

$$f_{X|\Psi}(s) = a \cdot b \cdot c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}l^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{t-s\rho}{t-s}\right)^{-\frac{1}{2}}}_d \cdot dl. \quad (3.98)$$

Da der Integrand in (3.98) die Dichtefunktion der Standardnormalverteilung darstellt und die Integration über den gesamten Definitionsbereich den Wert eins ergibt, erhält man schließlich:

$$f_{X|\Psi}(s) = a \cdot b \cdot c \cdot d. \quad (3.99)$$

Umstellung und Vereinfachung von Gleichung (3.99) liefern schließlich das gewünschte Ergebnis.

Für einen Kredit  $i$  mit  $t_H \leq T_i$  ergibt sich somit unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t)$  sowie der dazugehörigen Ausfallschranke  $K_i$  mit dem systematischen Faktor  $\Psi$  im Zeitpunkt  $t_H$  die Passage-Dichte  $f_{W_i|\Psi}$  für die auf den Endpunkt des Faktorprozesses bedingte BROWNSche Bewegung  $W_{i,t}$  für alle  $s \in (0, t_H)$  wie folgt:

$$f_{W_i|\Psi}(s) = -\frac{K_i \sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3 (t_H - s\rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \Psi^2 \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H \Psi t_H})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s\sqrt{\rho_i(1-\rho_i)}\Psi t_H - K_i \sqrt{t_H(1-\rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s\rho_i)} \right)} \quad (3.100)$$

für :

$$s \in (0, t_H).$$

Mit Blick auf den zeittransformierten Prozess  $Y_{i,t}$  erhält man unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t)$  die folgende Passage-Dichte, die zugleich die bedingte Ausfall-dichte  $f_{i,\tau_{FP}|\Psi}$  für  $t \in (0, t_H)$  darstellt:

$$f_{i,\tau_{FP}|\Psi}(t) = f_{W_i|\Psi}(g_{i,t}) \cdot \frac{dg_{i,t}}{dt} \quad \text{mit } t \in (0, t_H). \quad (3.101)$$

Gleichung (3.100) ist für die Zeitpunkte  $s=0$  sowie  $s=t_H$  nicht definiert. Da ein Kreditausfall im Zeitpunkt null per Definition<sup>554</sup> ausgeschlossen ist, muss auch die bedingte Ausfall-dichte im Zeitpunkt null verschwinden. Eine Grenzwertbetrachtung führt zum gewünschten Ergebnis.<sup>555</sup> Sofern die Faktorsensitivität  $\rho_i$  nicht den Wert eins annimmt, führt eine Grenzwertbetrachtung für  $s \rightarrow t_H$  zu:<sup>556</sup>

$$f_{W_i|\Psi}(s) = -\frac{K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3(1-\rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H} \Psi_{t_H})^2}{t_H(\rho_i - 1)} \right)} \quad \text{für } s = t_H, \rho_i \neq 1. \quad (3.102)$$

Nimmt die Faktorsensitivität  $\rho_i$  den Wert eins an, beträgt der Grenzwert von (3.100) für  $s \rightarrow t_H$  null.<sup>557</sup> Die Grenzwertbetrachtungen ermöglichen die (numerische) Integration von  $f_{W_i|\Psi}(s)$  über das abgeschlossene Intervall  $[0, t_H]$ . Das Ergebnis führt zur bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit eines langlaufenden Kredits  $p_i(t_H)|\Psi$  gem. (3.82):<sup>558</sup>

$$p_i(t_H)|\Psi = \int_0^{t_H} f_{W_i}(s)|\Psi ds = \int_0^{t_H} f_{i,\tau_{FP}}(t)|\Psi dt \quad \text{für } t_H \leq T_i. \quad (3.103)$$

Nachfolgend sollen die Struktur und die Funktionsweise der Gleichung (3.100) durch die Betrachtung von Spezialfällen einer genaueren Analyse unterzogen werden. Dazu sind insbesondere Bezüge zu früheren Gleichungen hilfreich.

Für den Spezialfall  $\rho_i=1$  vereinfacht sich (3.100) zu (3.88) mit  $\beta_{i,t_H} = \sqrt{t_H} \Psi_{t_H}$ <sup>559</sup>. Das heißt, Gleichung (3.100) ergibt für  $\rho_i=1$  die Passage-Dichte einer BROWNSchen Brücke, wobei der Endpunkt der Brücke alleine durch den systematischen Faktor  $\Psi_{t_H}$  bestimmt wird. Die Umskalierung mit Hilfe der Wurzel-Zeit-Formel ergibt sich aus der Standardnormalverteilungsannahme für den systematischen Faktor  $\Psi_{t_H}$ :

$$f_{W_i|\Psi, \rho_i=1}(s) = -\frac{K_i}{2\xi\pi} s^{-\frac{3}{2}} (t_H - s)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(K_i - \sqrt{t_H} \Psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} + \frac{K_i^2}{s} \right)} \quad (3.104)$$

mit :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_H}} e^{-\frac{1}{2} \Psi_{t_H}^2}.$$

<sup>554</sup> Definitionsgemäß ist  $F_{\tau_{FPi}}(0)=0$ . Siehe auch die Ausführungen in Abschnitt 321.

<sup>555</sup> Vgl. Anlage 8.

<sup>556</sup> Vgl. Anlage 9.

<sup>557</sup> Vgl. nachfolgend die Ausführungen zum Spezialfall  $\rho_i=1$ , die Gleichung (3.104) sowie die Fußnote 551 zur Grenzwertbetrachtung der Passage-Dichte einer BROWNSchen Brücke.

<sup>558</sup> Die Richtigkeit der getroffenen Aussage lässt sich durch numerische Integration demonstrieren.

<sup>559</sup> Vgl. Anlage 10.

Für den Spezialfall  $\rho_i=0$  vereinfacht sich (3.100) zur Passage-Dichte einer Standard BROWNSchen Bewegung.<sup>560</sup> Die Standard BROWNSche Bewegung beschreibt dabei den idiosynkratischen Faktor  $\varepsilon_{i,t_H}$ . Da für  $\rho_i=0$  der systematische Faktor  $\Psi_{t_H}$  keinerlei Einfluss ausübt, entfallen in (3.100) sowohl der systematische Faktor  $\Psi_{t_H}$  als auch der Risikohorizont  $t_H$ . Lediglich der Zeitpunkt  $s$  verbleibt neben der Schranke  $K_i$  in der resultierenden Gleichung:<sup>561</sup>

$$f_{W_i|\Psi, \rho_i=0}(s) = -\frac{K_i}{\sqrt{2\pi s^3}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{K_i^2}{s}}. \quad (3.105)$$

Alternativ kann jederzeit ein Analysezeitpunkt  $t_A \neq t_H$  betrachtet werden. Da im Allgemeinen der Analysezeitpunkt  $t_A$  und dessen Transformation nicht zusammenfallen, ist in (3.100) der transformierte Analysezeitpunkt zu verwenden. Vorauszusetzen ist, dass der Kredit  $i$  mindestens bis zum Zeitpunkt  $t_A$  läuft.<sup>562</sup> Für einen Kredit  $i$  mit  $t_A \leq T_i$  ergibt sich somit unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t)$  sowie der dazugehörigen Ausfallschranke  $K_i$  mit dem systematischen Faktor  $\Psi$  im Zeitpunkt  $t_A \neq t_H$  die bedingte Passage-Dichte  $f_{W_i|\Psi}$  für die auf den Endpunkt des Faktorprozesses bedingte BROWNSche Bewegung  $W_{i,t}$  für alle  $s \in (0, g_{i,t_A})$  wie folgt:

$$f_{W_i|\Psi}(s) = \frac{-K_i \sqrt{g_{i,t_A}}}{\sqrt{2\pi s^3 (g_{i,t_A} - s \rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \Psi^2 \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i g_{i,t_A}} \Psi_{t_A})^2}{(g_{i,t_A} - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s \sqrt{\rho_i (1-\rho_i)} \Psi_{t_A} - K_i \sqrt{g_{i,t_A} (1-\rho_i)})^2}{(g_{i,t_A} - s)(g_{i,t_A} - s \rho_i)} \right)} \quad (3.106)$$

für :

$$s \in (0, g_{i,t_A}).$$

In Analogie zu (3.103) erhält man die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit eines langlaufenden Kredits  $p_i(t_A) | \Psi$  gem. (3.82):

$$p_i(t_A) | \Psi = \int_0^{g_{i,t_A}} f_{W_i}(s) | \Psi ds = \int_0^{t_A} f_{i, \tau_{FP}}(t) | \Psi dt \quad \text{für } t_A \leq T_i. \quad (3.107)$$

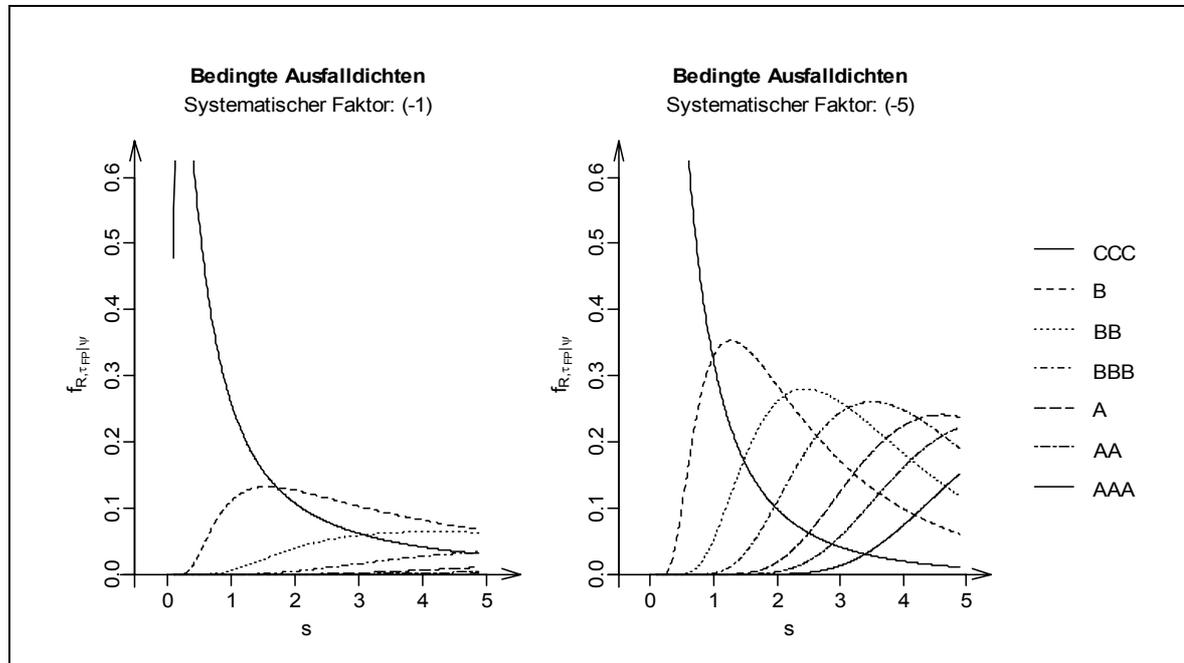
Im Folgenden werden die bedingten Ausfalldichten ratingspezifisch ermittelt. Die Abb. 3-12 zeigt die ratingspezifischen, bedingten Ausfalldichten für die Faktorausprägungen  $\Psi_i=(-1)$  und  $\Psi_i=(-5)$  per  $t_H=5$ . Anhand der Dichten wird deutlich, dass – wie im Rahmen

<sup>560</sup> Zum Konzept der Passage-Dichte einer BROWNSchen Bewegung siehe I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 80.

<sup>561</sup> Für die Herleitung von (3.105) aus (3.100) siehe Anlage 11.

<sup>562</sup> Die Gültigkeitsbedingung  $t_A \leq T_i$  bedarf keiner Transformation. Vgl. Fn. 553.

der Diskussion der funktionalen Formen ratingabhängiger Credit Spreads bereits vermutet<sup>563</sup> – Kredite mit niedriger Bonität mit höheren Wahrscheinlichkeiten frühzeitiger ausfallen, wohingegen für Kredite mit exzellenter Bonität ein mögliches Ausfallereignis mit hoher Wahrscheinlichkeit in einem späteren Zeitpunkt zu finden ist:



**Abb. 3-12: Ratingspezifische bedingte Ausfalldichten**

Ratingspezifische bedingte Ausfalldichten aus Sicht des Risikohorizonts  $t_H=5$  auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S für die systematischen Faktorausprägungen (-1) und (-5).

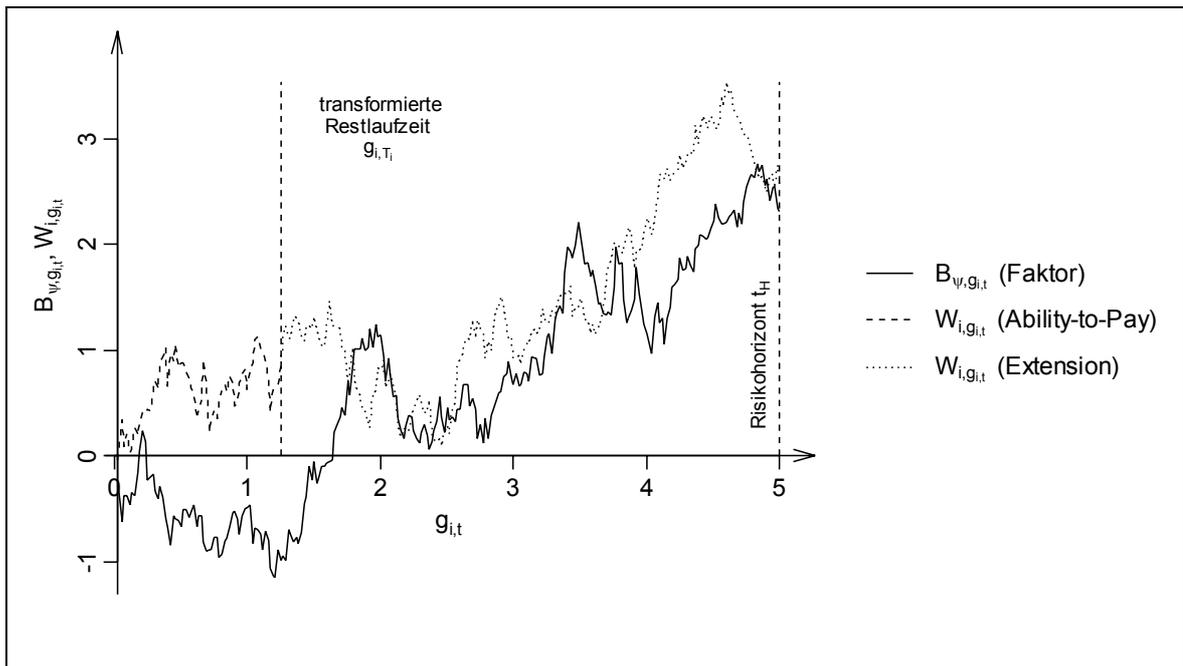
Je besser die Bonität, je weiter verschiebt sich Wahrscheinlichkeitsmasse für einen eventuellen Ausfall auf spätere Zeitintervalle. Die Ausfalldichten für Kredite mittlerer bis unterer Qualität weisen erneut hügelartige Verläufe auf. Die Graphen verdeutlichen ebenfalls, insbesondere am Beispiel der „CCC“-gerateten Kredite, dass selbst im kurzfristigen Bereich Kreditausfälle nicht unwahrscheinlich sind.

### 355 Bedingte Ausfalldichten im Ein-Faktor-Modell und die Modellierung von Ausfällen kurzlaufender Kredite

Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit (3.82) für den Analysezeitpunkt  $t_A$  setzt voraus, dass der Kredit  $i$  mindestens bis zum Analysezeitpunkt  $t_A$  läuft. Das wird nicht immer der Fall sein. Es ist daher zu klären, ob, und wenn ja wie, bei Kenntnis der Ausprägung des Faktors  $\Psi_{t_A}$  auf die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit eines kürzer laufenden Finanztitels  $i$  unter Beachtung der Faktorsensitivität  $\rho_i$  geschlossen werden kann. Vereinfachend, jedoch o. B. d. A., wird zunächst der Risikohorizont  $t_H$  betrachtet. Das heißt, die Zeittransformationen sind für diesen Zeitpunkt gem. (3.43) kreditübergreifend identisch.

<sup>563</sup> Vgl. Abschnitt 31.

Mit  $T_i < t_H$  (kurzlaufender Kredit) gilt aufgrund der Definition der Zeittransformation als streng monoton wachsende Funktion i. V. m. der Wahl der Ausfallschranke gem. (3.43) stets  $T_i < t_H \Leftrightarrow g(T_i) < t_H$ . Der transformierte Verfallszeitpunkt  $g_i(T_i)$  liegt auf der Zeitskala regelmäßig links vom Risikohorizont  $t_H$ . Von Interesse für das Ausfallereignis ist der Verlauf des Ability-to-Pay-Prozesses bis zum transformierten Fälligkeitszeitpunkt  $g_i(T_i)$ . Bekannt sei jedoch nur der Wert des Faktorprozesses  $B_{\psi, g_{i,t}}$  im Risikohorizont  $t_H$ . Gesucht ist folglich die (faktorendpunkt)bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Ability-to-Pay-Prozess innerhalb des Zeitraumes  $[0, g_{i,T}]$  die Ausfallschranke  $K_i$  verletzt hat.



**Abb. 3-13: Ability-to-Pay-Prozess und Extension bei kurzen Restlaufzeiten im Faktormodell**

Dazu wird hier vorgeschlagen, den Ability-to-Pay-Prozess  $W_{i, g_{i,t}}$  gedanklich bis zum Risikohorizont unter Beibehaltung der Faktorsensitivität  $\rho_i$  zum Faktorprozess  $B_{\psi, g_{i,t}}$  weiter fortzuführen (vgl. Abb. 3-13). Anhand eines diskreten Zeitgitters argumentiert, werden die noch fehlenden Zeitschritte in Abhängigkeit der Ausprägungen des systematischen Risikofaktors und der Faktorsensitivität aufgefüllt (Extension). Dann kann durch Integration der endpunktbedingten Passage-Dichte (3.88) bzw. der endpunktbedingten Ausfalldichte (3.89) für den Kredit  $i$  über den Zeitabschnitt  $(0, g_i(T_i))$  bzw.  $(0, T_i)$  mit  $T_i < t_H$  auf die endpunktbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit des kürzer laufenden Kredites geschlossen werden:

$$p_i(t_H) | \beta_{i, t_H} = \int_0^{g_i(T_i)} f_{W_i}(s) | \beta_{i, t_H} ds = \int_0^{T_i} f_{i, \tau_{FP}}(t) | \beta_{i, t_H} dt \quad \text{für } t_H > T_i. \quad (3.108)$$

Mit der Erweiterung der endpunktbedingten Passage-Dichte der BROWNSchen Brücke (3.88) um das Faktormodell werden die Endpunkte  $\beta_{i,t_H}$  nicht als deterministische Parameter, sondern vielmehr als Zufallsvariablen aufgefasst (vgl. (3.56) mit  $t=t_H$ ) und an einen systematischen Faktor  $\Psi_{t_H}$  gebunden (vgl. (3.70) mit  $t=t_H$ ). Für einen Kredit  $i$  mit  $T_i < t_H$  ergibt sich somit unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t)$  sowie der dazugehörigen Ausfallschranke  $K_i$  mit dem systematischen Faktor  $\Psi$  im Zeitpunkt  $t_H$  die bedingte Passage-Dichte  $f_{W_i|\Psi}$  und die bedingte Ausfalldichte  $f_{i,\tau_{FP}|\Psi}$  für alle  $t \in (0, T_i)$  in Analogie zu (3.100) ff. wie folgt:<sup>564</sup>

$$f_{W_i|\Psi}(s) = -\frac{K_i \sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3 (t_H - s \rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i W^2 \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H} \Psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s \sqrt{\rho_i (1 - \rho_i)} \Psi_{t_H} - K_i \sqrt{t_H (1 - \rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s \rho_i)} \right)} \quad (3.109)$$

für :

$$s \in (0, g_{i,T_i}),$$

$$f_{i,\tau_{FP}|\Psi}(t) = f_{W_i|\Psi}(g_{i,t}) \cdot \frac{dg_{i,t}}{dt} \quad \text{mit } t \in (0, T_i). \quad (3.110)$$

Auf der Basis von (3.109) und (3.110) lassen sich die faktorbedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten kurzlaufender Kredite ermitteln. Für einen Kredit  $i$  mit der Restlaufzeit  $T_i < t_H$  ergibt sich die kreditspezifische bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit für den Risikohorizontes  $t_H$  durch Integration von (3.109) bzw. (3.110) über den Zeitabschnitt  $(0, g_i(T_i))$  bzw.  $(0, T_i)$ . Die Integration erfolgt mit Standardmethoden der Numerik:

$$p_i(t_H)|\Psi = \int_0^{g_i(T_i)} f_{W_i|\Psi}(s) \cdot ds = \int_0^{T_i} f_{i,\tau_{FP}|\Psi}(t) \cdot dt \quad \text{für } t_H > T_i. \quad (3.111)$$

Für einen Kredit  $i$  mit der Restlaufzeit  $T_i < t_H$  ergibt sich die kreditspezifische (unbedingte) Ausfallwahrscheinlichkeit (3.4) aus der Sicht des Risikohorizontes  $t_H$  durch Integration von (3.109) bzw. (3.110) sowohl über den Zeitabschnitt  $(0, g_i(T_i))$  bzw.  $(0, T_i)$  als auch über sämtliche Ausprägungen des systematischen Faktors  $\Psi_{t_H}$ . Bei der Integration über den Faktor  $\Psi_{t_H}$  ist seine Wahrscheinlichkeitsverteilung zu berücksichtigen:

$$p_i(t_H) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{g_i(T_i)} f_{W_i}(s) |u \cdot ds \right) \cdot f_{SN}(u) \cdot du \quad (3.112)$$

<sup>564</sup> Es sei daran erinnert, dass mit  $T_i < t_H$  der Ausdruck  $g_i(T_i)$  wegen (3.32) stets kleiner ist als  $t_H$ .

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_0^{T_i} f_{i,\tau_{FP}}(t) |u \cdot dt \right) \cdot f_{SN}(u) \cdot du$$

für:  $t_H > T$ .

Das Ergebnis ist vom Parameter  $\rho_i$  sowie von der Wahl des Betrachtungszeitpunktes  $t_H$  mit  $t_H > T_i$  unabhängig und mit dem Ergebnis der Integration der entsprechenden Credit Curve gem. (3.8) identisch.<sup>565</sup> Der Zweck der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeit auf der Basis der Integration über die bedingte Ausfalldichte besteht in der gemeinsamen Kontrolle von bedingten Ausfallereignissen unterschiedlich langlaufender Kredite. Der systematische Faktor verschiebt je nach Höhe seiner Ausprägung die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Kredite gemeinsam nach oben oder nach unten. Gemeinsame Ausfallereignisse treten mit positiven Korrelationen auf.

Alternativ kann jederzeit ein Analysezeitpunkt  $t_A \neq t_H$  betrachtet werden. Insofern der Analysezeitpunkt  $t_A$  nicht vor dem Verfallszeitpunkt  $T_i$  des Kredits  $i$  liegt, ändert sich die Vorgehensweise, d. h. die Integration über die bedingte Ausfalldichte, grundsätzlich nicht. Da jedoch i. d. R. der Analysezeitpunkt  $t_A$  und dessen Transformation – anders als beim Risikohorizont  $t_H$  – nicht zusammenfallen, ist in (3.109) der transformierte Analysezeitpunkt zu verwenden.<sup>566</sup> Für einen Kredit  $i$  mit  $T_i < t_A$  ergibt sich somit unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t)$  sowie der dazugehörigen Ausfallschranke  $K_i$  mit dem systematischen Faktor  $\Psi_t$  im Zeitpunkt  $t_A \neq t_H$  die bedingte Passage-Dichte  $f_{W_i|\Psi}$  und die bedingte Ausfalldichte  $f_{i,\tau_{FP}|\Psi}$  für alle  $t \in (0, T_i)$  wie folgt:

$$f_{W_i|\Psi}(s) = \frac{-K_i \sqrt{g_{i,t_A}}}{\sqrt{2\pi s^3 (g_{i,t_A} - s\rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \Psi_{t_A}^2 \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i g_{i,t_A}} \Psi_{t_A})^2}{(g_{i,t_A} - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s\sqrt{\rho_i(1-\rho_i)} \Psi_{t_A} - K_i \sqrt{g_{i,t_A}(1-\rho_i)})^2}{(g_{i,t_A} - s)(g_{i,t_A} - s\rho_i)} \right)} \quad (3.113)$$

für:

$$s \in (0, g_{i,T_i}),$$

$$f_{i,\tau_{FP}|\Psi}(t) = f_{W_i|\Psi}(g_{i,t}) \cdot \frac{dg_{i,t}}{dt} \quad \text{mit } t \in (0, T_i). \quad (3.114)$$

Auf der Basis von (3.113) und (3.114) lassen sich die faktorbedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten kurzlaufender Kredite mit  $t_A \neq t_H$  in Analogie zu (3.111) ermitteln.

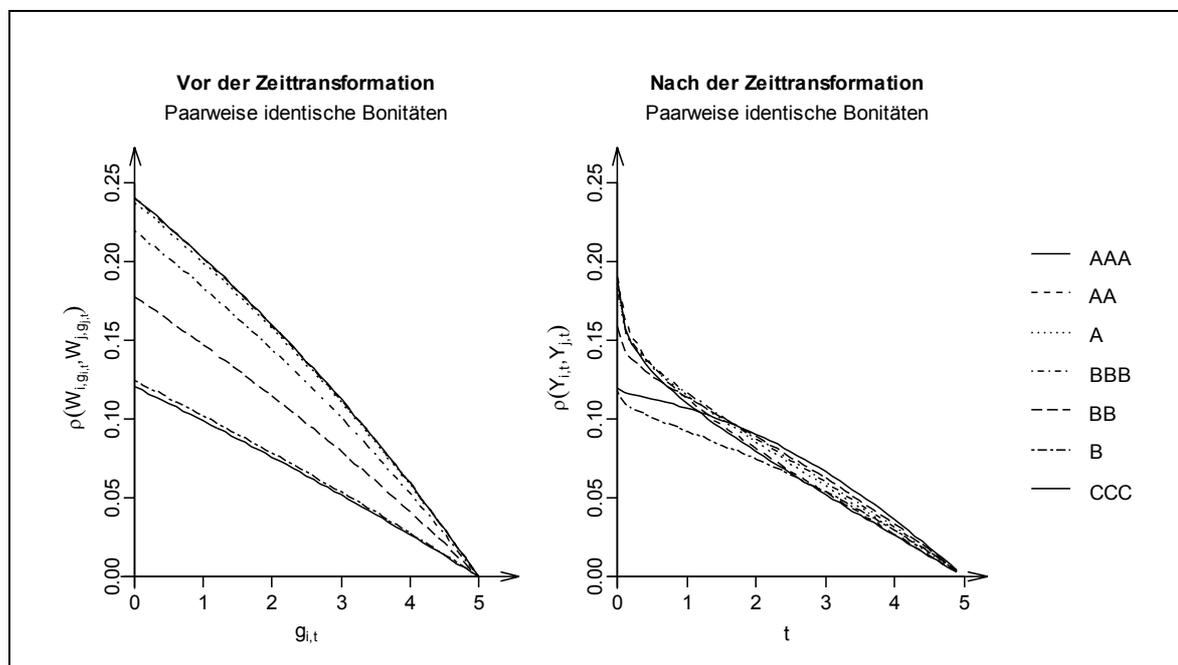
<sup>565</sup> Das zweidimensionale Integral lässt sich m. E. nicht analytisch lösen. Vielmehr sind numerische Approximationsverfahren notwendig, um die Gültigkeit der getroffenen Aussage zu demonstrieren.

<sup>566</sup> Da die Zeittransformation als streng monoton wachsende Funktion definiert wurde, gilt  $T_i < t_A \Leftrightarrow g_i(T_i) < g_i(t_A)$ , d. h. der transformierte Verfallszeitpunkt eines kurzlaufenden Kredits liegt stets links vom transformierten Analysezeitpunkt. Abb. 3-13 kann somit im übertragenden Sinne auf den allgemeineren Fall bezogen werden.

### 356 Abhängigkeit und Unabhängigkeit bedingter Ausfallereignisse

Mit den Gleichungen (3.82) und (3.111) stehen bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten für lang- und kurzlaufende Kredite, d. h. für Kredite, die – im Fall langlaufender Kredite – nach dem Risikohorizont und – im Fall kurzlaufender Kredite – vor dem Risikohorizont verfallen, zur Verfügung. In beiden Fällen wird auf den Endpunkt  $\beta_{\psi,t_H}$  des BROWNSchen Faktorprozesses  $B_{\psi,g_{i,t}}$  bedingt. Durch die Fixierung des Endpunktes der BROWNSchen Faktorbewegung  $B_{\psi,g_{i,t}}$  auf  $\beta_{\psi,t_H}$  werden die Ability-to-Pay-Prozesse  $W_{i,g_{i,t}}$  der einzelnen Kredite implizit mit einer BROWNSchen Faktorbrücke  $X_{\psi,g_{i,t}}$  modelliert.<sup>567</sup> Davon zu unterscheiden sind bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten, bei denen auf die Ausprägung des vollständigen Pfades des BROWNSchen Faktorprozesses  $B_{\psi,g_{i,t}}$  mit dem Endpunkt  $\beta_{\psi,t_{HP}}$  respektive der BROWNSchen Faktorbrücke  $X_{\psi,g_{i,t}}$  bedingt wird.

Bei gegebener Pfadausprägung der systematischen BROWNSchen Bewegung  $B_{\psi,g_{i,t}}$  sind die Ausfallzeiten  $\tau_i$  mit der Unabhängigkeit der idiosynkratischen BROWNSchen Bewegungen  $B\varepsilon_{i,g_{i,t}}$  selbst unabhängig voneinander. Daraus folgt die Unabhängigkeit der faktorpfadbedingten Ausfallindikatoren. Fraglich ist, welche Form die Abhängigkeitsstruktur der Ausfallindikatoren bei gegebenem Faktorendpunkt  $\beta_{\psi,t_{HP}}$  aber stochastischer Faktorbrücke  $X_{\psi,g_{i,t}}$  annimmt.



**Abb. 3-14: Korrelation zeittransformierter Prozesse mit BROWNSchen Faktorbrücken (I)**  
Zeitabhängige Korrelationen (zeittransformierter) faktorpfadendpunktbedingter Prozesse für die einzelnen Ratingklassen. Die Berechnungen beziehen sich auf paarweise identische Bonitäten. Der Risikohorizont beträgt 5 Jahre.

<sup>567</sup> Vgl. Abschnitt 352.

Dazu werden zwei Ability-to-Pay-Prozesse  $W_{i,g_{i,t}}$  und  $W_{j,g_{j,t}}$  betrachtet. Die Ability-to-Pay-Prozesse seien auf der Basis einer BROWNSchen Faktorbrücke  $X_{\psi,t}$  mit  $t \in [0, t_H]$  nach (3.53) mit den (bedingten) Erwartungswerten  $E(W_{i,g_{i,t}})|\beta_{\psi,t_H}$  und  $E(W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H}$  gem. (3.60) und den (bedingten) Varianzen  $Var(W_{i,g_{i,t}})|\beta_{\psi,t_H}$  und  $Var(W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H}$  gem. (3.61) modelliert.<sup>568</sup> Dann lässt sich die (bedingte) Kovarianz  $Cov(W_{i,g_{i,t}}, W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H}$  zwischen den beiden Ability-to-Pay-Prozessen, respektive den zeittransformierten Prozessen  $Y_{i,t}$  und  $Y_{j,t}$ , in Abhängigkeit von  $t$  wie folgt errechnen:<sup>569</sup>

$$Cov(W_{i,g_{i,t}}, W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H} = E(W_{i,g_{i,t}} \cdot W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H} - E(W_{i,g_{i,t}})|\beta_{\psi,t_H} \cdot E(W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H}. \quad (3.115)$$

Der Erwartungswert  $E(W_{i,g_{i,t}} \cdot W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H}$  ermittelt sich unter Berücksichtigung der Unabhängigkeit zwischen  $X_{\psi,t}$ ,  $B\varepsilon_{i,t}$  und  $B\varepsilon_{j,t}$  gemäß:

$$E(W_{i,g_{i,t}} \cdot W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H} = \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E(X_{\psi,g_{i,t}} \cdot X_{\psi,g_{j,t}}). \quad (3.116)$$

Mit dem Erwartungswert des Produkts zweier Punkte einer BROWNSchen Brücke<sup>570</sup>

$$E(X_{\psi,g_{i,t}} \cdot X_{\psi,g_{j,t}}) = \frac{\beta_{\psi,t_H}^2 g_{i,t} g_{j,t} + t_H \min(g_{i,t}, g_{j,t})(t_H - \max(g_{i,t}, g_{j,t}))}{t_H^2} \quad (3.117)$$

folgt schließlich für die gesuchte Kovarianz:

$$Cov(W_{i,g_{i,t}}, W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H} = \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot \frac{t_H \min(g_{i,t}, g_{j,t})(t_H - \max(g_{i,t}, g_{j,t}))}{t_H^2}. \quad (3.118)$$

Durch Normierung mit den Varianzen gem. (3.61) erhält man den (bedingten) Korrelationskoeffizienten:

$$Korr(W_{i,g_{i,t}}, W_{j,g_{j,t}})|\beta_{\psi,t_H} = \sqrt{\rho_i \rho_j} \frac{\min(g_{i,t}, g_{j,t})}{\sqrt{g_{i,t} g_{j,t}}} \frac{(t_H - \max(g_{i,t}, g_{j,t}))}{\sqrt{(t_H - \rho_i g_{i,t})(t_H - \rho_j g_{j,t})}}. \quad (3.119)$$

Die Korrelation der faktorendpunktbedingten zeittransformierten Prozesse  $Y_{i,t}$  und  $Y_{j,t}$  im Zeitpunkt  $t$  ist demzufolge stets positiv. Folglich können die bedingten Ausfallereignisse nicht unabhängig voneinander sein. Jedoch hängt die Höhe der Korrelation von der Wahl des Betrachtungszeitpunkts  $t$  und von den Zeittransformationen ab.

<sup>568</sup> Vgl. für die Erwartungswerte Anlage 6 und für die Varianzen Anlage 7.

<sup>569</sup> Vgl. allgemein zur Kovarianz G. Grimmett und D. Stirzaker (2001), Probability, S. 62-66.

<sup>570</sup> Vgl. Anlage 12.

Zur Betrachtung des Einflusses der Zeit ist es hilfreich, die Gleichung (3.119) durch die Betrachtung eines Spezialfalles zu vereinfachen. Es sei unterstellt, dass die paarweise betrachteten Kredite dieselbe Kreditqualität aufweisen. Daraus resultiert  $g_{i,t}=g_{i,j}$  und führt zu folgender Korrelationsstruktur:

$$\text{Korr}(W_{i,g_t}, W_{j,g_t}) \Big|_{\beta_{\psi,t_H}} = \sqrt{\rho_i \rho_j} \frac{(t_H - g_t)}{(t_H - \rho g_t)} \quad \text{für } g_t = g_{i,t} = g_{j,t} . \quad (3.120)$$

Sind beide BROWNSchen Bewegungen an den Faktor mit einer Faktorsensitivität von  $\rho_i=\rho_j=1$  gebunden, vereinfacht sich (3.120) weiter und liefert wie (3.40) den Wert eins. Für  $\rho_i=\rho_j=0$  erhält man – ebenfalls konform mit (3.40) – einen Wert i. H. v. null. Von besonderem Interesse ist jedoch die Tatsache, dass die Korrelation eine abnehmende Funktion der Zeit ist. Für  $t=0$  nimmt der Ausdruck (3.120) das Maximum

$$\text{Korr}(W_{i,g_{i,0}}, W_{j,g_{j,0}}) \Big|_{\beta_{\psi,t_H}} = \sqrt{\rho_i \cdot \rho_j} \quad (3.121)$$

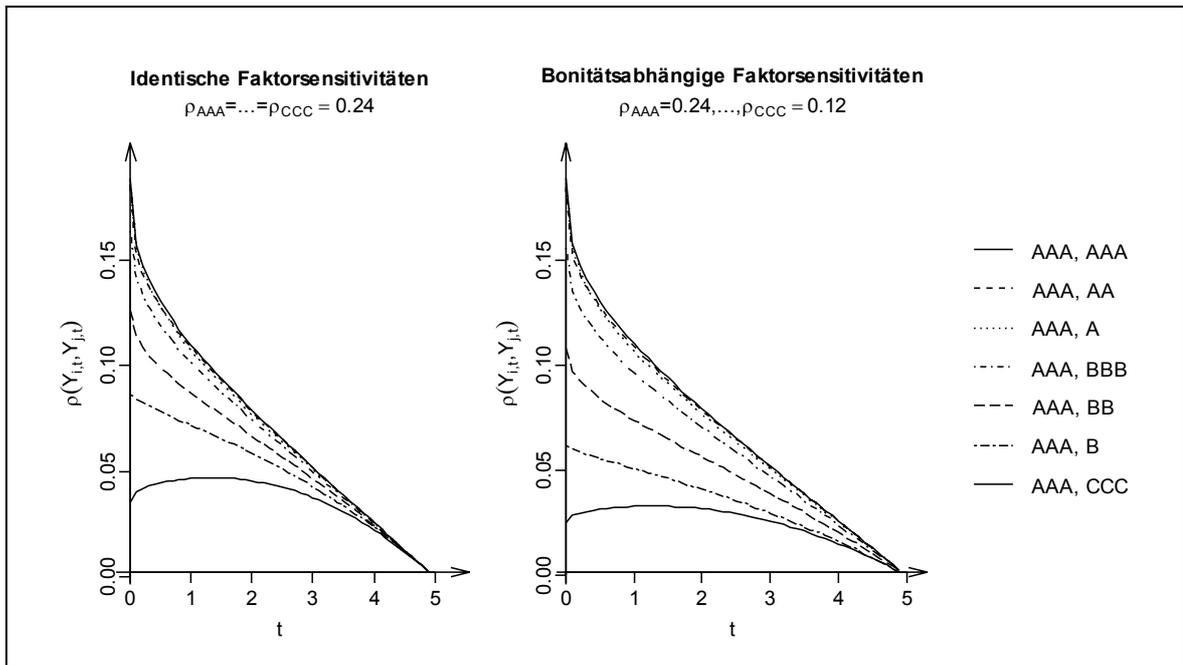
an und entspricht der Korrelation zweier BROWNScher Bewegungen mit gemeinsamer, systematischer (unbedingter) BROWNScher Bewegung gem. (3.49).<sup>571</sup> Je weiter man sich jedoch dem Analysezeitpunkt  $t_A$  beziehungsweise dem transformierten Analysezeitpunkt  $g_{i,t_A}$  nähert, je geringer wird die Korrelation, bis sie schließlich im (transformierten) Analysezeitpunkt selbst einen Wert von null aufweist (vgl. Abb. 3-14).

Beachtet man zusätzlich, dass mit Blick auf die Analyse der zeitlichen Struktur von Kreditausfällen mit Hilfe der bedingten Ausfalldichte gem. (3.106) die Ausfallereignisse insbesondere von bonitätsrisikoarmen Krediten in späteren Zeitabschnitten wahrscheinlicher sind als in früheren Zeitabschnitten<sup>572</sup>, d. h. in Zeitabschnitten, in denen die faktorendpunktbedingten Prozesse gem. (3.119) Korrelationswerte in der Nähe von null aufweisen, dann lassen sich die bedingten Ausfallereignisse approximativ als unabhängig betrachten.

Bei unterschiedlichen Bonitäten ist der Term  $\min(g_{i,t}, g_{j,t}) / \sqrt{g_{i,t} g_{j,t}}$  in (3.119) in die Überlegungen mit einzubeziehen. Dieser Term nimmt maximal genau dann den Wert eins an, wenn die Zeittransformationen für beide Kredite identisch ausfallen. Je stärker die Zeittransformationen auseinander fallen, je geringer ist der Wert und je geringer fällt die Korrelation aus. Ursache ist der Minimumoperator im Zähler des Bruches. Dadurch ist sichergestellt, dass der Nenner niemals einen kleineren Wert annehmen kann als der Zähler.

<sup>571</sup> Der Ausdruck (3.119) nimmt für  $t=0$  dasselbe Maximum an.

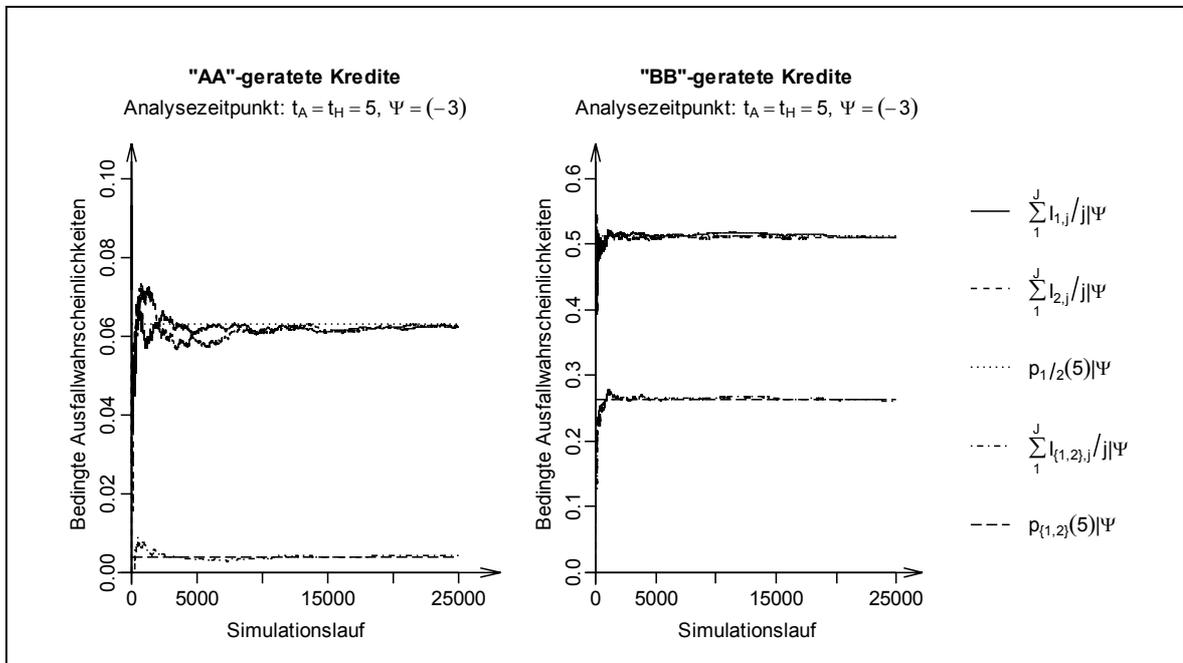
<sup>572</sup> Vgl. Abb. 3-12 sowie die Ausführungen in Abschnitt 354.



**Abb. 3-15: Korrelation zeittransformierter Prozesse mit BROWNschen Faktorbrücken (II)**

Zeitabhängige Korrelationen zeittransformierter faktorpfadepunktbedingter Prozesse für paarweise verschiedene Ratingklassen. Links: Zur Verdeutlichung des Einflusses der paarweise unterschiedlichen Zeittransformationen wurden einheitliche Faktorsensitivitäten verwendet. Rechts: Die Wahl der Faktorsensitivitäten erfolgt – wie in den übrigen Teilen der Arbeit – bonitätsabhängig. Vgl. die Werte in Tab. 3-6.

In Abb. 3-15 sind zeitabhängige Korrelationen zwischen zeittransformierten Prozessen mit BROWNschen Faktorbrücken für paarweise verschiedene Bonitäten abgetragen. Dabei wird deutlich, dass der Einfluss der verschiedenen Zeittransformationen erheblich ist.



**Abb. 3-16: Abhängigkeit vs. Unabhängigkeit bedingter Ausfallereignisse bei langlaufenden Krediten**

Empirische (Simulationsverläufe) und analytische (horizontale Linien) faktorendpunktbedingte uni- und bivariate Ausfallwahrscheinlichkeiten eines „AA“-gerateten (links) und eines „BB“-gerateten (rechts) Kreditpaares. Die analytischen bivariaten Ausfallwahrscheinlichkeiten sind unter der Unabhängigkeitsannahme ermittelt. Der Risikohorizont beträgt 5 Jahre. Die Rechnungen basieren auf den Credit Curves vom Typ B.

In Abb. 3-16 sind simulierte und analytisch ermittelte, bedingte Ausfallwahrscheinlichkeiten für zwei Kredite auf einzelner und paarweiser Basis abgetragen. Zur simulativen Ermittlung der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten wurden zwei Ability-to-Pay-Prozesse  $W_{i,g_i,t}$  und  $W_{j,g_j,t}$  mit einer BROWNSchen Brücke  $X_{\psi,g_i,t}$  als systematischen Faktor bis zum Risikohorizont  $t_{H=5}$  modelliert.<sup>573</sup> Der Brückenendpunkt  $\beta_{\psi,t_H}$  betrug (-3).<sup>574</sup> Die Kredite tragen ein „AA“-Rating (links) bzw. ein „BB“-Rating (rechts). Die Wahl der Ausfallshranken sowie der Korrelationen erfolgte ratingspezifisch.<sup>575</sup> Nach jedem Simulationslauf wurden die Werte null (kein Ausfall) oder eins (Ausfall) zwei univariaten Ausfallindikatoren und einem bivariaten Ausfallindikator zugeordnet. Die Summen der Ausfallindikatoren dividiert durch die jeweilige Anzahl der Simulationsläufe, d. h. die bedingten relativen Ausfallhäufigkeiten, konvergieren nach dem Gesetz der Großen Zahlen<sup>576</sup> gegen die tatsächlichen bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten. Die analytischen Werte wurden im univariaten Fall gem. der Gleichung (3.82) errechnet und sind im Diagramm durch eine Horizontale gekennzeichnet. Sie betragen 6,29 % für „AA“-geratete Kredite und 51,25 % für „BB“-geratete Kredite. Man sieht deutlich, dass die bedingten relativen Ausfallhäufigkeiten gegen die analytisch ermittelten Werte konvergieren. Im bivariaten Fall wurden die (gemeinsamen) bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten analytisch unter der Annahme der Unabhängigkeit der bedingten Ausfallereignisse durch Multiplikation der univariaten bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten approximiert. Obwohl durch die Approximation ein Teil der Korrelation verloren geht, ist deutlich aus dem Diagramm zu entnehmen, dass die Approximation sehr genau ist. Die bedingten relativen Ausfallhäufigkeiten konvergieren sowohl im Falle der „AA“-gerateten Kredite als auch im Falle der „BB“-gerateten Kredite gegen Werte, die sehr nahe an den mit Hilfe von Gleichung (3.82) und des Multiplikationsverfahrens approximativ ermittelten Werten liegen.

Der Abb. 3-14 folgend, sollte die Approximation umso schlechter werden, je kürzer die Restlaufzeit ist. Zur Klärung wurde die obige Simulation für „BB“-geratete Kredite mit kurzen Restlaufzeiten wiederholt. Abb. 3-17 zeigt die Ergebnisse für die Kombination eines lang- und eines kurzlaufenden Kredits (links) sowie die Kombination zweier kurzlaufender Kredite (rechts). Die Restlaufzeiten der kurzlaufenden Kredite betragen einheitlich drei Jahre. Die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Kredite betragen laut

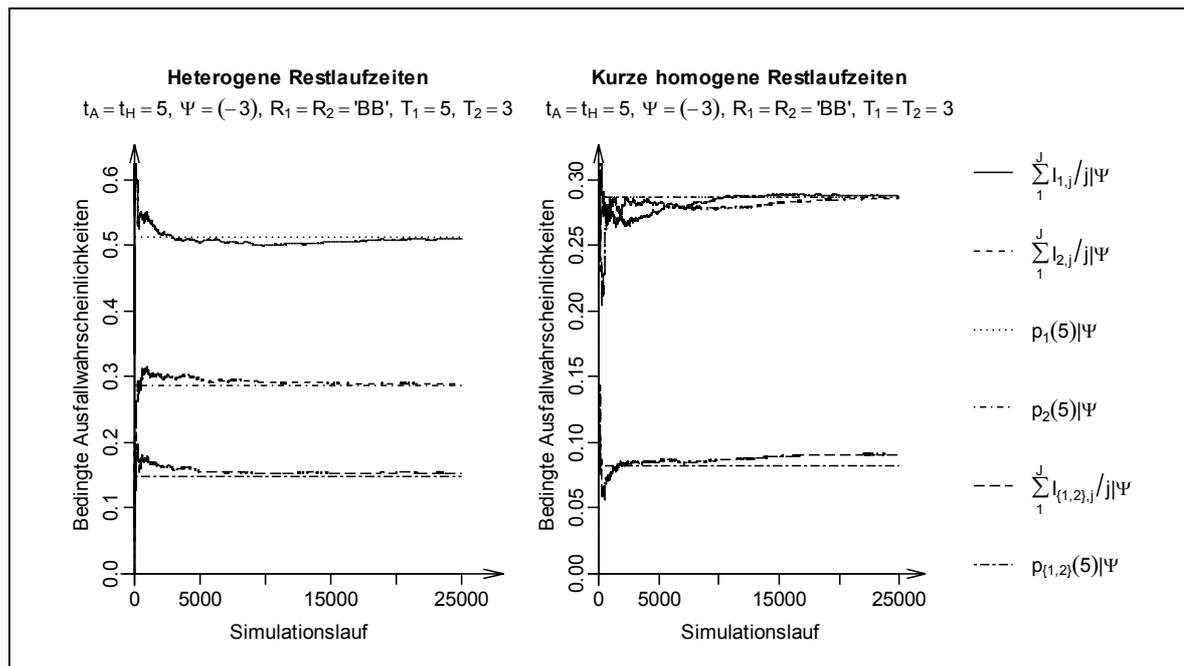
<sup>573</sup> Das Zeitgitter wurde mit 200 Werten pro Jahr äußerst fein gestaltet, um Simulationsfehler so gering wie möglich zu halten.

<sup>574</sup> Der Brückenendpunkt wurde so gewählt, dass die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten hinreichend groß waren, um Abweichungen der simulativen Wahrscheinlichkeiten von den analytischen Werten hinreichend genau zu erkennen.

<sup>575</sup> Vgl. Tab. 3-5 für die Ausfallshranken und Tab. 3-6 für die Faktorsensitivitäten.

<sup>576</sup> Vgl. P. Embrechts, C. Klüppelberg und T. Mikosch (2003), *Modelling extremal events*, S. 60-70.

Gleichung (3.111) für 3-jährige Restlaufzeiten 28,71 %. Während für die erste Kombination die Approximation der bedingten gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeit erfolgreich ist, werden für die zweite Kombination systematische Abweichungen deutlich. Der analytisch ermittelte, approximative Wert liegt, wenn auch nur geringfügig, unterhalb der tatsächlichen (simulativ ermittelten) Wahrscheinlichkeit. Ursache ist die positive Korrelation der beiden faktorendpunktbedingten Ability-to-Pay-Prozesse im Zeitabschnitt  $[0, g_{i,3}]$ . Die niedrigen Korrelationswerte im Zeitabschnitt  $[g_{i,3}, 5]$  kommen nicht zum tragen.



**Abb. 3-17: Abhängigkeit vs. Unabhängigkeit bedingter Ausfallereignisse bei kurzlaufenden Krediten**

Empirische (Simulationsverläufe) und analytische (horizontale Linien) faktorendpunktbedingte uni- und bivariate Ausfallwahrscheinlichkeiten eines „BB“-gerateten Kreditpaares, wobei links lediglich einer der beiden Kredite und rechts beide Kredite vor dem Risikohorizont auslaufen. Die analytischen bivariaten Ausfallwahrscheinlichkeiten sind unter der Unabhängigkeitsannahme ermittelt. Der Risikohorizont beträgt 5 Jahre. Die Rechnungen basieren auf den Credit Curves vom Typ B.

Basierend auf den Simulationsergebnissen sollen die bedingten Ausfallereignisse als unabhängig voneinander betrachtet werden. Approximativ werden im Weiteren bedingte gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeiten als Produkt der bedingten univariaten Ausfallwahrscheinlichkeiten gem. (3.82) und (3.111) ermittelt. Die Approximation büßt jedoch mit zunehmender Heterogenität der Restlaufzeiten im Referenzportfolio, insbesondere mit dem Auftreten sehr kurzer Restlaufzeiten, an Qualität ein.<sup>577</sup> Demgegenüber steigt die Qualität der Approximation mit zunehmender Heterogenität der Bonitäten der Kredite aufgrund divergierender Zeittransformationen.

<sup>577</sup> Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 394.

**36 Semi-analytische Modellierung der Ereignisverteilung eines Kreditportfolios**  
**361 Ereignis, gemeinsames Ereignis, gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit und Ereignisverteilung**

Ein *Ereignis* im hier behandelten Kontext ist der Ausfall eines einzelnen Kredites, respektive das Passieren der Ausfallschranke durch den Ability-to-Pay-Prozess. Der Eintritt des Ausfallereignisses im Zeitraum  $[0, t]$  wird durch den jeweiligen Ausfallindikator angezeigt:

$$I_i(t) = 1_{\{\tau_i \leq t\}} \quad \forall \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.122)$$

Als *gemeinsames Ereignis* wird der gemeinsame Ausfall mehrerer Kredite mit folgendem Indikator verstanden:

$$I_{\{i_1, \dots, i_n\}}(t) = 1_{\{\tau_{i_1} \leq t, \dots, \tau_{i_n} \leq t\}} \quad \forall \quad \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, N\} \quad \text{mit} \quad n \in [2, N]. \quad (3.123)$$

Die Wahrscheinlichkeiten gemeinsamer Ereignisse im Referenzportfolio ergeben sich aus der gemeinsamen Verteilungsfunktion der First-Passage-Zeiten. Bei der Formulierung sind die Ausfallkorrelationen sowie die unterschiedlichen Restlaufzeiten zu beachten:

**Definition 3-6 (Gemeinsame Verteilungsfunktion der First-Passage-Zeiten):** Sei  $\{\tau_{FP,i}\}_{i \in \{1, \dots, N\}}$  eine Menge von First-Passage-Zeiten mit den Verteilungsfunktionen  $F_{\tau_{FP,i}}(t)$  und  $t \geq 0$ . Dann ist die gemeinsame Verteilungsfunktion  $F_{\tau_{FP,\{i_1, \dots, i_n\}}}(t_1, \dots, t_n)$  für eine Teilmenge der First-Passage Zeiten  $\{\tau_{FP,i}\}_{i \in \{i_1, \dots, i_n\}}$  mit  $\{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, N\}$  und  $n \in [2, N]$  wie folgt definiert:

$$F_{\tau_{FP,\{i_1, \dots, i_n\}}}(t_1, \dots, t_n) = \Pr[\tau_{FP,i_1} \leq t_1, \dots, \tau_{FP,i_n} \leq t_n] \quad \text{mit} \quad t_1, \dots, t_n \geq 0. \quad (3.124)$$

Die *gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit* einer Teilmenge von Schuldtiteln lässt sich damit betrachtungszeitpunktabhängig unter Berücksichtigung der jeweiligen Restlaufzeiten über die gemeinsame Verteilungsfunktion der First-Passage-Zeiten darstellen:

$$p_{\{i_1, \dots, i_n\}}(t) = F_{\tau_{FP,\{i_1, \dots, i_n\}}}(\min(t, T_{i_1}), \dots, \min(t, T_{i_n})) \quad \text{mit} \quad t \geq 0. \quad (3.125)$$

Bei gegebenem systematischen Faktor  $\Psi_t$ , respektive der gegebenen Endpunkte der systematischen BROWNSchen Bewegungen  $B_{\Psi, g_{i,t}}$  sind die Ausfallzeiten  $\tau_i$ , respektive die Passage-Ereignisse der bedingten zeittransformierten Prozesse  $Y_{i,t}$ , mit der Unabhängigkeit der idiosynkratischen Faktoren  $\varepsilon_{i, g_{i,t}}$ , respektive der Unabhängigkeit der idiosynkratischen BROWNSchen Bewegungen  $B_{\varepsilon_{i, g_{i,t}}}$ , approximativ selbst unabhängig voneinander. Damit lässt sich die bedingte gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit wie folgt darstellen:

$$p_{\{i_1, \dots, i_n\}}(t) | \Psi \approx F_{\tau_{FP,i_1}}(\min(t, T_{i_1})) | \Psi \cdot \dots \cdot F_{\tau_{FP,i_n}}(\min(t, T_{i_n})) | \Psi. \quad (3.126)$$

Die Terme  $F_{\tau_{FP,i}}(\min(t, T_i))|\psi$  können nun unter Berücksichtigung der Zeittransformationen  $g_i(\cdot)$  sowie der zeitkonstanten Ausfallsschranken  $K_i$  durch die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t}|\psi$  substituiert werden. Dazu kommen grundsätzlich die beiden Gleichungen (3.82) (langlaufende Kredite) und (3.111) (kurzlaufende Kredite) in Betracht. Die Wahl erfolgt unter Beachtung der Definitionsbereiche beider Gleichungen. Während (3.82) für  $t \in (0, T_i]$  definiert ist, gilt (3.111) für  $t > T_i$ :

$$p_{\{i_1, \dots, i_n\}}(t)|\psi \approx p_{i_1}(t)|\psi \cdot \dots \cdot p_{i_n}(t)|\psi. \quad (3.127)$$

Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit<sup>578</sup> ergibt sich die unbedingte gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit durch Integration über alle möglichen Ausprägungen des systematischen Faktors  $\Psi_t$ , gewichtet mit den jeweiligen Werten der Dichtefunktion:<sup>579</sup>

$$p_{\{i_1, \dots, i_n\}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\tau_{FP}, \{i_1, \dots, i_n\}}(t)|u \cdot f_{SN}(u) \cdot du. \quad (3.128)$$

Für ein Kreditportfolio mit  $N$  Krediten ist die Anzahl der ausgefallenen Kredite  $N_{RP}$  bis zum Zeitpunkt  $t$  die Summe über alle Ausfallindikatoren  $I_{i,t}$ .<sup>580</sup>

$$N_{RP}(t) = \sum_{i=1}^N I_i(t) \quad \text{mit} \quad t \geq 0. \quad (3.129)$$

Die Kreditausfallzahl  $N_{RP,t}$  ist bezüglich des Zeitpunkts  $t_0$  eine Zufallsvariable. Entlang der Zeitachse betrachtet, stellt  $\{N_{RP,t}\}_{t \geq 0}$  einen Sprung-Prozess mit Sprüngen zu den jeweiligen Kreditausfallzeiten dar. Das Ausmaß der Sprünge ist pro ausgefallenem Kredit konstant eins.<sup>581</sup> Folglich kann  $N_{RP,t}$  ausschließlich Werte aus dem Bereich der natürlichen Zahlen annehmen. Die Verteilung von  $N_{RP,t}$  ist die *Ereignisverteilung des Kreditportfolios*:

**Definition 3-7 (Ereignisverteilung eines Kreditportfolios):**

$$F_{N_{RP,t}}(n) = \Pr[N_{RP,t} \leq n] \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.130)$$

Eine spezifische Ereigniszahl  $n$  kann durch verschiedene gemeinsame Ereignisse mit den dazugehörigen gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten verursacht werden. Um die Formulierung eines kombinatorischen Problems zu vermeiden, wird zur Quantifizierung von  $F_{N_{RP,t}}(n)$  auf ein Instrument zurückgegriffen, dass bereits bei der Formulierung von

<sup>578</sup> Vgl. Fn. 529.

<sup>579</sup> Die Vorgehensweise gleicht der von P. Schönbucher (2000), Factor models, S. 9 für das MERTON-Modell.

<sup>580</sup> Die Vorgehensweise verwenden auch J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 7 f.

<sup>581</sup> Für den im Anschluss zu modellierenden Verlustprozess gilt dies nur vereinfachend. Vgl. Abschnitt 37.

CREDITRISK+™ verwendet wurde. Hilfreich ist dabei, dass die Zufallsvariable  $N_{RP,t}$  ausschließlich Werte aus dem Bereich der natürlichen Zahlen annehmen kann:

**Definition 3-8 (Probability Generating Function, PGF):** Als (wahrscheinlichkeits)erzeugende Funktion der Verteilung einer Zufallsvariablen  $X$  mit ganzzahligen nichtnegativen (natürlichen) Werten bezeichnet man die Potenzreihe

$$G_X(z) = \sum_{x=0}^{\infty} \Pr[X = x] \cdot z^x. \quad (3.131)$$

Die Beziehung zwischen der erzeugenden Funktion von  $X$  und der Verteilung von  $X$  ist umkehrbar eindeutig. Damit lässt sich je nach Anwendungszweck entweder mit der Verteilung oder der erzeugenden Funktion arbeiten. Die erzeugende Funktion eines BERNOULLIVerteilten Ausfallindikators  $I_{i,t}$  bzw. eines bedingten Ausfallindikators  $I_{i,t} | \Psi$  ist:<sup>583</sup>

$$G_{I_{i,t}}(z) = (1 - p_i(t)) \cdot z^0 + p_i(t) \cdot z^1 \text{ bzw.} \quad (3.132)$$

$$G_{I_{i,t}}(z) | \Psi = (1 - p_i(t) | \Psi) \cdot z^0 + p_i(t) | \Psi \cdot z^1. \quad (3.133)$$

Die Variable  $z$  stellt lediglich ein Hilfskonstrukt dar. Die Exponenten von  $z$  zeigen die möglichen Ereignisse 0 und 1 an. Die Koeffizienten stellen die Eintrittswahrscheinlichkeiten der jeweiligen Ereignisse dar. Für erzeugende Funktionen gilt folgende Rechenregel:

**Satz 3-7 (PGF einer Summe von Zufallsvariablen):** Sind  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen mit natürlichen Werten, so gilt für die erzeugenden Funktionen zu  $X$ ,  $Y$  und  $X+Y$

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z). \quad (3.134)$$

Beweis:

*Bspw. U. Krengel (2003, S. 110).*

Mit Satz 3-7 ist die erzeugende Funktion der faktorbedingten Zufallsvariablen  $N_{RP} | \Psi$  im Zeitpunkt  $t$  als Summe der faktorbedingten BERNOULLIVerteilten Ausfallindikatoren  $I_{i,t} | \Psi$  approximativ durch das Produkt ihrer erzeugenden Funktionen  $G_{I_{i,t}}(z) | \Psi$  darstellbar.<sup>585</sup>

<sup>582</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden U. Krengel (2003), Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 107.

<sup>583</sup> Vgl. CSFB (1997), CR+™ Technical Document, S. 34 (Appendix A).

<sup>584</sup> Vgl. U. Krengel (2003), Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 110.

<sup>585</sup> Vgl. auch Vgl. U. Krengel (2003), Wahrscheinlichkeitstheorie, S. 110 und CSFB (1997), CR+™ Technical Document, S. 34 (Appendix A). CREDITRISK+ wird entgegen der Vorgehensweise in dieser Arbeit in einem weiteren Schritt die PGF der BERNOULLIVerteilung durch die PGF der POISSONverteilung approximieren. Vgl. überblickshalber M. Gordy (2000), Anatomy of credit risk models, S. 121-124.

$$G_{N_{RP,t}}(z)|\Psi \approx \prod_{i=1}^N G_{I_{i,t}}(z)|\Psi. \quad (3.135)$$

Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit<sup>586</sup> ergibt sich die unbedingte erzeugende Funktion durch Integration über alle möglichen Ausprägungen des systematischen Faktors  $\Psi$ , gewichtet mit den jeweiligen Werten der Dichtefunktion.<sup>587</sup> Mit (3.133) ergibt sich:

$$\begin{aligned} G_{N_{RP,t}}(z) &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N G_{I_{i,t}}(z)|u \cdot f_{SN}(u) \cdot du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^N (\bar{p}_i(t)|u + p_i(t)|u \cdot z) \cdot f_{SN}(u) \cdot du. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Für ein Portfolio mit  $N$  Krediten ist das Ergebnis eine Potenzreihe mit  $N+1$  Summanden. Die Exponenten von  $z$  geben jeweils die Anzahl der ausgefallenen Kredite an. Die Koeffizienten repräsentieren die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten.<sup>588</sup> Der Koeffizient der ersten Potenz  $z^0$  zeigt die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit und der Koeffizient der letzten Potenz  $z^N$  zeigt die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit aller Kredite an.

Zur Ermittlung der Koeffizienten im Rahmen von CREDITRISK+ schlägt CSFB ein rekursives Verfahren basierend auf der TAYLOR-Entwicklung der erzeugenden Funktion vor.<sup>589</sup> Dieses als PANJER-Rekursion<sup>590</sup> bekannte Verfahren ist jedoch für große Portfolios instabil.<sup>591</sup> Daher wurden in der Literatur zahlreiche Modifikationen vorgeschlagen.<sup>592</sup> Im vorliegenden Fall kommt erschwerend hinzu, dass das Integral (3.136) – anders als im CREDITRISK+-Modell<sup>593</sup>, in dem die charakteristische Funktion der BERNOULLIVerteilung durch die einer POISSONVerteilung approximiert wird und der Faktor einer Gammaverteilung folgt – nicht analytisch auswertbar ist. Als Alternativen werden daher die Verfahren des Sequential Probability Shiftings und der Inversen FOURIER-Transformation vorgestellt.

<sup>586</sup> Vgl. Fn. 529.

<sup>587</sup> Vgl. dazu auch J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 8 f.

<sup>588</sup> Die Summe aller Koeffizienten ergibt wieder eins.

<sup>589</sup> Vgl. CSFB (1997), CR+™ Technical Document, S. 38 (Appendix A).

<sup>590</sup> Die PANJER-Rekursion stellt ein Verfahren zur Ermittlung gemischter (POISSON-)Verteilungen dar. Vgl. H. Panjer (1981), Recursive evaluation of compound distributions, S. 23-25. Siehe auch H. Panjer und G. Willmot (1992), Insurance risk models, S. 139-147, 169-174 u. 193-201. Das CREDITRISK+ Modell basiert auf Gamma-POISSONVerteilungen (negative Binomialverteilung).

<sup>591</sup> Vgl. M. Gordy (2002), Saddlepoint approximation of CR+, S. 1341-1343.

<sup>592</sup> H. Haaf, O. Reiß und J. Schoenmakers (2004), Computation of CreditRisk+, S. 71-75 ermitteln die Koeffizienten der PGF mit Hilfe eines numerischen Rekursionsverfahrens, basierend auf Überlegungen zur TAYLOREntwicklung des Logarithmus der TAYLOREntwicklung der Potenzreihe. G. Giese (2003), Enhancing CreditRisk+, S. 74 f. bedient sich der Moment Generating Function (MGF) der Faktorverteilung zur Rekursiven Ermittlung der Koeffizienten der PGF. M. Gordy (2002), Saddlepoint approximation of CR+, S. 1343-1349 modelliert den Tail der Verlustverteilung mit Hilfe der Saddlepoint-Approximation. Siehe auch R. Martin, K. Thompson und C. Browne (2001), Taking to the saddle, S. 91-94; M. Melchiori (2004), CR+ by FFT, S. 16-18.

<sup>593</sup> Für eine Auswertung der PGF siehe CSFB (1997), CR+™ Technical Document, S. 45 (Appendix A).

### 362 Quantifizierung der Ereignisverteilung mit Hilfe des Sequential Probability Shiftings

Zur Ermittlung der Koeffizienten der (bedingten) erzeugenden Funktion wird eine Modifikation eines auf HULL & WHITE<sup>594</sup> zurückgehenden Verfahrens verwendet, das ursprünglich zur approximativen Ermittlung von Verlustverteilungen vorgeschlagen wurde. Die Modifikation sei ihrem Wesen nach im Folgenden als *Sequential Probability Shifting (SPS)* bezeichnet.

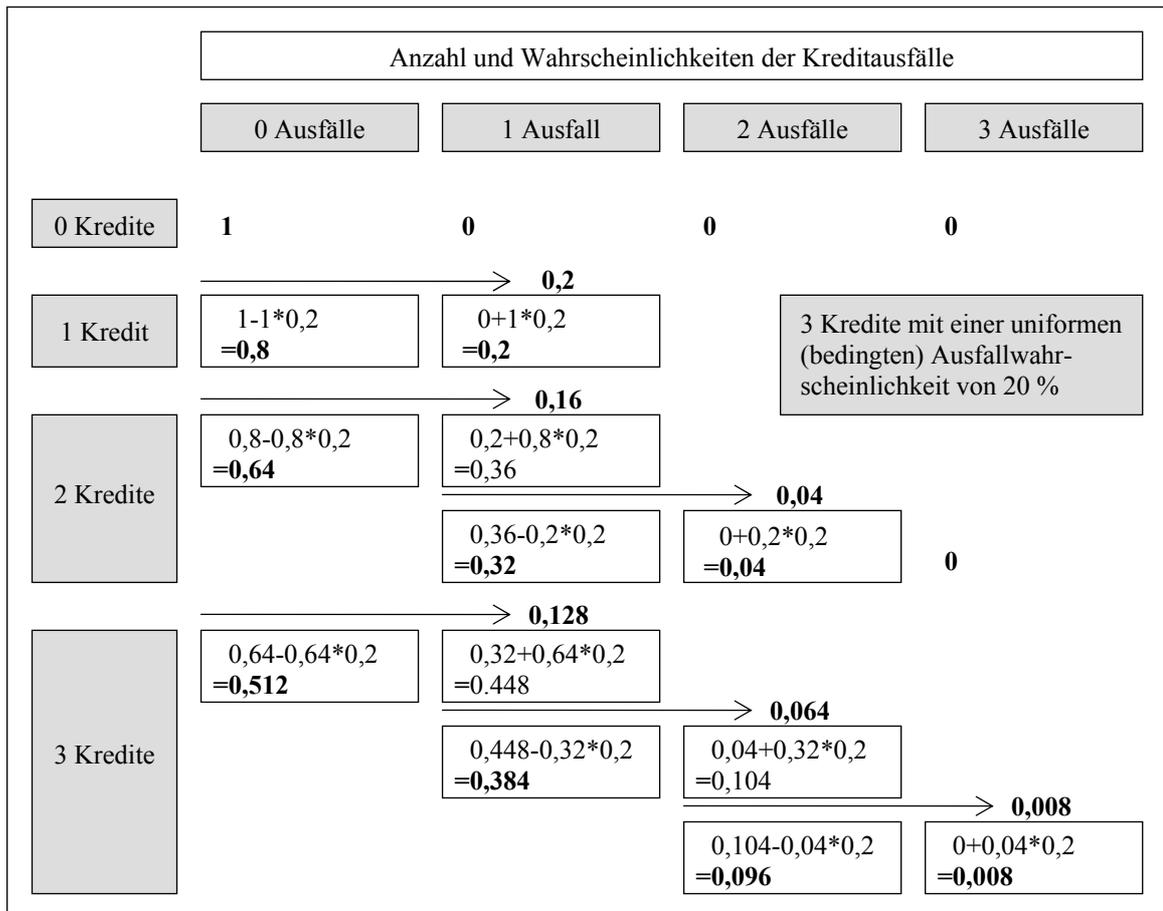


Abb. 3-18: Prinzip des Sequential Probability Shiftings

Ausgangspunkt des SPS ist ein leeres Portfolio. Die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse konzentriert sich dann auf den Wert null (vgl. Abb. 3-18). Sequentiell werden nun einzelne Kredite dem Portfolio hinzugefügt. Mit jedem Kredit wächst die erzeugende Funktion um eine Potenz, wobei sich kontinuierlich Wahrscheinlichkeitsmasse von geringen Ausfallzahlen – insbesondere von  $N_{RP,t}=0$  – auf höhere Ausfallzahlen verschiebt. Betrachten wir die bedingten erzeugenden Funktionen, lässt sich das Ausmaß des Probability Shiftings beim Hinzufügen eines einzelnen Kredites mit der Unabhängigkeitsannahme der bedingten Ausfallereignisse einfach durch Multiplikation der bedingten Wahrscheinlichkeiten bestimmen.

<sup>594</sup> Vgl. J. Hull und A. White (2004), Valuation of CDOs and CDSs, S. 11 f. u. 22 f.

Fügt man anhand des Beispiels in Abb. 3-18 zu einem Portfolio, bestehend aus zwei Krediten, einen dritten Kredit hinzu, bedarf es zunächst einer Korrektur der gemeinsamen Überlebenswahrscheinlichkeit  $Pr[N_{RP,t}=0|\Psi]$ , respektive des ersten Koeffizienten der PGF  $c_{N_{RP,t},1}|\Psi$ . Die Koeffizienten werden mit einem Index ( $k$ ) versehen, der den Fortschritt des Portfolioaufbaus anzeigt. Für das Hinzufügen des dritten Kredites nimmt  $k$  den Wert  $k=3$  an:

$$c_{N_{RP,t},1}^{(3)}|\Psi = \prod_i^3 \bar{p}_{i,t}|\Psi = (1-p_{3,t}|\Psi) \cdot \underbrace{\prod_i^2 \bar{p}_{i,t}|\Psi}_{c_{N_{RP,t},1}^{(2)}|\Psi} = c_{N_{RP,t},1}^{(2)}|\Psi - c_{N_{RP,t},1}^{(2)}|\Psi \cdot p_{3,t}|\Psi. \quad (3.137)$$

Durch die Korrektur des ersten Koeffizienten ( $0,128$ ) ist die Summe aller Koeffizienten nicht mehr eins. Deshalb wird die Korrektur zunächst dem nachfolgenden Koeffizienten hinzuaddiert:

$$c_{N_{RP,t},2}^{(3)}|\Psi = c_{N_{RP,t},2}^{(2)}|\Psi + c_{N_{RP,t},1}^{(2)}|\Psi \cdot p_{3,t}|\Psi. \quad (3.138)$$

Dadurch wird jedoch dem zweiten Koeffizienten zu viel Wahrscheinlichkeitsmasse zugeordnet. Er enthält nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der ersten beiden Kredite ausfällt ( $0,32$ ), wobei der dritte Kredit ausfallen oder nicht ausfallen kann, zuzüglich der verschobenen Wahrscheinlichkeit dafür, dass ausschließlich der dritte Kredit ausfällt ( $0,128$ ). Anhand einer Ausfallindikatorübersicht, enthält der zweite Koeffizient damit die Wahrscheinlichkeiten der folgenden (gemeinsamen) Ereignisse:<sup>595</sup>

$$\begin{array}{cccc|c} I_{1,t} & 1 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 \\ I_{2,t} & 0 & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 \\ I_{3,t} & 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{array}$$

Es wird deutlich, dass der zweite Koeffizient nun auch Wahrscheinlichkeiten für Ereignisse enthält, die mehr als nur einen Ausfall beinhalten (hervorgehoben). Die notwendige Korrektur ergibt sich gerade aus dem Produkt des zweiten Koeffizienten vor dem Hinzufügen des dritten Kredites, d. h. der Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der beiden ersten Kredite ausfällt ( $0,32$ ), multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit dafür, dass darüber hinaus auch der dritte, neu hinzugefügte Kredit ausfällt ( $0,2$ ):<sup>596</sup>

$$c_{N_{RP,t},2}^{(3)}|\Psi := c_{N_{RP,t},2}^{(2)}|\Psi - c_{N_{RP,t},2}^{(2)}|\Psi \cdot p_{3,t}|\Psi. \quad (3.139)$$

<sup>595</sup> Rechts von der gestrichelten Linie ist das verschobene Ereignis angegeben.

<sup>596</sup> Es sei darauf hingewiesen, dass (3.139) als sequentielle Zuweisung und nicht als Gleichung zu lesen ist. Danach wird der Variablen  $c_{N_{RP,t},2}^{(3)}$  unter Berücksichtigung des in ihr enthaltenden momentanen Wertes ein neuer Wert zugewiesen.

Durch die Korrektur des zweiten Koeffizienten  $(0,064)$ , ist die Summe aller Koeffizienten erneut kleiner als eins. Deshalb wird die Korrektur wiederum dem nachfolgenden Koeffizienten hinzuaddiert, womit nun zuviel Wahrscheinlichkeitsmasse auf dem dritten Koeffizienten liegt  $(0,104)$ . Die Ausfallindikatorübersicht macht deutlich, dass ein Ereignis mit mehr als zwei Ausfällen enthalten ist:<sup>597</sup>

$$\begin{array}{ccc|cc} I_{1,t} & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 \\ I_{2,t} & 1 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ I_{3,t} & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \end{array}$$

Eine abschließende Korrektur führt schließlich zum Koeffizienten der neu hinzugekommenen Potenz für drei Kreditausfälle. Mit jedem neuen Kredit wird, beginnend mit dem ersten Koeffizienten  $j=1$ , die gesamte erzeugende Funktion, dem allgemeinen Ablaufschema

$$\begin{array}{l} (a) \quad c_{N_{RP,t},j}^{(k)} | \Psi := c_{N_{RP,t},j}^{(k-1)} | \Psi + c_{N_{RP,t},j-1}^{(k-1)} | \Psi \cdot p_{i_k,t} | \Psi \\ (b) \quad c_{N_{RP,t},j}^{(k)} | \Psi := c_{N_{RP,t},j}^{(k)} | \Psi - c_{N_{RP,t},j}^{(k-1)} | \Psi \cdot p_{i_k,t} | \Psi \end{array} \quad \forall \quad j > 1 \quad (3.140)$$

mit dem Startwert

$$c_{N_{RP,t},1}^{(k)} | \Psi := c_{N_{RP,t},1}^{(k-1)} | \Psi - c_{N_{RP,t},1}^{(k-1)} | \Psi \cdot p_{i_k,t} | \Psi \quad (3.141)$$

folgend, einem Sequential Probability Shifting unterworfen.<sup>598</sup> Wenn alle Kredite berücksichtigt wurden, ist die bedingte erzeugende Funktion  $G_{N_{RP,t}}(z) | \Psi$  das Ergebnis. Abschließend ist gem. (3.136) über alle möglichen Ausprägungen des systematischen Faktors  $\Psi_t$ , gewichtet mit den jeweiligen Werten der Dichtefunktion, zu integrieren. Auf jeden einzelnen Koeffizienten  $j$  der erzeugenden Funktion bezogen bedeutet dies:<sup>599</sup>

$$c_{N_{RP,t},j}^{(N)} = \int_{-\infty}^{+\infty} c_{N_{RP,t},j}^{(N)} | u \cdot f_{SN}(u) \cdot du \quad \forall \quad j = 1, \dots, N+1. \quad (3.142)$$

Das SPS ist leicht verständlich und einfach zu implementieren. Darüber hinaus ist es mit diesem Verfahren möglich, die Veränderungen der gemeinsamen Ereignisverteilung durch Hinzufügung einzelner Kredite zu studieren. Nachteilig ist, dass stets die gesamte Verteilung, beginnend bei  $Pr[N_{RP,t}=0 | \Psi]$ , zu ermitteln ist. Die separate Berechnung und Analyse einzelner Verteilungsausschnitte ist nicht möglich.

<sup>597</sup> Rechts von der gestrichelten Linie sind die verschobenen Ereignisse angegeben.

<sup>598</sup> Das Ablaufschema unterscheidet sich leicht von demjenigen in [J. Hull und A. White \(2004\)](#), Valuation of CDOs and CDSs, S. 22. M. E. sind die dort angegebenen „updating formulas“ ohne eine genauere Indizierung nicht korrekt. Man beachte insbesondere die Indizierung über  $j$  und  $k$  bzw.  $(j-1)$  und  $(k-1)$  in (3.140).

<sup>599</sup> Die Integration kann mit numerischen Standardmethoden erfolgen.

### 363 Quantifizierung der Ereignisverteilung sowie von Ereignisverteilungsausschnitten mit Hilfe der Inversen FOURIER-Transformation

Die Bestimmung der Ereignisverteilung mit Hilfe des Sequential Probability Shiftings soll in diesem Abschnitt ergänzt werden um ein Verfahren, das es ermöglicht, einzelne Ausschnitte aus der Ereignisverteilung bzw. eine spezifische Ausfallzahl gezielt zu modellieren. Einen Algorithmus von REIB aufgreifend, besteht die grundlegende Idee darin, die diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion  $Pr[N_{RP,t}=n|\Psi]$  durch eine stetige Dichtefunktion  $f_X(x)|\Psi$  zu approximieren. Eine Approximation ist Erfolg versprechend, da die Wahrscheinlichkeitsfunktion  $Pr[N_{RP,t}=n|\Psi]$  aufgrund der hohen Kreditanzahl „fast“ stetig ist bzw. versteigert werden kann.<sup>600</sup> Basis der Approximation bilden charakteristische Funktionen:

**Definition 3-9 (Charakteristische Funktion, CF):** Ist  $X$  eine Zufallsvariable, so ist deren charakteristische Funktion  $\varphi_X(t)$  definiert durch die Transformation:<sup>601</sup>

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (3.143)$$

wobei  $i$  die imaginäre Einheit mit  $i = \sqrt{-1}$ <sup>603</sup> darstellt.

Abweichend zu anderen Transformationen existiert die charakteristische Funktion immer.<sup>604</sup> Dem Eindeigkeitstheorem nach gilt  $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$  für alle  $x$ , falls  $\varphi_{X_1}(t) = \varphi_{X_2}(t)$  für alle  $t$  gilt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen ist demnach durch die charakteristische Funktion eindeutig bestimmt.<sup>605</sup>

Falls  $X$  eine diskrete Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion  $Pr[X=x]$  bzw. eine stetige Zufallsvariable mit der Dichtefunktion  $f_X(x)$  ist, so lautet die charakteristische Funktion dieser Zufallsvariablen:

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} Pr[X = x_k] \cdot e^{itx_k} \quad \text{bzw.} \quad (3.144)$$

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{itx} dx. \quad (3.145)$$

<sup>600</sup> Vgl. O. Reiß (2003), Fourier inversion algorithms, S. 11.

<sup>601</sup> Vgl. B. Baumeister (1989), Charakteristische Funktionen, S. 3.

<sup>602</sup> Die Exponentialfunktion einer komplexen Zahl ist, basierend auf den TAYLORentwicklungen der Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion, gem. der sog. EULERSchen Identität wie folgt definiert:

$$e^{itX} = \cos(tX) + i \sin(tX).$$

<sup>603</sup> Für eine kurze Einführung in die komplexen Zahlen siehe E. Chu und A. George (2000), FFT, S. 3-5.

<sup>604</sup> Vgl. W. Näther et al. (2003), Stochastik, S. 45.

<sup>605</sup> Eine Übersicht charakteristischer Funktionen findet sich in W. Näther et al. (2003), Stochastik, S. 46.

<sup>606</sup> Vgl. B. Baumeister (1989), Charakteristische Funktionen, S. 4 f.

Die charakteristische Funktion  $\varphi_X(t)$  für diskrete Zufallsvariablen besitzt große Ähnlichkeit mit der (wahrscheinlichkeits)erzeugenden Funktion  $G_X(z)$ . Substituiert man in (3.131)  $z$  durch  $\exp(it)$ , folgt (3.144). Es gilt  $\varphi_X(t) = G_X(e^{it})$ .<sup>607</sup>

Damit ergibt sich für die charakteristische Funktion eines BERNOULLIVerteilten Ausfallindikators  $I_{i,t}$  bzw. eines bedingten Ausfallindikators  $I_{i,t}|\Psi$ :<sup>608</sup>

$$\varphi_{I_{i,t}}(s) = (1 - p_i(t)) + p_i(t) \cdot e^{js} \text{ bzw.} \quad (3.146)$$

$$\varphi_{I_{i,t}}(s)|\Psi = (1 - p_i(t)|\Psi) + p_i(t)|\Psi \cdot e^{js}. \quad (3.147)$$

Bezüglich der Summe von Ausfallindikatoren gilt – wie bereits bei den erzeugenden Funktionen diskreter Zufallsvariablen<sup>609</sup> – auch für die charakteristischen Funktionen die folgende Rechenregel:<sup>610</sup>

**Satz 3-8 (CF einer Summe zweier Zufallsvariablen, Faltungssatz):** Sind  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen, so gilt für die charakteristischen Funktionen zu  $X$ ,  $Y$  und  $X+Y$ :

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t). \quad (3.148)$$

Beweis:

*Bspw. W. Näther (2003, S. 47).*

Damit erhält man für die bedingte charakteristische Funktion der Anzahl ausgefallener Kredite  $N_{RP,t}$  bis zum Zeitpunkt  $t$ :

$$\varphi_{N_{RP,t}}(s)|\Psi \approx \prod_{i=1}^N \varphi_{I_{i,t}}(s)|\Psi. \quad (3.149)$$

Die charakteristische Funktion  $\varphi_X(t)$  für stetige Zufallsvariablen ist identisch mit der *FOURIER-Transformation*. Das verwendete Integral wird dementsprechend als *FOURIER-Integral* bezeichnet<sup>611</sup>. Die Dichtefunktion  $f_X(x)$  ergibt sich durch die Umkehrung der *FOURIER-Transformation*:

<sup>607</sup> Vgl. W. Näther et al. (2003), Stochastik, S. 50.

<sup>608</sup> Vgl. zur charakteristischen Funktion einer BERNOULLIVerteilten Zufallsvariablen auch W. Näther et al. (2003), Stochastik, S. 46.

<sup>609</sup> Vgl. Satz 3-7.

<sup>610</sup> Der Faltungssatz erstreckt sich auch auf die stetigen Zufallsvariablen.

<sup>611</sup> Zur Definition bzw. zu Definitionsvarianten siehe A. Zayed (1996), Function transformations, S. 222 f.

**Satz 3-9 (Inversionstheorem):** Ist die charakteristische Funktion  $\varphi_X(t)$  einer stetigen Zufallsvariablen  $X$  absolut integrierbar<sup>612</sup>, dann besitzt die Zufallsvariable  $X$  die Dichtefunktion

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_X(t) e^{-itx} dt. \quad (3.150)$$

Beweis:

*Bspw. B. Baumeister (1989, S. 22 f.).*

Wäre die charakteristische Funktion  $\varphi_{N_{RP,t}}(s)|\Psi$  integrierbar, könnte die bedingte Wahrscheinlichkeitsfunktion zur diskreten Zufallsvariablen  $N_{RP,t}$  durch die bedingte Dichtefunktion  $f_X(x)|\Psi$  der stetigen Zufallsvariablen  $X$  analytisch approximiert werden. An die Stelle der analytischen Rechnung muss jedoch ein approximatives Gleichungssystem treten.

Dabei ist hilfreich, dass charakteristische Funktionen diskreter Zufallsvariablen mit Ausprägungen aus der Menge der ganzen Zahlen auf dem Intervall  $[0, 2\pi)$  periodisch sind.<sup>613</sup>

**Satz 3-10 (Periodizität):** Für jede charakteristische Funktion  $\varphi_X(t)$  mit  $X \in \mathbb{Z}$  gilt:

$$\varphi_X(t + 2\pi) = \varphi_X(t) \quad \forall \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.151)$$

Beweis:<sup>614</sup>

*Mit Hilfe der EULERSchen Identität lässt sich schreiben:*

$$\begin{aligned} \varphi_X(t + 2\pi) &= E\left(e^{i(t+2\pi)X}\right) \\ &= E\left(\cos X(t + 2\pi) + i \sin X(t + 2\pi)\right) \\ &= E\left(\cos(Xt + X2\pi) + i \sin(Xt + X2\pi)\right). \end{aligned} \quad (3.152)$$

*Mit der Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion ergibt sich für  $X \in \mathbb{Z}$ :*

$$\begin{aligned} \varphi_X(t + 2\pi) &= E(\cos Xt + i \sin Xt) \\ &= E\left(e^{itX}\right) \\ &= \varphi_X(t). \end{aligned} \quad (3.153)$$

<sup>612</sup> Eine Funktion  $f(x)$  ist absolut integrierbar, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

Vgl. B. Baumeister (1989), Charakteristische Funktionen, S. 22. Siehe auch O. Reiß (2003), Fourier inversion algorithms, S. 9.

<sup>613</sup> Sämtliche Informationen über die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer solchen Zufallsvariable können somit einem beliebigen Intervall der Länge  $2\pi$  entnommen werden.

<sup>614</sup> Einen ähnlichen Beweis liefert B. Baumeister (1989), Charakteristische Funktionen, S. 5 f. Aus ihrer Beweisführung kommt jedoch nicht die Bedeutung der ganzen Zahlen für die Periodizität zum Ausdruck.

Zur Approximation der bedingten, diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung  $Pr[N_{RP}=n|\Psi]$  für den Zeitpunkt  $t$  durch eine stetige Dichtefunktion  $f_X(x)|\Psi$  wird nun gefordert, dass für eine endliche Menge reeller Zahlen  $s_k$  mit  $k=0,1,2,\dots$  die charakteristische Funktion  $\varphi_{X(\cdot)}|\Psi$  mit der charakteristischen Funktion  $\varphi_{N_{RP,t}(\cdot)}|\Psi$  übereinstimmt. Die reellen Zahlen  $s_k$  werden mit Blick auf die Periodizität der charakteristischen Funktionen dem Intervall  $[0,2\pi)$  entnommen.<sup>615</sup> Zur Vereinfachung wird das Intervall  $[0,2\pi)$  in  $(S-1)$  äquidistante Abschnitte unterteilt, womit man  $S$  Approximationspunkte  $k\Delta s$  erhält:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)|\Psi e^{j(k\cdot\Delta s)x} dx = \varphi_{N_{RP,t},k}(k\cdot\Delta s)|\Psi \quad \text{für } k=0,\dots,S-1 \quad (3.154)$$

wobei:

$$\Delta s = \frac{2\pi}{S}. \quad (3.155)$$

Die Werte der bedingten charakteristischen Funktion  $\varphi_{N_{RP,t},k}(k\Delta s)|\Psi$  sind gem. (3.149) i. V. m. (3.147) für alle  $k=0,\dots,S-1$  errechenbar.<sup>616</sup> Somit lässt sich ein Gleichungssystem aufbauen, mit dessen Hilfe die Funktionswerte von  $f_X(\cdot)|\Psi$  an  $S$  verschiedenen Stellen ermittelt werden können, ohne die analytische Form von  $f_X(x)|\Psi$  explizit kennen zu müssen. Da im vorliegenden Fall maximal  $N$  Kredite ausfallen können und folglich  $N+1$  gemeinsame Ereignisse denkbar sind, soll vorerst gelten:  $S=N+1$ .

Das Gleichungssystem leitet sich aus der Approximation des FOURIER-Integrals (3.145) ab. Dabei ist davon auszugehen, dass die unbekannte Dichtefunktion  $f_X(x)|\Psi$  außerhalb des Intervalls  $[0,N+1]$  verschwindet.<sup>617</sup> Das Intervall  $[0,N+1]$  wird in  $S$  äquidistante Abschnitte unterteilt, wobei für  $S=N+1$  gilt:  $\Delta x=1$ . Für ein beliebiges  $s_k$  mit  $s_k=k\Delta s$  gilt näherungsweise:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) e^{js_k x} dx \approx \sum_{l=0}^{S-1} f_X(l\cdot\Delta x) \cdot e^{js_k(l\cdot\Delta x)} \cdot \Delta x \quad \forall \quad k=0,\dots,S-1. \quad (3.156)$$

Mit der zentralen Forderung (3.154) und  $\tilde{S} = S - 1$  ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} e^{j(0\Delta s)(0\Delta x)} & e^{j(0\Delta s)(1\Delta x)} & \dots & e^{j(0\Delta s)(\tilde{S}\Delta x)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(\tilde{S}\Delta s)(0\Delta x)} & e^{j(\tilde{S}\Delta s)(1\Delta x)} & \dots & e^{j(\tilde{S}\Delta s)(\tilde{S}\Delta x)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_X(0\Delta x)|\Psi \\ \vdots \\ f_X(\tilde{S}\Delta x)|\Psi \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \varphi_{N_{RP,t}}(0\Delta s)|\Psi \\ \vdots \\ \varphi_{N_{RP,t}}(\tilde{S}\Delta s)|\Psi \end{pmatrix}. \quad (3.157)$$

<sup>615</sup> Neben dem Intervall  $[0,2\pi)$  wäre auch das Intervall  $[-\pi, \pi)$  denkbar. Vgl. E. Chu und A. George (2000), FFT, S. 12, Formel (65).

<sup>616</sup> Zur Vermeidung von Missverständnissen sei erwähnt, dass man  $S$  komplexe Zahlen erhält.

<sup>617</sup> Vgl. O. Reiß (2003), Fourier inversion algorithms, S. 11 f.

Zur Lösung des Gleichungssystems bedarf es der Inversen der Abbildungsmatrix. Aufgrund ihrer besonderen Form gilt:<sup>618</sup>

$$\begin{pmatrix} e^{-j(0\Delta s)(0\Delta x)} & \dots & e^{-j(0\Delta s)(\tilde{S}\Delta x)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(\tilde{S}\Delta s)(0\Delta x)} & \dots & e^{-j(\tilde{S}\Delta s)(\tilde{S}\Delta x)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{j(0\Delta s)(0\Delta x)} & \dots & e^{j(0\Delta s)(\tilde{S}\Delta x)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(\tilde{S}\Delta s)(0\Delta x)} & \dots & e^{j(\tilde{S}\Delta s)(\tilde{S}\Delta x)} \end{pmatrix} = \text{diag}(S). \quad (3.158)$$

Dementsprechend ergibt sich für die Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} f_X(0\Delta x)|\psi \\ \vdots \\ f_X(\tilde{S}\Delta x)|\psi \end{pmatrix} \approx \frac{1}{S} \begin{pmatrix} e^{-j(0\Delta s)(0\Delta x)} & \dots & e^{-j(0\Delta s)(\tilde{S}\Delta x)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(\tilde{S}\Delta s)(0\Delta x)} & \dots & e^{-j(\tilde{S}\Delta s)(\tilde{S}\Delta x)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_{N_{RP,t}}(0\Delta s)|\psi \\ \vdots \\ \varphi_{N_{RP,t}}(\tilde{S}\Delta s)|\psi \end{pmatrix}. \quad (3.159)$$

Folglich kann die bedingte Wahrscheinlichkeit einer spezifischen Ausfallzahl  $n=0,1,2,\dots,N$  und somit auch ein Ausschnitt aus der Ereignisverteilung unter Berücksichtigung von  $S=N+1$ ,  $\Delta s=2\pi/S$  sowie  $\Delta x=1$  wie folgt ermittelt werden:<sup>619</sup>

$$\Pr[N_{RP,t} = n]|\psi \approx \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N \left( e^{-j \cdot \frac{2\pi kn}{N+1}} \cdot \varphi_{N_t}(k \cdot \Delta s) | \psi \right) \quad \text{für } n = 0, \dots, N. \quad (3.160)$$

Der Grad der Approximation kann dadurch erhöht werden, dass die Anzahl  $S$  der Approximationspunkte  $s_k$  verringert wird. Dies geht einher mit einer Verringerung der Lösungspunkte. Darüber hinaus ist zu beachten, dass mit einer anderen charakteristischen Funktion (3.149) gearbeitet wird. Fließen nicht alle Ereignisse in die Berechnung ein, ändert sich die Periodizität der charakteristischen Funktion. Zur Verdeutlichung nehme die Zufallsvariable  $X$  Werte aus einer Menge äquidistanter reeller Zahlen an. Dann ergibt sich für die Periodizität ihrer charakteristischen Funktion unter Berücksichtigung von  $Y=X/\Delta x \in \mathbb{Z}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= E(\cos Xt + i \sin Xt) = E(\cos(Xt + Y2\pi) + i \sin(Xt + Y2\pi)) \\ &= E\left(\cos X\left(t + \frac{2\pi}{\Delta x}\right) + i \sin X\left(t + \frac{2\pi}{\Delta x}\right)\right) \\ &= \varphi_X\left(t + \frac{2\pi}{\Delta x}\right). \end{aligned} \quad (3.161)$$

<sup>618</sup> Vgl. E. Chu und A. George (2000), FFT, S. 5-8.

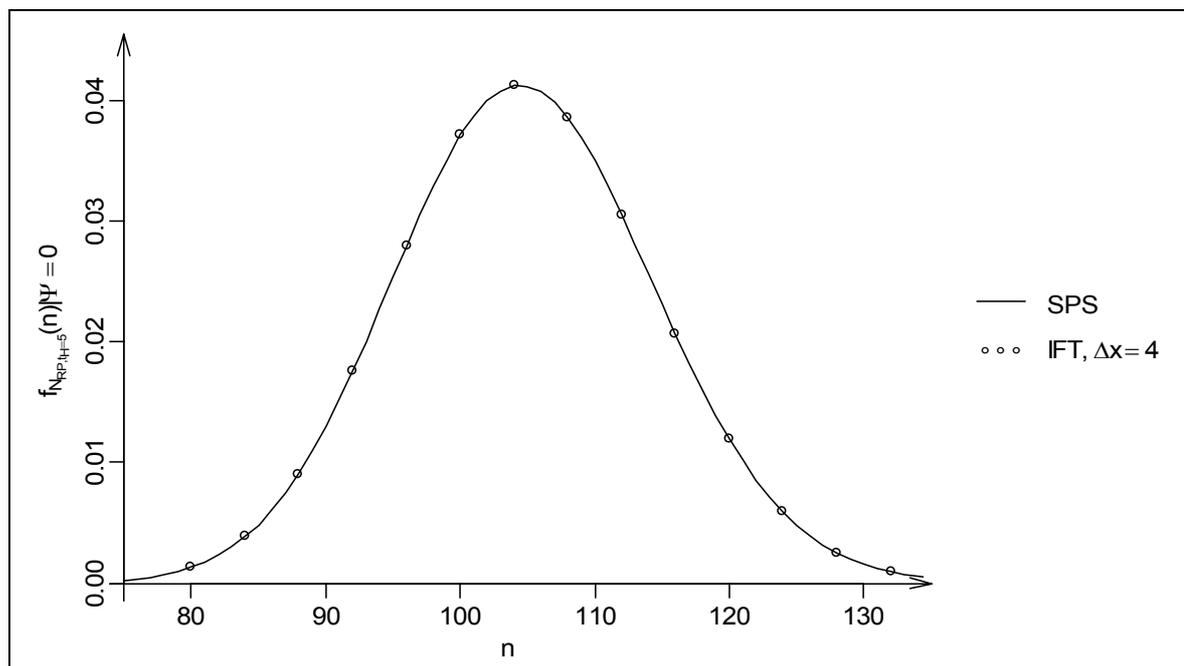
<sup>619</sup> Das Ergebnis sollte gem. (3.150) eine reelle Zahl sein. Aufgrund der Approximation erhält man jedoch tatsächlich komplexe Zahlen. Da jedoch die imaginären Teile verschwindend klein sind und somit die Distanzen zu den entsprechenden reellen Zahlen vernachlässigbar sind, wurden die imaginären Teile abgeschnitten. Vgl. zur Distanz zwischen reellen und komplexen Zahlen E. Chu und A. George (2000), FFT, S. 3-5.

Wird die Menge der Approximationspunkte verringert und  $\Delta x$  erhöht, müssen somit die reellen Zahlen  $s_k$  für die Approximation (3.154) dem Intervall  $[0, 2\pi/\Delta x)$  entnommen werden.<sup>620</sup> Die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $l \cdot \Delta x$  wird für  $S \neq N+1$ ,  $\Delta s = 2\pi/(S\Delta x)$  sowie  $\Delta x = (N+1)/S$  als Punkt auf der (unbekannten) Dichte  $f_X(x)|\Psi$  ermittelt:

$$f_X(l \cdot \Delta x)|\Psi \approx \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} \left( e^{-j \cdot \frac{2\pi k l}{S}} \cdot \varphi_{N_t}(k \cdot \Delta s) \right) \quad \text{für } l = 0, \dots, S-1 \quad (3.162)$$

wobei :

$$\Delta s = \frac{2\pi}{S\Delta x}. \quad (3.163)$$



**Abb. 3-19: Sequential Probability Shifting vs. Inverse FOURIER-Transformation**

Bedingte Ereignisverteilung des Referenzportfolios<sup>621</sup> für den Risikohorizont von 5 Jahren, ermittelt mit Hilfe des Sequential Probability Shiftings (SPS). Zum Vergleich wurde jeder vierte Punkt mit der Inversen FOURIER-Transformation (IFT) ermittelt:  $N=2916$ ,  $S=N/4+1=730$ ,  $\Delta s=2\pi/(S\Delta x)$  sowie  $\Delta x=(N+1)/S=4$  für  $l=20, \dots, 34$ . Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S. Der systematische Faktor  $\Psi_{t_H}$  ist null.

In Abb. 3-19 wurde (vorgreifend) für den systematischen Faktor  $\Psi_{t_H}=0$  die bedingte Ereignisverteilung für das im nachfolgenden Abschnitt modellierte Referenzportfolio mit Hilfe des Sequential Probability Shiftings sowie der Inversen FOURIER-Transformation ermittelt. Die eingezeichneten Punkte basieren auf der Formel (3.162) wobei nur jede vierte Ausfallzahl in die Berechnungen eingeflossen ist. Obwohl die Informationsbasis deutlich geringer ist, sind kaum Approximationsfehler ersichtlich. Damit eignet sich das Verfahren der IFT für überschlägige Berechnungen im Zuge einer Portfoliozusammenstellung.

<sup>620</sup> Vgl. auch die Vorgehensweise von O. Reiß (2003), Fourier inversion algorithms, S. 11 f.

<sup>621</sup> Vgl. zur Modellierung des Referenzportfolios Abschnitt 41.

**37 Semi-analytische Modellierung der Verlustverteilung eines Kreditportfolios**  
**371 Verlust, gemeinsamer Verlust und Verlustverteilung**

Der Verlust  $L$ , resultierend aus dem Ausfall eines einzelnen Kredites  $i$  innerhalb des betrachteten Zeitraums  $[0, t]$ , ermittelt sich mit Hilfe des Ausfallindikators  $I_{i,t}$  gem. (3.122) unter Berücksichtigung des Nominalwertes  $D_i$  sowie der (konstanten) Recovery Rate  $\delta_i$ :

$$L_i(t) = D_i \cdot (1 - \delta_i) \cdot I_i(t). \quad (3.164)$$

Als gemeinsamer Verlust wird der Verlust aus dem Ausfall mehrerer Kredite verstanden:

$$L_{\{i_1, \dots, i_n\}}(t) = \sum_{j=1}^n D_{i_j} \cdot (1 - \delta_{i_j}) \cdot I_{i_j}(t) \quad \forall \quad \{i_1, \dots, i_n\} \subseteq \{1, \dots, N\}. \quad (3.165)$$

Bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit einer spezifischen Verlusthöhe ist zu berücksichtigen, dass diese Höhe u. U. durch mehrere Kreditausfallkombinationen bewirkt werden kann. Folglich wären die Wahrscheinlichkeitsfunktionen aller in Frage kommenden gemeinsamen Ausfallindikatoren (3.123), entsprechend den Gleichungen (3.124) bis (3.128) auszuwerten.<sup>623</sup> Um die Formulierung eines kombinatorischen Problems zu vermeiden, soll auch bei der Ermittlung der Verlustverteilung des Referenzportfolios auf die Instrumente der erzeugenden und charakteristischen Funktionen zurückgegriffen werden. Zuvor soll jedoch eine formelle Definition der Verlustverteilung erfolgen:

**Definition 3-10 (Verlustverteilung eines Kreditportfolios) :**

$$F_{L_{RP,t}}(l) = \Pr[L_{RP,t} \leq l] \quad \forall \quad l \in \left[ 0, \sum_{i=1}^N D_i \right]. \quad (3.166)$$

Entstammen die Nominalwerte  $D_i$  – bzw. im Falle einer konstanten Recovery Rate  $\delta_i$  der Verlust  $D_i(1-\delta_i)$  – der Menge der natürlichen Zahlen, kann zur Ermittlung der Verteilungsfunktion auf das Instrument der (wahrscheinlichkeits)erzeugenden Funktion<sup>624</sup> zurückgegriffen werden.<sup>625</sup> Als Verfahren zur Ermittlung der Koeffizienten wird im Folgenden auf eine Modifikation des Sequential Probability Shiftings zurückgegriffen. Im allgemeinen Fall, insbesondere dann, wenn die Recovery Rate als Zufallsvariable<sup>626</sup> modelliert werden soll, ist das Instrument der charakteristischen Funktion heranzuziehen. Als Verfahren zur Ermittlung der Verlustverteilung dient die Inverse FOURIER-Transformation.

<sup>622</sup> Vgl. auch J. Gregory und J.-P. Laurent (2004), Beste Überlebenschancen, S. 35 f.

<sup>623</sup> Vgl. Abschnitt 361.

<sup>624</sup> Vgl. Definition 3-8.

<sup>625</sup> Ggf. können die Verluste auf die nächste natürliche Zahl gerundet werden.

<sup>626</sup> J. Gregory und J.-P. Laurent (2004), Beste Überlebenschancen, S. 37 modellieren die Recovery Rate mit Hilfe eine Beta-Verteilung.

### 372 Modifikation des Sequential Probability Shiftings

In diesem Abschnitt wird von einer konstanten Recovery Rate  $\delta_i$  sowie von einem ganzzahligen, nichtnegativen Verlust  $D_i(1-\delta_i)$  ausgegangen. Unter diesen Voraussetzungen stellen sich die erzeugende Funktionen des Verlusts  $L_{i,t}$  und des bedingten Verlusts  $L_{i,t}|\Psi$  gem. (3.131) wie folgt dar:

$$G_{L_{i,t}}(z) = (1 - p_i(t)) + p_i(t) \cdot z^{D_i(1-\delta_i)} \quad \text{und} \quad (3.167)$$

$$G_{L_{i,t}}(z)|\Psi = (1 - p_i(t)|\Psi) + p_i(t)|\Psi \cdot z^{D_i(1-\delta_i)}. \quad (3.168)$$

Mit Satz 3-7 lässt sich die erzeugende Funktion der faktorbedingten Zufallsvariablen  $L_{RP}|\Psi$  im Zeitpunkt  $t$  als Summe der faktorbedingten BERNOULLIVerteilten Kreditverluste  $L_{i,t}|\Psi$  approximativ durch das Produkt ihrer erzeugenden Funktionen  $G_{L_{i,t}}(z)|\Psi$  darstellen:

$$G_{L_{RP,t}}(z)|\Psi \approx \prod_{i=1}^N G_{L_{i,t}}(z)|\Psi. \quad (3.169)$$

Nach der Formel der totalen Wahrscheinlichkeit<sup>627</sup> ergibt sich die unbedingte, erzeugende Funktion durch Integration über alle möglichen Ausprägungen des systematischen Faktors  $\Psi_t$ , gewichtet mit den jeweiligen Werten der Dichtefunktion.<sup>628</sup> Für ein Referenzportfolio mit  $N$  Krediten ist eine Potenzreihe mit max.  $\sum D_i(1-\delta_i) + 1$  Summanden<sup>629</sup> das Ergebnis.<sup>630</sup> Die Exponenten von  $z$  geben jeweils die Portfolioverlusthöhe an. Die Koeffizienten repräsentieren die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten.<sup>631</sup> Der Koeffizient der ersten Potenz  $z^0$  zeigt die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit und der Koeffizient der letzten Potenz  $z^{\sum D_i(1-\delta_i)}$  zeigt die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit aller Kredite.

Das SPS gem. (3.140) (a), (b) und (3.141) ist insofern zu modifizieren, als dass beim Hinzufügen des  $k$ -ten Kredits Wahrscheinlichkeitsmasse vom betrachteten Koeffizienten  $j$  nicht zum nachfolgenden Koeffizienten  $j+1$ , sondern zum Koeffizienten  $j+D_i(1-\delta_i)$  verschoben wird. Betrachtet man bspw. den ersten Koeffizienten, repräsentiert dieser die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes von null aus den ersten  $(k-1)$  Krediten. Fügt man den  $k$ -ten Kredit hinzu, verringert sich die Wahrscheinlichkeit, dass mit dem neu hinzugefügten Kredit der Verlust weiterhin null beträgt. Fällt der Kredit aus, ergibt sich – nach wie vor unter dem

<sup>627</sup> Vgl. Fn. 529.

<sup>628</sup> Vgl. Abschnitt 361.

<sup>629</sup> Aus kombinatorischen Gründen ist es denkbar, dass bestimmte Verlusthöhen zwischen null und dem Maximalwert nicht erreichbar sind. Der Koeffizient wäre in einem solchen Fall null. Der Summand entfiel.

<sup>630</sup> Da für große Kreditportfolios die Summe sehr groß werden kann, wird im weiteren Verlauf der Arbeit eine Komplexitätsreduktion nötig werden. Vgl. dazu Abschnitt 417.

<sup>631</sup> Die Summe aller Koeffizienten ergibt wieder eins.

Szenario des Überlebens der  $(k-1)$  vorherigen Kredite – eine positive Wahrscheinlichkeit für den Verlust  $D_i(1-\delta_i)$ . Der Verlust  $D_i(1-\delta_i)$  kann jedoch bereits durch Kreditausfallkombinationen der vorherigen  $(k-1)$  Kredite erreicht worden sein. Fügt man den  $k$ -ten Kredit hinzu, verringert sich die Wahrscheinlichkeit, dass mit dem neu hinzugefügten Kredit der Verlust weiterhin  $D_i(1-\delta_i)$  beträgt. Fällt der Kredit aus, ergibt sich – nach wie vor unter dem Szenario des Verlustes  $D_i(1-\delta_i)$  aus den  $(k-1)$  vorherigen Krediten – eine positive Wahrscheinlichkeit für den Verlust  $D_i(1-\delta_i)+D_i(1-\delta_i)$ . Auf diese Weise wird mit dem Abstand  $D_i(1-\delta_i)$  Wahrscheinlichkeitsmasse innerhalb der erzeugenden Funktion verschoben. Für das allgemeine Ablaufschema ist zunächst von

$$c_{L_{RP,j},j}^{(k)}|\Psi := c_{L_{RP,j},j}^{(k-1)}|\Psi \quad \forall \quad j \quad (3.170)$$

auszugehen. Mit jedem neuem Kredit wird, beginnend mit dem ersten Koeffizienten  $j=1$ , die gesamte erzeugende Funktion, dem allgemeingültigen Ablaufschema

$$\begin{aligned} (a) \quad c_{L_{RP,j},j}^{(k)}|\Psi &:= c_{L_{RP,j},j}^{(k)}|\Psi - c_{L_{RP,j},j}^{(k-1)}|\Psi \cdot p_{i_k,t}|\Psi \\ (b) \quad c_{L_{RP,j},j+D_{i_k}(1-\delta_{i_k})}^{(k)}|\Psi &:= c_{L_{RP,j},j+D_{i_k}(1-\delta_{i_k})}^{(k)}|\Psi + c_{L_{RP,j},j}^{(k-1)}|\Psi \cdot p_{i_k,t}|\Psi \quad \forall \quad j \end{aligned} \quad (3.171)$$

folgend, einem modifizierten Sequential Probability Shifting unterworfen.

### 373 Modifikation der Inversen FOURIER-Transformation

Das modifizierte Sequential Probability Shifting soll auch für die Verlustverteilung durch die Inverse FOURIER-Transformation ergänzt werden. Neben der Modellierung einzelner Ausschnitte der Verlustverteilung bzw. einzelner Verluste in Analogie zur Modellierung einzelner Ausschnitte der Ereignisverteilung bzw. spezifischer Ausfallzahlen<sup>632</sup>, bietet das Verfahren der Inversen FOURIER-Transformation überdies die Möglichkeit, die Recovery Rate als Zufallsvariable zu gestalten. Spätestens die Wahl einer stetigen Recoveryverteilung hebt die Annahme ganzzahliger Verluste  $D_i(1-\delta_i)$  auf. Zunächst sei jedoch das Konzept der charakteristischen Funktion auf die Verlustverteilung übertragen.

Gem. (3.144) erhält man für die charakteristischen Funktionen des Verlusts  $L_{i,t}$  und des bedingten Verlusts  $L_{i,t}|\Psi$  bei konstanter Recovery Rate  $\delta_i$ :

$$\varphi_{L_{i,t}}(s) = (1 - p_i(t)) + p_i(t) \cdot e^{D_i(1-\delta_i)js} \quad \text{und} \quad (3.172)$$

$$\varphi_{L_{i,t}}(s)|\Psi = (1 - p_i(t)|\Psi) + p_i(t)|\Psi \cdot e^{D_i(1-\delta_i)js} . \quad (3.173)$$

<sup>632</sup> Vgl. Abschnitt 363.

Mit dem Faltungssatz<sup>633</sup> lässt sich die charakteristische Funktion der faktorbedingten Zufallsvariablen  $L_{RP}|\Psi$  im Zeitpunkt  $t$  als Summe der faktorbedingten BERNOULLIVerteilten Kreditverluste  $L_{i,t}|\Psi$  approximativ durch das Produkt ihrer charakteristischen Funktionen  $\varphi_{L_{i,t}}(\cdot)|\Psi$  darstellen:

$$\varphi_{L_{RP,t}}(s)|\Psi \approx \prod_{i=1}^N \varphi_{L_{i,t}}(s)|\Psi. \quad (3.174)$$

Analog zur obigen Vorgehensweise<sup>634</sup> wird die bedingte, diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion  $Pr[L_{RP,t}=l|\Psi]$  für den Zeitpunkt  $t$  durch eine bedingte, stetige Dichtefunktion  $f_X(x)|\Psi$  so approximiert, dass die zugehörigen charakteristischen Funktionen  $\varphi_X(\cdot)|\Psi$  und  $\varphi_{L_{RP,t}}(\cdot)|\Psi$  für eine endliche Menge reeller Zahlen  $s_k$  mit  $k=0,1,2,\dots$  übereinstimmen. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Dichtefunktion  $f_X(x)|\Psi$  außerhalb des Intervalls  $[0, \sum D_i(1-\delta_i)]$  verschwindet. Das Intervall  $[0, \sum D_i(1-\delta_i)]$  wird in  $S$  äquidistante Abschnitte unterteilt, wobei – im Gegensatz zur obigen Vorgehensweise – für die Abschnittslänge im Allgemeinen  $\Delta x \neq 1$  gilt. Da – ebenfalls im Gegensatz zur obigen Vorgehensweise – die Zufallsvariable  $L_{RP,t}$  nicht notwendigerweise ganzzahlig ist, kann für die charakteristische Funktion  $\varphi_{L_{RP,t}}(\cdot)|\Psi$  nicht von einer Periodizität auf dem Intervall  $[0, 2\pi)$  ausgegangen werden.<sup>635</sup> Auf Grund der Überlegungen zu (3.161), werden die reellen Zahlen  $s_k$  dem Intervall  $[0, 2\pi/\Delta x)$  entnommen.<sup>636</sup> Da sonst die Vorgehensweise völlig identisch ist, erhält man den Wert der approximativen Dichte  $f_X(x)|\Psi$  an der Stelle  $l\Delta x$  in Analogie zu (3.162) f. gem.:

$$f_X(l \cdot \Delta x)|\Psi \approx \frac{1}{S} \sum_{k=0}^{S-1} \left( e^{-j \frac{2\pi k l}{S}} \cdot \varphi_{L_{RP,t}}(k \cdot \Delta s)|\Psi \right) \quad \text{für } l=0, \dots, S-1 \quad (3.175)$$

wobei:

$$\Delta s = \frac{2\pi}{S\Delta x}. \quad (3.176)$$

Wird die Recovery Rate als Zufallsvariable modelliert, ändert sich das Verfahren der numerischen FOURIER-Inversion nur unwesentlich. Folgt die Recovery Rate  $\delta_i$  einer Beta-Verteilung und nimmt dementsprechend Werte zwischen null und eins an, ist das *erweiterte Intervall*  $[0, \sum D_i]$  in  $S$  äquidistante Abschnitte zu unterteilen. Bei der Ermittlung der charakteristischen Funktion  $\varphi_{L_{RP,t}}(\cdot)|\Psi$  ist zu beachten, dass die Kreditverluste nicht mehr BERNOULLIVerteilt sind. Im Falle der Beta-Verteilung sind die Kreditverluste vielmehr

<sup>633</sup> Vgl. Satz 3-8.

<sup>634</sup> Vgl. Formel (3.160).

<sup>635</sup> Vgl. Satz 3-10.

<sup>636</sup> Vgl. Abschnitt 363.

stetig verteilt. Die Ausprägungen der Zufallsvariablen  $L_{i,t}|\Psi$  hängen nicht nur von den Ausfallindikatoren  $I_{i,t}$  und den Nominalwerten  $D_i$ , sondern zusätzlich von den Zufallsvariablen  $\delta_i$  ab:

**Satz 3-11 (CF eines Produkts zweier Zufallsvariablen):** Sind  $X$  und  $Y$  unabhängige Zufallsvariablen, so gilt für die charakteristischen Funktionen zu  $X$ ,  $Y$  und  $X \cdot Y$ :

$$\varphi_{XY}(t) = E(e^{itXY}) = E(\varphi_X(tY)) = E(\varphi_Y(tX)). \quad (3.177)$$

Beweis:

*M. Wichura (2001, S. 13-3).*

Für die bedingte charakteristische Funktion des Kreditverlustes  $L_{i,t}|\Psi$  ergibt sich mit (3.177) unter der einschränkenden Voraussetzung der Unabhängigkeit zwischen den Ausfallereignissen und den Recovery Rates durch Bildung des Erwartungswertes über den BERNOULLIVerteilten Ausfallindikator  $I_{i,t}$ .<sup>637</sup>

$$\begin{aligned} \varphi_{L_{i,t}}(s)|\Psi &= \varphi_{I_{i,t}(1-\delta_i)}(sD_i)|\Psi = E(e^{jsI_{i,t}D_i(1-\delta_i)}|\Psi) \\ &= \bar{p}_{i,t}|\Psi \cdot E(e^0) + p_{i,t}|\Psi \cdot E(e^{jsD_i(1-\delta_i)}) \\ &= \bar{p}_{i,t}|\Psi + p_{i,t}|\Psi \cdot \varphi_{(1-\delta_i)}(sD_i). \end{aligned} \quad (3.178)$$

Damit erhält man aufgrund der Unabhängigkeitsannahme der  $L_{i,t}|\Psi$  für die bedingte charakteristische Funktion des Portfolioverlustes  $L_{RP,t}|\Psi$ :

$$\varphi_{L_{RP,t}}(s)|\Psi \approx \prod_{i=1}^N (\bar{p}_{i,t}|\Psi + p_{i,t}|\Psi \cdot \varphi_{(1-\delta_i)}(sD_i)). \quad (3.179)$$

Mit der Wahl einer charakteristischen Funktion für  $(1-\delta_i)$  lässt sich für jedes  $k\Delta s$  mit  $k=1, \dots, S-1$  ein Wert für (3.179) errechnen und  $f_X(\cdot)|\Psi$  an der Stelle  $k\Delta x$  gem. (3.175) bestimmen. Folgt die Recovery Rate der Beta-Verteilung<sup>638</sup>, ist die charakteristische Funktion die KUMMER-Funktion der ersten Ordnung.<sup>639</sup>

$$\varphi_{(1-\delta_i)}(sD_i) = \int_0^1 \frac{u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1}}{\text{Beta}(\alpha, \beta)} e^{jsD_i u} du = F_{1,1}(\alpha, \alpha + \beta, jsD_i). \quad (3.180)$$

<sup>637</sup> Alternativ könnte gem. Satz 3-11 die Erwartungswertbildung über die Recovery Rate erfolgen. Die Berechnung der charakteristischen Funktion würde jedoch numerischer Integrationsverfahren bedürfen.

<sup>638</sup> Folgt  $\delta_i$  der Beta-Verteilung, folgt auch  $(1-\delta_i)$  der Beta-Verteilung, wobei  $\alpha$  und  $\beta$  zu vertauschen wären.

<sup>639</sup> Vgl. M. Abramowitz und I. Stegun (1972), Handbook of mathematical functions, S. 928 (Formel 26.1.8), S. 930 (Formel 26.1.33) u. S. 944 f.; J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 16.

### 38 Überführung des semi-analytischen Modells in eine Monte-Carlo-Simulation

#### 381 Zeitpunktbezogene Simulation

Für eine zeitpunktbezogene Simulation gemeinsamer Ereignis- bzw. Verlustverteilungen werden zunächst Ausprägungen des systematischen Faktors  $\Psi_t$  aus der Standardnormalverteilung unabhängig voneinander gezogen. Für jede Ausprägung von  $\Psi_t$  sind für alle Kredite  $i$  bzgl. eines vorzugebenden Analysezeitpunkts  $t_A$  die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_i(t_A)|\Psi$  zu ermitteln. Dabei ist für alle langlaufenden Kredite ( $T_i \geq t_A$ ) Gleichung (3.82) und für alle kurzlaufenden Kredite ( $T_i < t_A$ ) Gleichung (3.111) anzuwenden. Pro Ausprägung von  $\Psi_t$  ist in einem zweiten Schritt für jeden Kredit  $i$  eine Ausprägung  $u_i$  einer gleichverteilten Zufallsvariablen  $U_i$  zu ziehen. Der Kredit  $i$  fällt aus, wenn die Ausprägung  $u_i$  kleiner ist als die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_i(t_A)|\Psi$ :

$$I_{i,t_A}(U_i)|\Psi = \begin{cases} 1 & \text{für } U_i < p_i(t_A)|\Psi, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.181)$$

Ebenso wie die Ausfallindikatoren  $I_{i,t_A}$  lassen sich auch die Anzahl der ausgefallenen Kredite  $N_{RP,t_A}$  und der eingetretene Verlust  $L_{RP,t_A}$  als Zufallsvariablen in Abhängigkeit des systematischen Faktors  $\Psi_t$  sowie der kreditspezifischen Zufallsvariablen  $U_i$  schreiben:

$$N_{RP,t_A}(U_1, \dots, U_N)|\Psi = \sum_{i=1}^N I_{i,t_A}(U_i)|\Psi \quad \text{und} \quad (3.182)$$

$$L_{RP,t_A}(U_1, \dots, U_N)|\Psi = \sum_{i=1}^N D_i \cdot (1 - \delta_i) \cdot I_{i,t_A}(U_i)|\Psi. \quad (3.183)$$

Nach dem Gesetz der großen Zahl können die Eintrittswahrscheinlichkeiten bestimmter Ereignisse  $A$  (Ausfallzahlen, Portfolioverluste) für eine Zufallsversuchsreihe mit großem Umfang  $n$  durch die entsprechenden relativen Häufigkeiten  $h_n(\cdot)$  approximiert werden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(N_{RP,t_A,n} \in A) = \Pr(N_{RP,t_A} \in A), \quad (3.184)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(L_{RP,t_A,n} \in A) = \Pr(L_{RP,t_A} \in A). \quad (3.185)$$

Da grundsätzlich eine Erhöhung der Genauigkeit um den Faktor 10 mit einer Verlängerung der Zufallsversuchsreihe um den Faktor 100 einhergeht<sup>640</sup>, ist die Simulation zeitaufwendig und verspricht insbesondere in den Tails der Verteilungen gegenüber dem semi-analytischen Modell nur inferiore Ergebnisse.

<sup>640</sup> Das heißt der Standardfehler der Simulation fällt um den Faktor 10 für eine Erhöhung von  $n$  um den Faktor 100. Vgl. P. Glasserman (2004), Monte Carlo methods, S. 1-3.

### 382 Zeitraumbezogene Simulation

Ist die zeitliche Struktur der Ausfallereignisse von Interesse, bedarf es der Simulation einzelner Pfadausprägungen der BROWNSchen Bewegungen  $W_{i,g_{i,t}}$  respektive ihrer Zeittransformationen  $Y_{i,t}$ .<sup>641</sup> Sei zunächst unterstellt, dass ein homogenes Portfolio in der Weise betrachtet wird, dass die Zeittransformationen identisch ausfallen. Dann wird der Zeitraum  $[0, t_A]$  in äquidistante Zeitabschnitte der Länge  $\Delta t = t_A/n$  unterteilt. Zu den transformierten Zeitpunkten  $g_{i,\Delta t \cdot h}$  mit  $h=1, \dots, n$  sind sodann Ausprägungen von  $W_{i,g_{i,\Delta t \cdot h}}$  zu ermitteln. Dafür werden zunächst standardnormalverteilte Zufallsvariablen  $\Psi_h$  zur Ermittlung der systematischen Faktorprozessänderungen  $\Delta B_{\Psi, g_{i,\Delta t \cdot h}}$ , mit Hilfe der Wurzel-Zeit-Formel sowie der Zeittransformation „gebremst“ bzw. „beschleunigt“:<sup>642</sup>

$$\begin{aligned} B_{\Psi, g_{i,\Delta t \cdot h}} - B_{\Psi, g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} &= {}_d B_{\Psi, g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \\ &= {}_d \sqrt{g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \cdot B_{\Psi, 1} \\ &= \sqrt{g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \cdot \Psi_h \end{aligned} \quad (3.186)$$

mit :

$$\Psi_h \sim N(0,1); i=1, \dots, N; h=1, \dots, n.$$

Für die Modellierung der Faktorprozesse  $B_{\Psi, g_{i,\Delta t \cdot h}}$  in jedem Zeitschritt  $h$  folgt daraus:

$$B_{\Psi, g_{i,\Delta t \cdot h}} = B_{\Psi, g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} + \sqrt{g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \cdot \Psi_h. \quad (3.187)$$

Für die idiosynkratischen Faktorprozessänderungen wird analog vorgegangen. Die Ausprägungen von  $W_{i,g_{i,\Delta t \cdot h}}$  ergeben sich auf der Basis des Faktormodells. Dabei sind letztlich nur die Faktoränderungen, nicht jedoch die absoluten Höhen der Faktorprozesse relevant:

$$\begin{aligned} W_{i,g_{i,\Delta t \cdot h}} &= W_{i,g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \\ &+ \sqrt{\rho_i} \cdot \sqrt{g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \cdot \Psi_h \\ &+ \sqrt{1-\rho_i} \cdot \sqrt{g_{i,\Delta t \cdot h} - g_{i,\Delta t \cdot (h-1)}} \cdot \varepsilon_{i,h} \end{aligned} \quad (3.188)$$

mit :

$$\varepsilon_{i,h} \sim N(0,1).$$

Mit Hilfe von (3.25) kann wie folgt geschrieben werden:

$$Y_{i,\Delta t \cdot h} = W_{i,g_{i,\Delta t \cdot h}}. \quad (3.189)$$

<sup>641</sup> Vgl. grundsätzlich zur Simulation von BROWNSchen Bewegungen P. Glasserman (2004), Monte Carlo methods, S. 79-92.

<sup>642</sup> Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 343 sowie die Gleichung (3.46).

Der Kredit  $i$  fällt aus, wenn der Pfad die Ausfallschranke  $K_i$  durchbricht:

$$I_{i,t_A} \left( \left\{ W_{i,g_{i,\Delta t^h}} \right\}_{h=1,\dots,n} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } \Delta t \cdot \min \left( h : W_{i,g_{i,\Delta t^h}} \leq K_i \right) \leq T_i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.190)$$

Wie die Ausfallindikatoren  $I_{i,t_A}$  lassen sich auch die Zahl der Kreditausfälle  $N_{RP,t_A}$  und der Portfolioverlust  $L_{RP,t_A}$  als Zufallsvariable in Abhängigkeit der diskretisierten BROWNSchen Bewegungen schreiben:

$$N_{RP,t_A} \left( \left\{ W_{i,g_{i,\Delta t^h}} \right\}_{h=1,\dots,n} \right)^{i=1,\dots,N} = \sum_{i=1}^N I_{i,t_A} \left( \left\{ W_{i,g_{i,\Delta t^h}} \right\}_{h=1,\dots,n} \right), \quad (3.191)$$

$$L_{RP,t_A} \left( \left\{ W_{i,g_{i,\Delta t^h}} \right\}_{h=1,\dots,n} \right)^{i=1,\dots,N} = \sum_{i=1}^N D_i \cdot (1 - \delta_i) \cdot I_{i,t_A} \left( \left\{ W_{i,g_{i,\Delta t^h}} \right\}_{h=1,\dots,n} \right). \quad (3.192)$$

In Analogie zur zeitpunktbezogenen Simulation können auch hier nach dem Gesetz der großen Zahl die Eintrittswahrscheinlichkeiten von Ausfallzahlen und Portfolioverlusten für umfangreiche Zufallsversuchsreihen durch relative Häufigkeiten approximiert werden.

Für bonitätsmäßig heterogene Portfolios sind die verschiedenen Zeittransformationen sowie ihr Einfluss auf die Korrelationen der Prozessänderungen zu berücksichtigen. Zur Ermittlung der entsprechenden Korrelationskoeffizienten soll zunächst der Erwartungswert des Produkts zweier Prozessänderungen betrachtet werden. Für  $s < t$  gilt:

$$\begin{aligned} E \left( \left( W_{i,g_{i,t}} - W_{i,g_{i,s}} \right) \cdot \left( W_{j,g_{j,t}} - W_{j,g_{j,s}} \right) \right) &= \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E \left( B_{\psi,g_{i,t}} \cdot B_{\psi,g_{j,t}} \right) \\ &\quad - \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E \left( B_{\psi,g_{i,s}} \cdot B_{\psi,g_{j,t}} \right) \\ &\quad - \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E \left( B_{\psi,g_{j,s}} \cdot B_{\psi,g_{i,t}} \right) \\ &\quad + \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot E \left( B_{\psi,g_{i,s}} \cdot B_{\psi,g_{j,s}} \right). \end{aligned} \quad (3.193)$$

Setzt man (3.50) übertragend in (3.193) ein, dann folgt:

$$\begin{aligned} E \left( \Delta W_{i,g_{i,t}} \cdot \Delta W_{j,g_{j,t}} \right) &= \\ \sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot \left[ \min(g_{i,t}, g_{j,t}) - \min(g_{i,s}, g_{j,t}) - \min(g_{j,s}, g_{i,t}) + \min(g_{j,s}, g_{i,s}) \right]. \end{aligned} \quad (3.194)$$

Für den oben unterstellten Spezialfall  $\rho_i = \rho_j = \rho$  und  $g_{i,t} = g_{j,t} = g_t$  erhält man mit (3.194) erwartungsgemäß:

$$E \left( \Delta W_{i,g_t} \cdot \Delta W_{j,g_t} \right) = \rho \cdot (g_t - g_s). \quad (3.195)$$

Unter Berücksichtigung der Varianzen von  $\Delta W_{i,g_{i,t}}$  und  $\Delta W_{j,g_{j,t}}$  ergeben sich mit (3.194) die gesuchten Korrelationskoeffizienten wie folgt:

$$\text{Korr}\left(\Delta W_{i,g_{i,t}} \cdot \Delta W_{j,g_{j,t}}\right) = \frac{\sqrt{\rho_i \rho_j} \cdot \left[ \min(g_{i,t}, g_{j,t}) - \min(g_{i,s}, g_{j,t}) - \min(g_{j,s}, g_{i,t}) + \min(g_{j,s}, g_{i,s}) \right]}{\sqrt{g_{i,t} - g_{i,s}} \cdot \sqrt{g_{j,t} - g_{j,s}}} \quad (3.196)$$

Für den oben unterstellten Spezialfall  $\rho_i = \rho_j = \rho$  und  $g_{i,t} = g_{j,t} = g_t$  erhält man für den uniformen Korrelationskoeffizienten wie erwartet die Faktorsensitivität  $\rho$ .

Zur Simulation von Ausprägungen von  $W_{i,g_{i,\Delta t h}}$  zu den transformierten Zeitpunkten  $g_{i,\Delta t h}$  mit  $h=1, \dots, n$  bzw. von Änderungen  $\Delta W_{i,g_{i,\Delta t h}}$  könnte für jeden Zeitpunkt  $\Delta t \cdot h$  mit Hilfe von (3.196) eine Korrelationskoeffizientenmatrix konstruiert werden, um anschließend mit Hilfe von Standardmethoden korrelierte Zufallszahlen zu ziehen.<sup>643</sup> Die Korrelationskoeffizientenmatrix würde jedoch unüberschaubare Ausmaße annehmen und der Charme des Faktoransatzes ginge verloren.<sup>644</sup> Daher sei hier vorgeschlagen, die einzelnen Zeitpunkte  $\Delta t \cdot h$  kredit- bzw. im Rahmen der hier verwendeten ratingbezogenen Modellumsetzung ratingweise zu transformieren. Man erhält pro Rating eine transformierte Menge an Zeitpunkten  $g_{R,\Delta t h}$ . Die Vereinigung aller Mengen liefert die Menge der Zeitpunkte, zu denen Ausprägungen des BROWNSchen Faktorprozesses  $B_{\psi, g_{R,\Delta t h}}$  im Zuge der Simulation ermittelt werden müssen. Diese Vorgehensweise stellt sicher, dass – gleichwohl welcher Kredit gerade betrachtet wird – die idiosynkratischen Komponenten stets mit einer verfügbaren Faktorausprägung zu  $W_{i,g_{R,\Delta t h}}$  kombiniert werden können.<sup>645</sup> Pro Simulationslauf ist der vollständige Faktorpfad zu generieren. Die idiosynkratischen Faktoren können Zeitschritt für Zeitschritt nach Maßgabe der Faktoränderungen bestimmt werden. Kenntnis über die vollständigen idiosynkratischen Pfadausprägungen bedarf es mit Blick auf die Rechengeschwindigkeit und die Speicherkapazität nicht.

Die zeitraumbezogene Simulation erlaubt die Berücksichtigung von Portfolioreplenishments. Dabei ist lediglich zu beachten, dass für die neu in das Referenzportfolio aufgenommenen Kredite entweder die Ausfallschranke nach Maßgabe des systematischen Faktorprozesses verschoben oder (alternativ) der Faktorprozess selbst auf null reskaliert wird.

<sup>643</sup> Standardverfahren bedienen sich i. d. R der CHOLESKY-Dekomposition oder der Faktoranalyse der Korrelationskoeffizientenmatrix. Vgl. P. Glasserman (2004), Monte Carlo methods, S. 71-77.

<sup>644</sup> Zu den Vorteilen des Faktoransatzes siehe die Ausführungen in den Abschnitten 2434 und 341.

<sup>645</sup> Alternativ sind Interpolationsverfahren oder Ziehungen von zusätzlichen Zufallszahlen mit Hilfe der BROWNSchen Brücke für die Ermittlung von Faktorausprägungen zwischen einzelnen Stützstellen denkbar.

Da die Reskalierung des Faktorprozesses deterministisch erfolgt und für alle – vom Replishmentzeitpunkt ausgehend – nachfolgenden Zeitpunkte kreditweise konstant bleibt, hat dies keinen Einfluss auf die Korrelation der Ability-to-Pay-Prozesse untereinander.<sup>646</sup>

Die Diskretisierung der Zeitachse stellt eine Approximation dar. Insbesondere kann der zeitstetige Prozess  $W_{i,g_{i,t}}$  – anders als der zeitdiskretisierte Prozess  $W_{i,g_{i,\Delta t,h}}$  – zwischen den einzelnen Gitterpunkten  $g_{i,\Delta t,h}$  die Schranke  $K_i$  durchbrechen, ohne dass dies durch den Ausfallindikator  $I_{i,t_A}$  zur Anzeige gebracht wird.<sup>647</sup> Die Ausfallwahrscheinlichkeit ist bei einer groben Gitterstruktur zu niedrig. Die Ausfallzeiten werden systematisch überschätzt. Liegen zwei aufeinander folgende Ausprägungen des zeitdiskreten Prozesses  $W_{i,g_{i,\Delta t,(h-1)}}$  und  $W_{i,g_{i,\Delta t,h}}$  oberhalb der Ausfallschranke  $K_i$ , ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der zeitstetige Prozess  $W_{i,g_{i,t}}$  bedingt auf den Anfangspunkt  $W_{i,g_{i,\Delta t,(h-1)}}$  und den Endpunkt  $W_{i,g_{i,\Delta t,h}}$  die Ausfallschranke  $K_i$  zwischenzeitlich durchschlagen hat, durch die Passage-Wahrscheinlichkeit einer BROWNSchen Brücke gem. (3.54) wie folgt gegeben:

$$\Pr \left[ \min_{s \in [g_{i,\Delta t,(h-1)}, g_{i,\Delta t,h}]} W_{i,s} \leq K_i \mid \alpha, \beta > K_i \right] = \exp \left( \frac{-2 \cdot (\beta - K_i) \cdot (\alpha - K_i)}{g_{i,\Delta t,h} - g_{i,\Delta t,(h-1)}} \right)$$

mit :

$$\alpha = W_{i,g_{i,\Delta t,(h-1)}}, \beta = W_{i,g_{i,\Delta t,h}}.$$
(3.197)

Unter der Voraussetzung, dass die Ausfallschranke bis zum Betrachtungszeitpunkt  $\Delta t \cdot h$  nicht verletzt wurde und auch  $W_{i,g_{i,\Delta t,h}}$  oberhalb der Ausfallschranke liegt, kann für jedes Zeitintervall eine gleichverteilte Zufallszahl gezogen werden. Der Ausfall tritt ein, wenn:

$$U_{i,h} \leq \exp \left( \frac{-2 \cdot (W_{i,g_{i,\Delta t,h}} - K_i) \cdot (W_{i,g_{i,\Delta t,(h-1)}} - K_i)}{g_{i,\Delta t,h} - g_{i,\Delta t,(h-1)}} \right).$$
(3.198)

Da die gleichverteilten Zufallszahlen für die einzelnen Kredite unabhängig voneinander gezogen werden, geht insbesondere bei hohen Faktorsensitivitäten ein Teil der Ausfallkorrelation verloren. Daher sollte das Zeitgitter möglichst fein modelliert werden.<sup>648</sup>

<sup>646</sup> Die Reskalierung für alle im Zeitpunkt  $t_0$  dem Referenzportfolio angehörenden Kredite ist null.

<sup>647</sup> Vgl. [L. Overbeck und W. Schmidt \(2005\)](#), Modeling default dependence, S. 16.

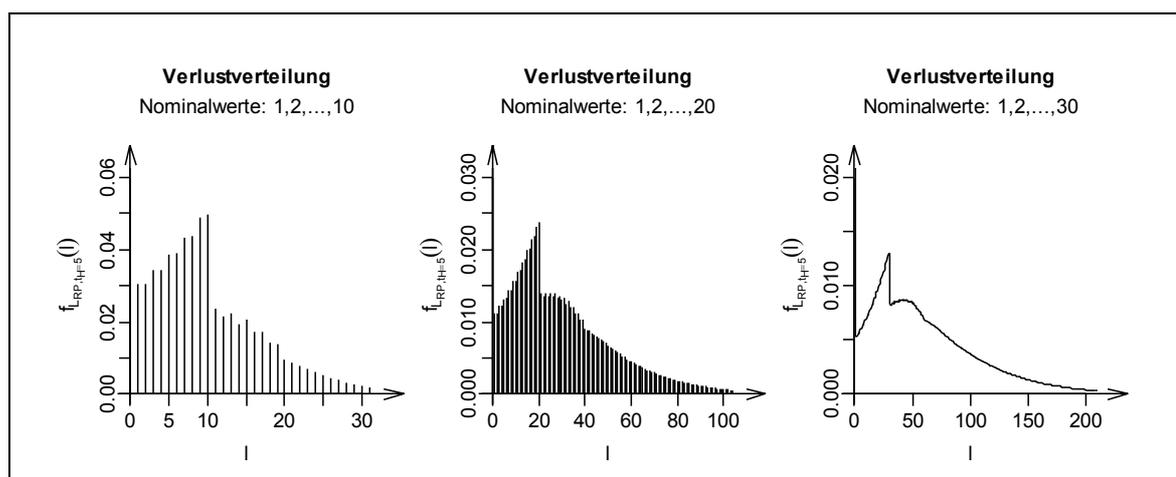
<sup>648</sup> Zudem sei bemerkt, dass die Einbeziehung der BROWNSchen Brücke negative Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten der Zufallsversuchsreihe haben könnte. Anhand einer Digitalen Option zeigt [A. Papageorgiou \(2002\)](#), Brownian bridge und quasi-Monte Carlo integration, S. 176-181, dass u. U. das Standardverfahren zur Simulation BROWNScher Bewegungen zu besseren Ergebnissen führen kann. Da sich das Verfahren von PAPAGEORGIU von dem hier verwendeten unterscheidet, können die Ergebnisse aber nicht ohne weiteres übertragen werden.

### 39 Ausgewählte Leistungsmerkmale des semi-analytischen Modells

Nachdem das semi-analytische Modell formuliert wurde, sollen charakteristische Leistungsmerkmale anhand von Beispielpportfolios einer Demonstration unterzogen werden. Dabei soll auch die Modellperformance im Vergleich zur Pfadsimulation untersucht werden. Insbesondere wird dabei der Einfluss der verwendeten Unabhängigkeitsapproximation<sup>649</sup> von Interesse sein.

#### 391 Erfassung heterogener Nominalwerte

Die Bedeutung der korrekten Erfassung heterogener Nominalwerte durch das semi-analytische Modell bei der Modellierung von Verlustverteilungen wird anhand der Abb. 3-20 deutlich. Abgetragen wurden die Wahrscheinlichkeitsfunktionen der Verluste von drei Portfolios mit 10, 20 und 30 Krediten. Für Illustrationszwecke wurden die Nominalwerte der Kredite als wachsende arithmetische Reihe beginnend mit eins modelliert. Die Nominalwertdifferenzen betragen konstant eins. Die Restlaufzeiten wurden uniform gestaltet und betragen fünf Jahre. Alle Kredite tragen ein „BB“-Rating.



**Abb. 3-20: Heterogene Nominalwerte**

Verlustverteilungen für 3 Kreditportfolios mit jeweils 10, 20 und 30 Krediten. Die Nominalwerte sind aufsteigend mit  $D_i=1,2,3, \dots$  gestaltet. Die Restlaufzeit beträgt uniform 5 Jahre. Alle Kredite tragen ein „BB“-Rating. Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S.

Anhand dieses konstruierten Beispiels wird deutlich, dass – anders als bei der Ereignisverteilung – die kombinatorischen Möglichkeiten zur Erzeugung spezifischer Verluste maßgeblich die Form der Verlustverteilung bestimmen. Insbesondere werden regelmäßig Sprünge in den Verteilungsverläufen sichtbar. Am Beispiel des linken Graphen werden die Verluste ab  $LRP=l=11$  sprunghaft weniger wahrscheinlich. Ursache ist die Tatsache, dass für diesen und darüber hinausgehende Verluste mindestens zwei Kredite ausfallen müssen, um die entsprechenden Verlusthöhen zu erreichen.

<sup>649</sup> Vgl. Abschnitt 356.

Darüber hinaus wird durch die Darstellungsform noch einmal deutlich, dass es sich bei dem Portfolioverlust um eine diskrete Zufallsvariable handelt. Da für hinreichend große Kreditportfolios die Wahrscheinlichkeitsfunktion des diskreten Verlusts gut durch die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen approximiert werden kann<sup>650</sup>, werden die Wahrscheinlichkeitsfunktionen im Folgenden wie in Abb. 3-20 (rechts) durch eine Dichtefunktion graphisch approximiert. Alternativ kann der Graph als „verstetigte“ Wahrscheinlichkeitsfunktion interpretiert werden.<sup>651</sup>

### **392 Präzise Wiedergabe von Verlustverteilungscharakteristika**

Mit den Ausführungen in den Abschnitten 37 und 38 stehen neben der semi-analytischen Methode auch simulative Methoden, insbesondere die Methode der Pfadsimulation, zur Ermittlung der Portfolioverlustverteilung zur Verfügung. Beide methodischen Ansätze greifen auf Approximationen zurück, die bei der Beurteilung der Ergebnisse stets zu berücksichtigen sind.

Die semi-analytische Vorgehensweise bedient sich der Unabhängigkeitsapproximation für faktorpfadendpunktbedingte Ausfallindikatoren. Dabei beschreibt die Approximation die Wirklichkeit umso besser, je homogener das Referenzportfolio hinsichtlich der Restlaufzeiten ist.<sup>652</sup> Die Pfadsimulation hingegen bedient sich eines diskreten Zeitgitters und damit diskretisierter Ability-to-Pay-Prozesse. Je feiner die Diskretisierung des Zeitgitters ausfällt, d. h. je mehr Simulationsschritte zur Ermittlung einer einzelnen Pfadausprägung herangezogen werden, je eher entspricht der zeitdiskretisierte Prozess dem zeitstetigen Prozess. Während die Semi-Analytik bei jeder erneuten Durchführung stets zum selben Ergebnis gelang, erhält man bei der Simulationen, bedingt durch ihren zufälligen Charakter, für jeden Simulationslauf stets unterschiedliche Ergebnisse. Die Ergebnisse besitzen eine Verteilung. Je mehr Simulationsläufe mit steigendem Rechenaufwand durchgeführt werden, desto geringer ist die Schwankungsbreite der Ergebnisverteilungen und desto wahrscheinlicher ist es, dass sich der Durchschnitt der Ergebnisse der Simulationsläufe in der Nähe des „wahren“ Wertes liegt.

In Abb. 3-21 ist erneut die Verlustverteilung aus Abb. 3-20 (rechts) für ein Portfolio bestehend aus 30 Krediten mit wachsenden Nominalwerten abgetragen. Zum Vergleich sind pfadsimulativ ermittelte relative Verlusthäufigkeiten in Form von Histogrammen mit jeweils unterschiedlich vielen Simulationsläufen eingezeichnet. Die Zeitachse  $[0, t_H]$  wurde

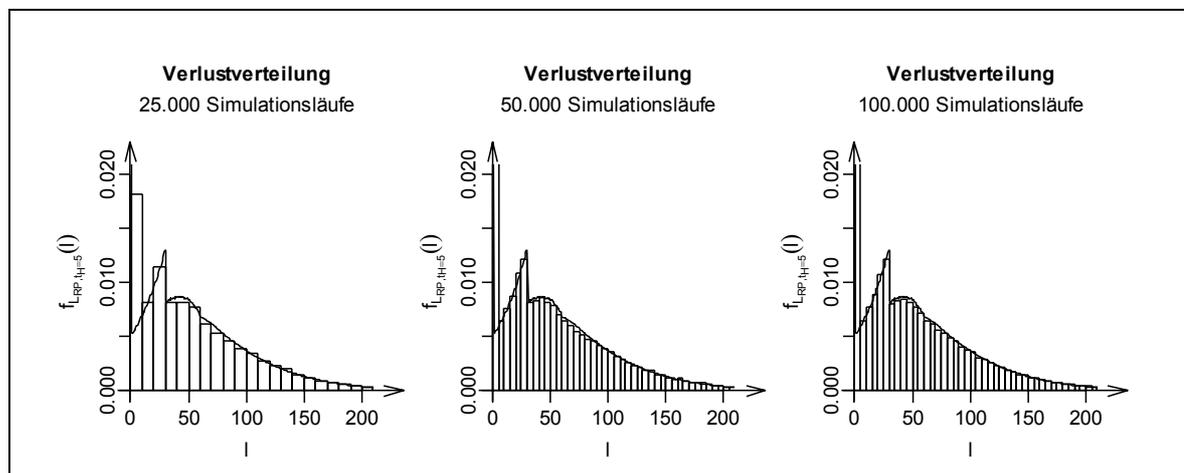
---

<sup>650</sup> Vgl. die Abschnitte 363 u. 373.

<sup>651</sup> Zur Verstetigung von Wahrscheinlichkeitsfunktionen siehe [J. Völker \(2000\)](#), VaR-Modelle, S. 80-83.

<sup>652</sup> Vgl. Abschnitt 356.

dabei so diskretisiert, dass sich ein einzelner Simulationsschritt auf einen Zeitabschnitt von einem Tag bezieht.<sup>653</sup> Ziel ist es, die Approximationsfehler der Simulation aufgrund der diskretisierten Zeitachse so gering wie möglich zu halten, um zu einer Aussage bezüglich des Approximationsfehlers aufgrund der Unabhängigkeitsannahme in der Semi-Analytik zu gelangen.



**Abb. 3-21: Semi-Analytik versus Pfadsimulation bei heterogenen Nominalwerten**

Verlustverteilungen für ein Kreditportfolio mit 30 Krediten. Die Nominalwerte sind aufsteigend mit  $D_i=1,2,3,\dots$  gestaltet. Die Restlaufzeit beträgt uniform 5 Jahre. Alle Kredite tragen ein „BB“-Rating. Gegenübergestellt sind simulierte Häufigkeitsverteilungen. Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S.

Die graphischen Darstellungen verdeutlichen, dass trotz der Unabhängigkeitsannahme die Ergebnisse aus dem semi-analytischen Modell mit den Ergebnissen aus den Simulationen übereinstimmen. Für 100.000 Simulationsläufe sind kaum noch Unterschiede festzustellen. Die Übereinstimmung bezieht sich nicht nur auf den mittleren Bereich der Verlustverteilung, sondern reicht bis in die Verteilungsenden. Die semi-analytisch ermittelte Verlustverteilung hat darüber hinaus den Vorteil, dass die Form und Struktur der abgetragenen diskretisierten Wahrscheinlichkeitsfunktion wesentlich deutlicher zum Vorschein kommt als in den simulativ ermittelten Histogrammen. Insbesondere können in dem hier verwendeten Beispiel der wachsenden Nominalwerte Sprünge in der Verteilungsfunktion sowie Krümmungsänderungen zweifelsfrei identifiziert werden. Abschließend sei hervorgehoben, dass die Bestimmung der Verteilungsfunktion mit semi-analytischen Verfahren, rechen-technisch betrachtet, erheblich weniger Zeit beansprucht.

### 393 Betrachtung zeitraumbezogener Kreditausfälle

Der vorgestellte (semi-)analytische Modellrahmen soll mit einem einfachen, ebenfalls analytischen und faktorbezogenen Modellrahmen – dem Modellrahmen zur NEUEN BASLER

<sup>653</sup> Bezogen auf einen Risikohorizont von fünf Jahren entspricht das 1.825 Zeitabschnitten.

EIGENKAPITALVERORDNUNG (Basel II) nach VASICEK – verglichen werden.<sup>654</sup> Der Modellrahmen nach Basel II geht von einem homogenen, unendlich granularen Portfolio aus.<sup>655</sup> Dazu sind homogene Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_i=p_j=p$ , homogene Restlaufzeiten  $T_i=T_j=T$ , homogene Kreditratings  $R_i=R_j=R$  und homogene Faktorsensitivitäten (resp. Unternehmenswertkorrelationen)  $\rho_i=\rho_j=\rho_R$  vorzugeben. Einwendend könnte vorgebracht werden, dass hier kein unendlich granulares Referenzportfolio vorliege und ein solches auch nicht existiere. Wie SCHÖNBUCHER jedoch feststellt, kann die (Ereignis-)Verteilung in Form des normierten Kreditportfolioverlusts  $L'_{RP,t}$  im Basler Modellrahmen jedoch bereits ab wenigen hundert Krediten hinreichend genau durch die relativ einfache, analytische Modellformulierung

$$\Pr[L'_{RP,t} \leq l'] = F_{SN} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_R}} \left( \sqrt{1-\rho_R} \cdot F_{SN}^{-1}(l') - F_{SN}^{-1}(p_{R,t}) \right) \right) \quad (3.199)$$

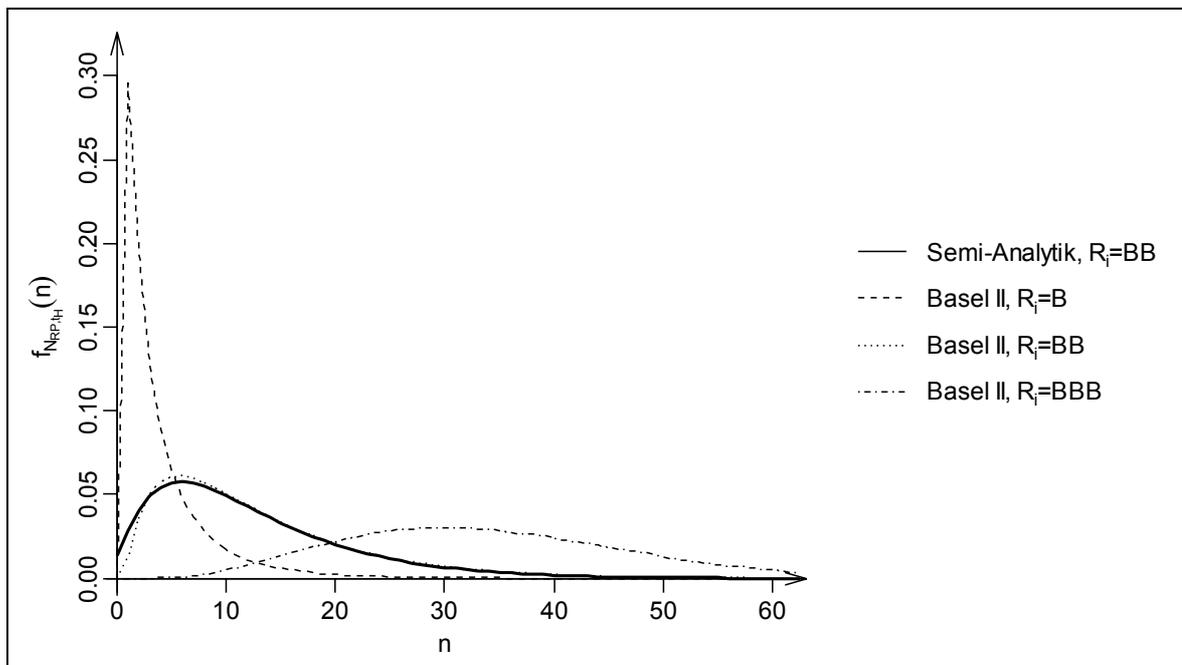
approximiert werden.<sup>656</sup>

Zur Demonstration sei ein homogenes Portfolio mit 100 Krediten herangezogen. Alle Kredite weisen einheitlich einen Nominalwert von einer Währungseinheit auf. Damit sind die Verlustverteilung und die Ereignisverteilung identisch. Die Restlaufzeiten betragen fünf Jahre und entsprechen damit dem Risikohorizont  $t_H=5$ . Alle Kredite besitzen ein Rating der Güte „BB“. Die Ausfallwahrscheinlichkeiten werden auf der Basis der historischen durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S bestimmt. Für einen Analysehorizont von einem Jahr beträgt die ratingabhängige Ausfallwahrscheinlichkeit uniform  $p_{BB,t_A=1}=1,50\%$ . Daraus resultiert die ratingabhängige Unternehmenswertkorrelation. Sie beträgt  $\rho_{BB}=17,75\%$ . Für den interessierenden Analysehorizont von  $t_A=t_H=5$  ermittelt sich eine kreditübergreifende Ausfallwahrscheinlichkeit von  $p_{BB,t_A=1}=12,25\%$ . Damit sind alle Parameter zur Ermittlung der Verlustverteilung auf der Basis von (3.199) vollständig bestimmt.

<sup>654</sup> Vgl. zum Modellrahmen die Ausführungen in Abschnitt 2435.

<sup>655</sup> Vgl. grundlegend zur Methodik des Basler Modells H. Rau-Bredow (2001), Kreditrisikomodellierung im Neuen Basler Accord, S. 1004; T. Wilde (2001), IRB approach explained, S. 87-89; M. Wilkens, O. Entrop und H. Scholz (2002), Analyse des IRB-Ansatzes, S. 142 f. Aufgrund der mehrfachen Überarbeitung der Basler Vorschläge kann es vorkommen, dass einzelne Details – insbesondere die Parametrisierungen – in den zitierten Aufsätzen nicht mehr den aktuellen Gegebenheiten entsprechen. Zum aktuellen Stand siehe BCBS (2004), Basel II, Abs. 270-386. Siehe auch H. Schulte-Mattler und T. Manns (2004), Kreditkosten des Mittelstandes, S. 376-378.

<sup>656</sup> Vgl. P. Schönbucher (2000), Factor models, S. 11 f.



**Abb. 3-22: Semi-Analytik im Modellvergleich**

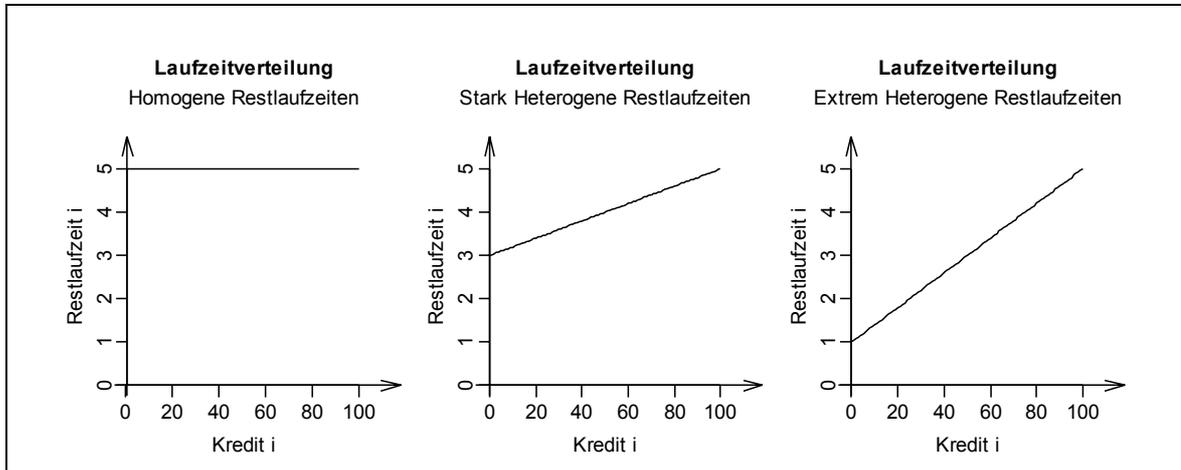
Graphischer Vergleich der Verlustverteilungen eines Kreditportfolios mit 100 Krediten mit dem Modellansatz nach Basel II. Die Nominalwerte sind uniform eins. Die Restlaufzeiten entsprechen dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Rechnungen basieren auf den Credit Curves vom Typ B nach STANDARD & POOR'S.

In Abb. 3-22 sind die Verlustverteilungen auf der Basis der vorgestellten Semi-Analytik (durchgezogene, fette Linie) und die Verlustverteilung auf der Basis des Modellansatzes (gepunktete Linie) nach Basel II graphisch einander gegenübergestellt. Dabei wird deutlich, dass sich die beiden Verteilungen einander sehr ähnlich sind. Dennoch sind trotz identischer Eingangsparameter Unterschiede sichtbar. Als Ursache sind die divergierenden Modellansätze und damit die unterschiedlich modellierten gemeinsamen Ausfallwahrscheinlichkeiten zu sehen. Während das Modell nach Basel II die Ausfallindikatoren bezüglich eines einzelnen Zeitpunktes bestimmt, betrachtet das vorgestellte semi-analytische Modell einen Zeitraum. Dadurch erhält man trotz der identischen univariaten Ausfallwahrscheinlichkeiten und Faktorsensitivitäten unterschiedliche gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeiten und folglich unterschiedliche Ausfallkorrelationen. Zur Verdeutlichung des Ausmaßes der Unterschiede wurden in Abb. 3-22 zusätzlich Verlustverteilungen für Kreditportfolios mit (a) einer geringeren Portfoliobonität (gemischt gepunktet und gestrichelte Linie) und (b) einer höheren Portfoliobonität (gestrichelte Linie) eingezeichnet.<sup>657</sup> Insbesondere in der Relation zu diesen beiden Verteilungen sind die Unterschiede zwischen dem Modell nach Basel II und der vorgestellten Semi-Analytik für homogene Kreditportfolios als marginal zu bezeichnen. Für heterogene Kreditportfolios ist das Modell (3.199) jedoch nicht ohne weiteres anwendbar.

<sup>657</sup> Mit der veränderten Kreditqualität ändern sich sowohl die univariaten Ausfallwahrscheinlichkeiten als auch – wenn auch nur geringfügig – die Faktorsensitivitäten.

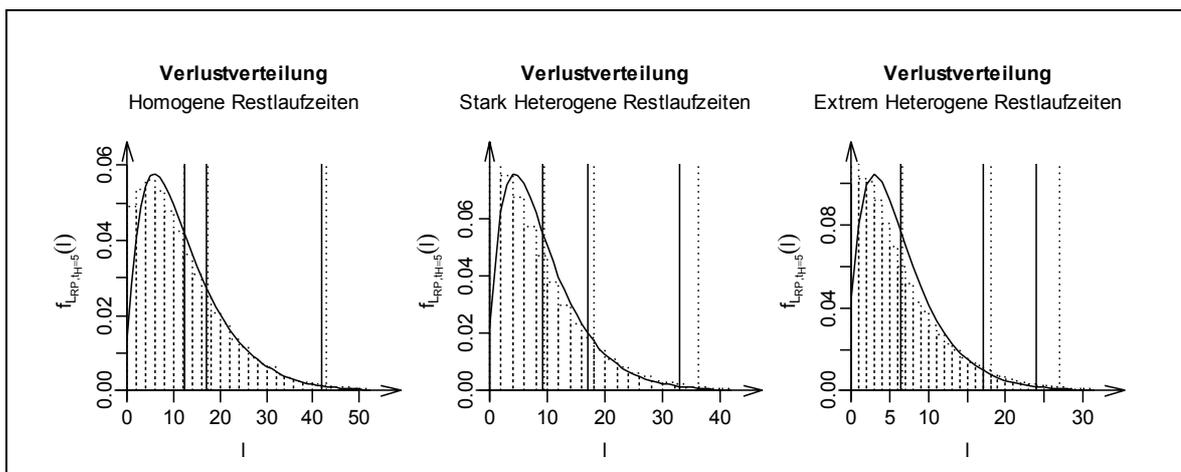
### 394 Erfassung heterogener Restlaufzeiten

Gem. (3.119) ist die Korrelation faktorendpunktbedingter zeittransformierter Prozesse  $Y_{i,t}$  im Zeitpunkt  $t$  stets positiv, zeitabhängig und insbesondere gem. (3.121) in der Nähe des Zeitpunkts  $t_0$  besonders hoch (vgl. Abb. 3-14). Als Folge waren speziell die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten für kurz laufende Kredite (3.111) nicht unabhängig voneinander.



**Abb. 3-23: Restlaufzeitverteilungen**

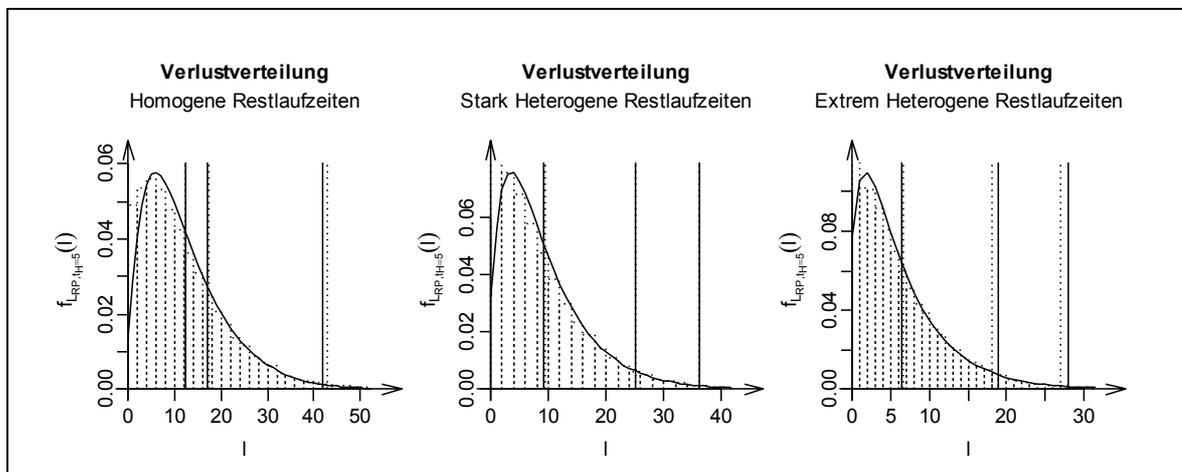
Dies führte zur Vermutung, dass die Ergebnisse der Semi-Analytik mit zunehmender Heterogenität der Restlaufzeit, d. h. mit zunehmend kurz laufenden Krediten bzw. abnehmender Restlaufzeit der Kurzläufer, wachsende Abweichungen von den Ergebnissen der Simulation aufweisen werden. Zur Überprüfung der Vermutung wird in Abb. 3-24 ein aus 100 Krediten bestehendes Portfolio betrachtet. Die Nominalwerte sind homogen und auf eins normiert. Die Verlustverteilung wird mit verschiedenen Restlaufzeitverteilungen (vgl. Abb. 3-23) für den Risikohorizont von fünf Jahren simulativ und semi-analytisch ermittelt.



**Abb. 3-24: Unabhängigkeitsapproximation bei heterogenen Restlaufzeiten**

Verlustverteilungen, Erwartungswerte sowie 5 %- und 1 %-Quantile für ein Kreditportfolio mit 100 Krediten. Die Nominalwerte sind uniform eins. Die Restlaufzeiten sind uniform (links) bzw. heterogen (mittig und rechts). Alle Kredite tragen ein „BB“-Rating. Gegenübergestellt sind simulierte Häufigkeitsverteilungen. Die Rechnungen basieren auf den Credit Curves vom Typ B nach STANDARD & POOR'S.

Für den Fall der homogenen Restlaufzeiten (vgl. Abb. 3-23 u. Abb. 3-24, links) stimmt die diskretisierte Wahrscheinlichkeitsfunktion aus dem semi-analytischen Modell mit der relativen Häufigkeitsverteilung aus der Simulation überein. Die Unabhängigkeitsapproximation zeigt kaum Auswirkungen. Die Erwartungswerte entsprechen einander. Auch die Quantile stimmen weitgehend überein. Für heterogene Restlaufzeiten (vgl. Abb. 3-23 u. Abb. 3-24, mittig) werden aber erste Unterschiede sichtbar. Während die erwarteten Verluste weitgehend einander entsprechen, zeigen sich Abweichungen in den Quantilen. Durch die Unabhängigkeitsapproximation in der Semi-Analytik verliert man einen Teil der Ausfallkorrelation. Insbesondere die 1%-Quantile fallen geringer aus. Verstärkt man den Grad der Heterogenität, indem die Restlaufzeiten der Kurzläufer weiter nach unten korrigiert werden, verstärken sich auch die Abweichungen (vgl. Abb. 3-23 u. Abb. 3-24, rechts).



**Abb. 3-25: Unabhängigkeitsapproximation bei homogenisierten Restlaufzeiten**

Verlustverteilungen, Erwartungswerte sowie 5 %- und 1 %-Quantile für ein Kreditportfolio mit 100 Krediten. Die Nominalwerte sind uniform eins. Die Restlaufzeiten wurden „homogenisiert“. Alle Kredite tragen ein „BB“-Rating. Gegenübergestellt sind simulierte Häufigkeitsverteilungen. Die Rechnungen basieren auf den Credit Curves vom Typ B nach STANDARD & POOR'S.

In der Literatur wird – unterstützt durch das Vorgehen einzelner Ratingagenturen – z. T. versucht, Kreditportfolios zu „homogenisieren“.<sup>658</sup> Im Falle der Restlaufzeiten würde dies bedeuten (a) eine durchschnittliche Portfoliorestlaufzeit zu ermitteln und (b) die durchschnittliche Portfoliorestlaufzeit jedem einzelnen Kredit zuzuordnen. Damit wäre zwar im vorliegenden Modell die Problematik der Unabhängigkeitsapproximation bei stark restlaufzeitheterogenen Kreditportfolios weitgehend entschärft, jedoch stellt sich die Frage nach der Art und Weise der Ermittlung des Durchschnitts. Vorgeschlagen wird häufig eine Nominalwertgewichtung. Damit werden die Restlaufzeiten zunächst auf die einzelnen Währungseinheiten bezogen und anschließend arithmetisch gemittelt.

<sup>658</sup> Vgl. P. Cogan et al. (2000), Rating criteria for CDOs, S. 2-8 (FITCH Report); R. Hrvatin, H. Katz und J. Schiavetta (2000), Rating criteria for ABS/MBS CDOs, S. 2-7 (FITCH Report); A. Cifuentes und G. O'Connor (1996), BET, S. 2 (MOODY'S Report).

In Abb. 3-25 wurden zunächst wie in Abb. 3-24 die pfadsimulierten relativen Häufigkeitsverteilungen der Portfolioverluste zusammen mit den Erwartungswerten sowie den 5 %- und 1 %-Quantilen für die einzelnen Restlaufzeitszenarien aus Abb. 3-23 abgetragen. Daneben wurden die diskretisierten Wahrscheinlichkeitsfunktionen auf der Basis des semi-analytischen Modells für homogenisierte Restlaufzeiten abgetragen. Im Falle der stark heterogenen Restlaufzeiten (vgl. Abb. 3-23, mittig) beträgt die nominalwertgewichtete, durchschnittliche Restlaufzeit vier Jahre. Für die extrem heterogenen Restlaufzeiten (vgl. Abb. 3-23, rechts) beträgt die nominalwertgewichtete, durchschnittliche Restlaufzeit lediglich drei Jahre. In beiden Fällen wird ein höherer Grad an Übereinstimmung erzielt. Insbesondere in der mittleren Abbildung liegen Erwartungswert und Quantile exakt übereinander. Anhand der rechten Abbildung wird jedoch die Willkür dieser Vorgehensweise deutlich. Ein hoher Grad an Übereinstimmung hat eher einen zufälligen Charakter und hängt von der jeweiligen Verteilung der Restlaufzeiten im Kreditportfolio ab. Als Ursache ist die fehlende fundamentalökonomische Fundierung der Durchschnittsbildung zu sehen.

### **395 Ausfallkorrelationen und Abhängigkeiten von Kreditausfällen im semi-analytischen Modellansatz**

Schließlich sollen die Überlegungen der Abschnitte 2432 und 2433 auf den semi-analytischen Modellansatz übertragen werden. Ähnlich wie im einfachen Unternehmenswertansatz wird die Korrelation zwischen den Ausfallindikatoren  $\{(I_i, I_j)\}_{1 \leq i, j \leq N}$  implizit durch die Modellierung einer Korrelation zwischen ausfallrisikotreibenden BROWNSchen Bewegungen  $\{(W_{i,t}, W_{j,t})\}_{1 \leq i, j \leq N, t \in [0, T]}$  erzeugt. Zwischengeschaltet über (2.50) ist die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,j}$ , ggf. spezifiziert mit einem Zeitindex  $t$ . Während im einfachen Unternehmenswertansatz gem. (2.68) die gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit mit Hilfe der bivariaten Normalverteilung bestimmt werden kann, ist nun die Möglichkeit vor- bzw. zwischenzeitlicher Kreditausfälle zu berücksichtigen.

Zunächst sollen jedoch – nur für diesen Abschnitt geltend – die Hazard Rates, Ausfall-schranken und Zeittransformationen so kalibriert werden, dass die Ergebnisse mit denen aus den Abschnitten 2432 und 2433 vergleichbar sind. Betrachtet werden drei homogene Kredite mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit von jeweils 10 %. Als Zeit- bzw. Risikohorizont  $t_H$  sei ein Jahr gewählt. Dann muss mit (3.11) eine konstante Credit Curve den Wert  $h_{i,t} = h_{j,t} = h = 0,1053605$  annehmen. Sollen die Zeittransformationen den Risikohorizont nicht verlassen, muss gem. (3.32) eine einheitliche Ausfallsschranke  $K_i = K_j = K = (-1,6449)$  gewählt werden. Die Zeittransformationen ergeben sich – wie zuvor auch – gem. (3.26). Wie im obigen Beispiel soll erneut eine Zielausfallkorrelation von  $\rho_{I_i, I_j} = 7,995844\%$ , respektive

eine gemeinsame, paarweise Ausfallwahrscheinlichkeit von  $p_{i,j}=1,719626\%$  erzeugt werden. Nach OVERBECK & SCHMIDT ist dazu die Korrelation der BROWNSchen Bewegungen mit  $0 < \rho = \rho_{w_i, w_j} < 1$  und der modifizierten BESSELFunktion  $I_k$  über folgende Beziehung zu bestimmen:<sup>659</sup>

$$\Pr[\tau_i > t_H, \tau_j > t_H] = \frac{2r_H}{\sqrt{2\pi t_H}} e^{-\frac{2r_H^2}{4t_H}} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi\theta_H}{\alpha}\right) \left[ I_{\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{\alpha}+1\right)}\left(\frac{r_H^2}{4t_H}\right) + I_{\frac{1}{2}\left(\frac{n\pi}{\alpha}-1\right)}\left(\frac{r_H^2}{4t_H}\right) \right] \quad (3.200)$$

mit :

$$\theta_H = \tan^{(-1)}\left(\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-\rho}\right), \quad r_H = -\frac{K}{\sin\theta_H}, \quad \alpha = \pi + \tan^{(-1)}\left(\frac{-\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}\right).$$

Man erhält eine Prozesskorrelation von 20,75038 %. Zu berücksichtigen sind jedoch die Approximationen der hier eingeführten Semi-Analytik, wodurch eine leicht höhere Korrelation von 22,64188 % benötigt wird.<sup>660</sup> Das semi-analytische Modell besetzt den verbliebenen Freiheitsgrad im Kontingenzwürfel und man erhält eine gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit für alle drei Kredite i. H. v.  $\pi_{000}=74,7418\%$ . Im Vergleich zum einfachen Unternehmenswertansatz ist dieser Wert lediglich in der vierten Kommastelle verschieden. Damit sind beide Modelle (im Falle homogener Kreditportfolios) im multivariaten Abhängigkeitsverhalten sehr ähnlich (vgl. auch Abb. 3-22). Der Wertunterschied ist auf den Einfluss der vorzeitigen Ausfallmöglichkeit zurückzuführen.

<sup>659</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 13. Die hier abgebildete Formel ist ein Spezialfall (Homogenität) der von OVERBECK & SCHMIDT angegebenen Gleichung. Zu Berücksichtigen ist zudem, dass hier die Ausfallschranken so kalibriert wurden, dass der verwendete Risikohorizont von einem Jahr von den Zeittransformationen unberührt bleibt.

<sup>660</sup> Der Wert wurde iterativ bestimmt.

#### 4 Transaktionsbezogene Modellanwendung zur semi-analytischen und simulativen Kreditrisikomessung von heterogenen CDO-Referenzportfolios

Das im vorhergehenden Kapitel vorgestellte Kreditrisikomodell soll im Folgenden beispielhaft Anwendung auf ein real existierendes Referenzportfolio einer aktuellen Verbriefungstransaktion finden. Die Verbriefungstransaktion sollte dabei auf einem hinreichend heterogenen Referenzportfolio basieren, um die Fähigkeiten des Kreditrisikomodells hinsichtlich der Erfassung der heterogenen Struktur überprüfen zu können. Die Heterogenität soll sich dabei auf die Nominalwerte, die Ratings sowie die Laufzeiten erstrecken. Ziel ist, neben der Entwicklung von Vorstellungen über die Größenordnungen potentieller Verluste bei realen Transaktionen, die Analyse der Einflüsse der Heterogenität des Referenzportfolios auf dessen Risikostruktur. Die einzelnen Ausprägungen der Heterogenität sollen diesbezüglich weitgehend in ceteris paribus Umgebungen analysiert werden. Die Untersuchungen sollen auch die Auswirkungen von Kredittilgungen, Portfolioreplenishments und Replenishment-Triggern erfassen. In Einzelfällen wird es sich anbieten, ausgewählte Ergebnisse mit denen von anderen, in der Literatur diskutierten Kreditrisikomodellen zu vergleichen.

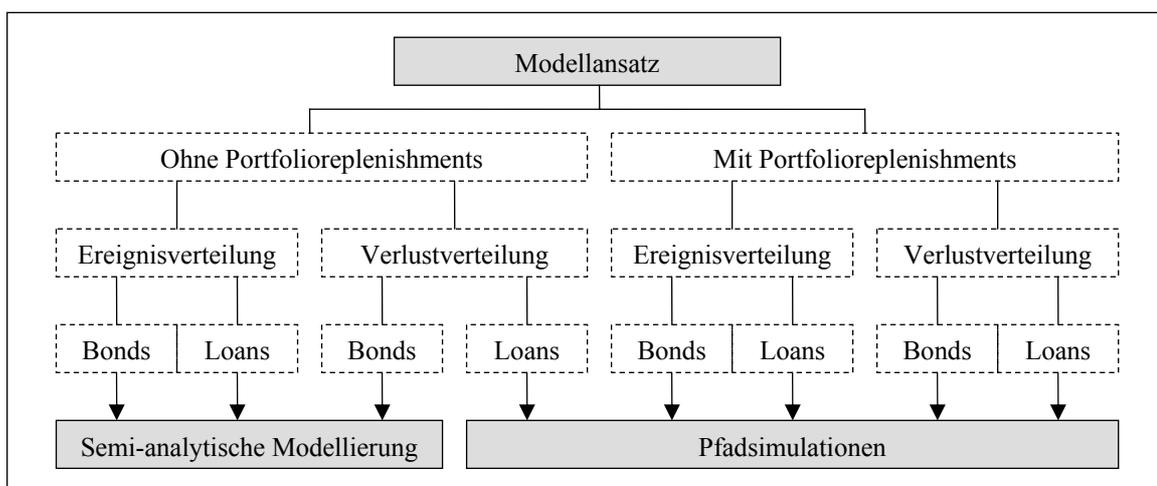


Abb. 4-1: Vorgehensweise zur Ermittlung der Ereignis- und Verlustverteilungen

Die folgenden Untersuchungen stützen sich dabei beispielhaft auf das Referenzportfolio der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion der KfW. Das Referenzportfolio erfüllt die oben angesprochenen Merkmale hinsichtlich der Heterogenität und ist darüber hinaus mit seinen Krediten an 2.916 verschiedene Schuldner<sup>661</sup> hinreichend umfangreich, um zu demonstrieren, dass mit der obigen Modellformulierung auch große Referenzportfolios mit angemessenem Zeitaufwand einer risikoanalytischen Betrachtung unterzogen werden können. Das Referenzportfolio wird jedoch zunächst anhand von (öffentlich bekannten) Portfoliocha-

<sup>661</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 67-70.

rakteristika zu rekonstruieren sein.<sup>662</sup> Nachgebildet werden insbesondere die Nominalwert-, Laufzeit-, Rating- und Recoveryverteilungen. Bei internen Analysen wird dieser zusätzliche Modellierungsschritt üblicherweise entfallen können.

Die anschließende Kreditrisikomessung stellt sowohl auf die Ereignis- als auch auf die Verlustverteilung des Referenzportfolios ab.<sup>663</sup> Dabei sind neben der Form und Lage der Ereignis- und Verlustverteilung risikotechnische Kennzahlen von besonderer Aussagekraft. Zusätzlich werden im Rahmen von Szenarioanalysen die Auswirkungen von Änderungen des makroökonomischen Umfeldes betrachtet. Die Änderungen des makroökonomischen Umfeldes werden durch Lageveränderungen der Credit Curves simuliert.<sup>664</sup> Im Mittelpunkt des Interesses wird hierbei die Sensitivität der Risikomessung auf die Lageveränderungen der Credit Curves stehen.

Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Ereignis- und Verlustverteilungen (vgl. Abb. 4-1) richtet sich danach, inwieweit Portfolioreplenishments und/oder Kredittilgungen Berücksichtigung finden. Endfällige Kredite werden kurz als „Bonds“ und Abzahlungsdarlehen als „Loans“ bezeichnet. Zunächst wenden wir uns der Modellierung ohne Portfolioreplenishments zu. Da im Falle der Ereignisverteilung sowohl für Bonds als auch für Loans die zeitliche Struktur der Ausfallereignisse bis zum Risikohorizont unbedeutend ist, kann dazu problemlos auf die semi-analytische Modellformulierung zurückgegriffen werden.<sup>665</sup> Das gleiche gilt für die Verlustverteilung für Bonds. Werden jedoch Tilgungszahlungen berücksichtigt, sind die Exposures at Default (EAD) und folglich die eintretenden Verluste insofern von den genauen Zeitpunkten der Credit Events abhängig, das mit zunehmender Überlebensdauer die EADs durch die regelmäßigen Tilgungszahlungen verringert werden. Da variierende EADs durch die semi-analytische Modellformulierung nicht erfasst werden, ist in diesem Fall auf die Pfadsimulation zurückzugreifen. Im Anschluss daran werden die Auswirkungen der Replenishments sowie der Replenishment-Trigger untersucht. Da die Replenishments stets von der zeitlichen Struktur der Ausfallereignisse abhängen und sowohl die Ereignis- als auch die Verlustverteilung beeinflussen, wird zur Modellierung ausschließlich auf die Pfadsimulation zurückgegriffen.<sup>666</sup>

---

<sup>662</sup> Vgl. Abschnitt 41.

<sup>663</sup> Vgl. Abschnitt 36 für die Ereignisverteilung und Abschnitt 37 für die Verlustverteilung eines Referenzportfolios. Gemessen werden die Auswirkungen von Kreditausfällen. Bonitätsänderungen bleiben unberücksichtigt, da sie üblicherweise nicht durch CDO-Strukturen erfasst werden.

<sup>664</sup> Vgl. zur Definition der Credit Curves Abschnitt 321. Zur Modellierung von Credit Curves siehe Abschnitt 322.

<sup>665</sup> Vgl. zur Methodik die Abschnitte 36 und 37.

<sup>666</sup> Vgl. zur Methodik den Abschnitt 38.

## 41 Kennzahlenorientierte Modellierung heterogener Referenzportfolios

Die möglichst genaue modelltheoretische Abbildung des Referenzportfolios ist notwendig, um eine realitätsnahe Vorstellung von den Ereignis- und Verlustverteilungen zu erhalten. Speziell die Modellierung der Replenishments und der begrenzten Zinsunterbeteiligung bedarf einer realistischen Gestaltung der Ausfallzeiten, der monatlichen Forderungen aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung sowie das dafür vorhandene Zinseinkommen. Dazu sind neben den Nominalwerten und Ratings, die Restlaufzeiten, die Zahlungstermine sowie die Zins- und Tilgungszahlungen aller Schuldtitel des Referenzportfolios zu erfassen.

### 411 Nominalwerte

Auf Basis der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion setzte sich das Referenzportfolio am Abschlussstag des Krediteinkaufszeitraums<sup>667</sup> (Ramp Up Period) entsprechend dem INFORMATION MEMORANDUM<sup>668</sup> sowie den NEW ISSUE REPORTS von FITCH<sup>669</sup> und MOODY'S<sup>670</sup> aus Krediten an 2.916 verschiedene Schuldner zusammen.<sup>671</sup> Alle Kredite wiesen zusammen ein Nominalvolumen (NV) i. H. v. 1 Mrd. EUR auf. Die Ausstattungsmerkmale der einzelnen Kredite sind weder dem INFORMATION MEMORANDUM noch den NEW ISSUE REPORTS zu entnehmen. Deswegen muss in diesem Kapitel ein Modellportfolio konstruiert werden, das möglichst genau dem verfügbaren, stark komprimierten Informationsstand entspricht. Für die Nominalwerte im Referenzportfolio ist bekannt, dass diese zu den nachstehend angegebenen Nominalwertanteilen vier verschiedenen Größenklassen entstammen:

In EUR	0 bis 1 Mio.	1 Mio. bis 3 Mio.	3 Mio. bis 5 Mio.	5 Mio. bis 10 Mio.
Anteil am NV	48,78 %	29,61 %	13,68 %	7,92 %

Tab. 4-1: Nominalwertanteile am Referenzportfolio<sup>672</sup>

Wird nun angenommen, dass die Nominalwerte der einzelnen Kredite gleichmäßig über die jeweiligen Größenklassen verteilt sind, ließe ein zufälliges Ziehen von Nominalwerten mit Hilfe der Gleichverteilung unter Berücksichtigung des Portfoliovolumens jedoch lediglich eine Zahl von 1.168 Krediten erwarten:

$$\frac{487,8\text{Mio}}{0,5\text{Mio}} + \frac{296,1\text{Mio}}{2\text{Mio}} + \frac{136,8\text{Mio}}{4\text{Mio}} + \frac{79,2\text{Mio}}{7,5\text{Mio}} \approx 1.168. \quad ^{673}$$

<sup>667</sup> Cut-Off Date: 30.3.2001. Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 8. Siehe auch die Auszüge aus dem INFORMATION MEMORANDUM in Anlage 21.

<sup>668</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 67-70.

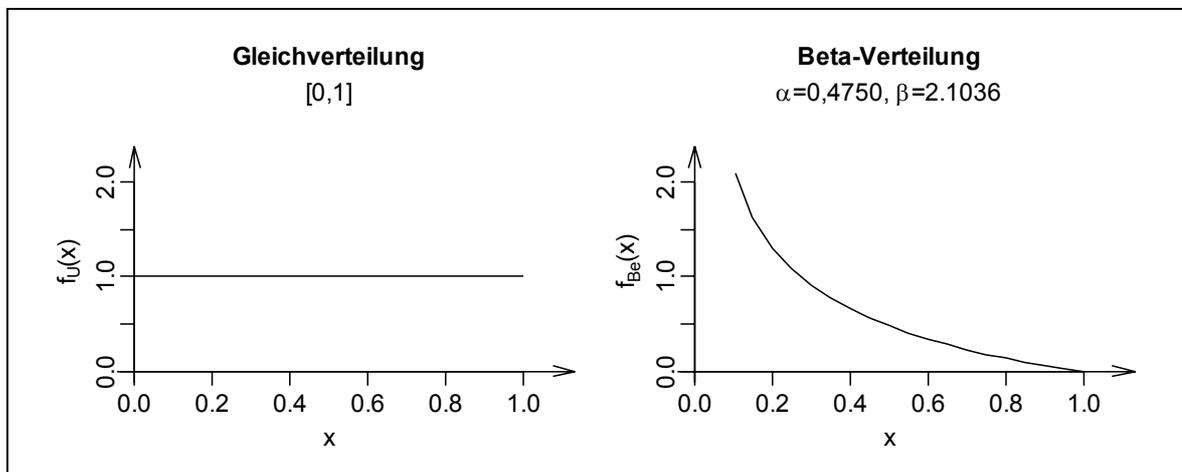
<sup>669</sup> Vgl. S. Bund et al. (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 4 f. (FITCH Report).

<sup>670</sup> Vgl. R. Schoder und M.-J. Kerschkamp (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 3 (MOODY'S Report).

<sup>671</sup> Die Anzahl der Kredite ist bei einigen KfW-Transaktionen erheblich höher als die Anzahl der Schuldner. Die Kreditzahl eines einzelnen Schuldners wird zur Vermeidung von Klumpenrisiken durch die Regelungen zur Schuldnerkonzentration (sog. „Debtor concentration thresholds“) nach oben begrenzt. Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 61, Abschnitt 5, Abs. vii, Ziff. A-L.

<sup>672</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 67.

Daraus ist zu schließen, dass eine verstärkte Präsenz von kleinen Nominalwerten in den einzelnen Größenklassen vorliegt. Nur so ist die hohe Kreditzahl von mind. 2.916 zu erklären. Die Gleichverteilung ist daher zur Ziehung von Nominalwerten geeignet zu ersetzen. Als sinnvolle Wahl erweist sich die Beta-Verteilung mit den beiden Parametern  $\alpha$  und  $\beta$ . Sie ist ebenso wie die Gleichverteilung auf dem Intervall  $[0,1]$  definiert und enthält darüber hinaus für  $\alpha=1$  und  $\beta=1$  die Gleichverteilung als Spezialfall.<sup>674</sup> Eine Verringerung des Parameters  $\alpha$  führt zu einer verstärkten Konzentration von Wahrscheinlichkeitsmasse im unteren Intervallbereich. Die Wahrscheinlichkeit für kleine Nominalwerte wächst. Eine gleichzeitige Erhöhung des Parameters  $\beta$  führt zu einem verstärkten Abzug von Wahrscheinlichkeitsmasse aus dem oberen Intervallbereich. Die Wahrscheinlichkeit für große Nominalwerte sinkt:



**Abb. 4-2: Gleichverteilung vs. Beta-Verteilung**

Mit Hilfe des Erwartungswertes einer Beta-verteilten Zufallsvariablen  $X$ ,

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad (4.1)$$

wird für alle Größenklassen einheitlich eine Beta-Verteilung genau so angepasst, dass der Erwartungswert der Kreditanzahl dem Zielwert von 2.916 entspricht. Dazu wird ausgehend von  $\alpha=1$  und  $\beta=1$  der Parameter  $\alpha$  gleichmäßig verringert und der Parameter  $\beta$  gleichmäßig erhöht bis gilt:

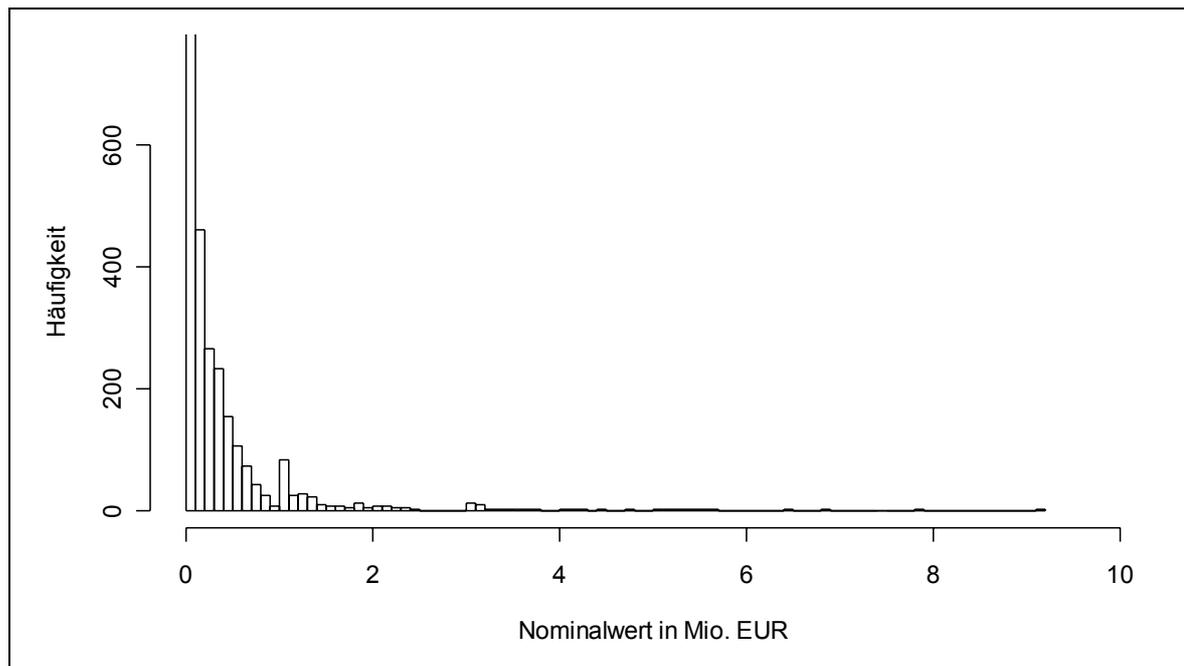
$$\frac{487,8 \text{ Mio.}}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot (1 \text{ Mio.} - 0,0003 \text{ Mio.}) + 0,0003 \text{ Mio.}} + \dots + \frac{79,2 \text{ Mio.}}{\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot (10 \text{ Mio.} - 5 \text{ Mio.}) + 5 \text{ Mio.}} = 2.916.$$

<sup>673</sup> Die Nenner enthalten die Erwartungswerte der Größenklassen unter der Gleichverteilungsannahme.

<sup>674</sup> Eine knappe Einführung zur Beta-Verteilung findet sich in G. Lehmann (2002), Statistik, S. 155-160.

Neben der gewünschten Kreditanzahl ist in der Berechnung zudem ein Mindestkreditbetrag von 300 EUR berücksichtigt.<sup>675</sup> In Abb. 4-2 sind die resultierende Dichtefunktion der Beta-Verteilung und die Dichtefunktion der Gleichverteilung gegenüberstellend abgetragen. Die ermittelten Parameter der Beta-Verteilung betragen  $\alpha=0,4750$  und  $\beta=2,1036$ .

Mit Hilfe der Beta-Verteilung lassen sich Nominalwerte aus den einzelnen Größenklassen ziehen, was zu einem Modellportfolio mit folgender Nominalwertverteilung führt:



**Abb. 4-3: Nominalwerthäufigkeiten im Modellportfolio**

Die Tendenz zu kleinen Kreditbeträgen ist insbesondere in den beiden ersten Größenklassen gut sichtbar. Zur besseren Übersicht sei zusätzlich die Anzahl der Kredite in den jeweiligen Größenklassen tabellarisch angegeben:

In EUR	0 bis 1 Mio.	1 Mio. bis 3 Mio.	3 Mio. bis 5 Mio.	5 Mio. bis 10 Mio.
Anzahl	2.643	220	40	13

**Tab. 4-2: Anzahl der Kredite in den einzelnen Größenklassen im Modellportfolio**

Ein aussagekräftiges Charakteristikum der Nominalwertverteilung des Modellportfolios ist der durchschnittliche Kreditbetrag, welcher 342.901,20 EUR beträgt und folglich, ohne dass dieser als Zielgröße bei der Anpassung der Beta-Verteilung berücksichtigt wurde, beinahe genau dem im INFORMATION MEMORANDUM angegebenen durchschnittlichen Kreditbetrag des Referenzportfolios in Höhe von 342.935,53 EUR entspricht.<sup>676</sup>

<sup>675</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 67.

<sup>676</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 67.

## 412 Ratings

Zur Qualität der Kredite im Referenzportfolio der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion finden sich im INFORMATION MEMORANDUM Angaben zur Verteilung des Nominalvolumens auf einzelne Ratingklassen auf der Basis des DRESDNER Firmenkunden-Ratings (FK-Rating).<sup>677</sup> Das DRESDNER FK-Rating reicht von Stufe „1“ bis Stufe „8“, wobei die Stufe „1“ die höchste Kreditqualität repräsentiert. Das FK-Rating bringt eine quantitative und qualitative Einschätzung der Finanzlage, der Marktpositionierung, des Geschäftsumfeldes sowie der Qualität des Managements des Emittenten durch die DRESDNER BANK zum Ausdruck. Nicht berücksichtigt werden Recovery Rates. Damit ist das DRESDNER FK-Rating von der Struktur her vergleichbar mit einem ausfallratenbasierten Rating.<sup>678</sup>

Problematisch ist, dass keine Informationen bezüglich der historischen Ausfallraten für die DRESDNER FK-Ratingklassen verfügbar sind. Da im Rahmen des PROMISE-Programms der KfW Kredite an den deutschen Mittelstand verbrieft werden<sup>679</sup>, wird im Folgenden unterstellt, dass das Referenzportfolio der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion die Struktur eines *typischen* Mittelstandsportfolios aufweist. Auf der Basis ihrer Förderaktivitäten hat die KfW die folgende Bonitätsstruktur eines typischen Mittelstandsportfolios ermittelt:<sup>680</sup>

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
Anteil	0,3 %	4,2 %	7,5 %	25,0 %	55,2 %	7,9 %	0,0 %

**Tab. 4-3: Bonitätsstruktur eines typischen Mittelstandsportfolios**

Die Bonitätsstruktur eines Mittelstandsportfolios, basierend auf Analysen von ca. 3.000 Krediten mit internen Ratings unter Berücksichtigung von Kreditbesicherungen durch die KfW im Rahmen ihrer Fördertätigkeiten. Die Werte der Verteilung für die Ratingmodifikatoren wurden aggregiert.

Die Untersuchung der KfW basiert auf einem breit diversifizierten Musterportfolio mit über 3.000 Krediten.<sup>681</sup> Ebenso wie die Kredite der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion<sup>682</sup> trug keiner der Kredite ein externes Rating. Die Bonitätseinschätzungen basieren auf internen Ratings. Anders als beim DRESDNER FK-Rating wurden jedoch Kreditbesicherungen berücksichtigt. Damit sind die Ratings mit denen von MOODY'S und STANDARD & POOR'S vergleichbar.<sup>683</sup> Approximativ wird daher die Bonitätsstruktur aus Tab. 4-3 mit dem histo-

<sup>677</sup> Vgl. hierzu und zum Folgenden Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 61, Abschnitt 5, Abs. iv u. S. 67.

<sup>678</sup> Vgl. R. Schoder und M.-J. Kerschkamp (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 3 (MOODY'S Report).

<sup>679</sup> Vgl. Abschnitt 231.

<sup>680</sup> Die Bonitätsstruktur erschien in graphischer Form in G. Taistra, C. Tiskens und M. Schmidtchen (2001), Basel II vs. Mittelstandsportfolien, S. 515, Abb. 1. Für die Bereitstellung des dahinterliegenden Zahlenmaterials gilt Dr. G. TAISTRA besonderer Dank.

<sup>681</sup> Vgl. hierzu und zum Folgenden G. Taistra, C. Tiskens und M. Schmidtchen (2001), Basel II vs. Mittelstandsportfolien, S. 514.

<sup>682</sup> Vgl. R. Schoder und M.-J. Kerschkamp (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 4 (MOODY'S Report).

<sup>683</sup> Vgl. J. Berblinger (1996), Moody's Rating, S. 31 f., 52-56 u. 84 f.; Standard & Poor's (2003), Corporate ratings criteria, S. 4, 7-10 u. 57 f.

rischen Datenmaterial der Ratingagenturen für die Ausfallraten und Ratingmigrationen verbunden.<sup>684</sup>

Zur Modellierung der Kreditratings wird angenommen, dass die DRESDNER BANK die Kredite zufällig aus ihrem Bestand ausgewählt hat. Diese Annahme erscheint insofern plausibel, als nach derzeitig geltendem Aufsichtsrecht die Verbriefung von Krediten nur dann zu einer Eigenmittelentlastung führt, wenn u. a. die zu verbriefenden Forderungen innerhalb der vertraglich vereinbarten Auswahlkriterien nach dem Zufallsprinzip (Verbot des Cherry-Picking) ausgewählt werden.<sup>685</sup>

Auf der Basis der Kreditratings geben die Ratingagenturen ein in geeigneter Weise gewichtetes Portfoliorating an. MOODY'S wies dem Referenzportfolio das Rating „Ba1/Ba2“ zu.<sup>686</sup> FITCH erteilte die Note „BBB-/BB+“.<sup>687</sup>

Die Methodik der Agenturen ist sehr ähnlich. Alle Ratings werden zunächst in Ratingfaktoren (vgl. Tab. 4-4) transformiert und anschließend mit den Anteilen der Kredite am Gesamtexposure gewichtet. Die Summe ergibt das gewichtete Portfoliorating. Die Verwendung von Ratingfaktoren ist zweierlei motiviert.<sup>688</sup> Zum einen bedarf die Durchschnittsberechnung einer Überführung der Ratingsymbole in reelle Zahlen. Zum anderen kann im Rahmen der Überführung berücksichtigt werden, dass die mit den einzelnen Ratings verbundenen historischen Verlustraten sich nicht proportional zueinander verhalten.<sup>689</sup>

FITCH	AAA	AA	A	BBB	BBB-	BB+	BB	B	CCC
Faktoren	1,3	2,3	5,0	14,0	20,0	37,0	43,5	52,2	100,0
MPR	↑ (32,5)								
MOODY'S	Aaa	Aa	A	Baa2	Baa3	Ba1	Ba2	B	C
Faktoren	1	20	120	360	610	940	1.350	2.720	10.000
MPR	↑ (1074)								

**Tab. 4-4: Ratingfaktoren von MOODY'S und FITCH sowie das Modellportfoliorating<sup>690</sup>**

<sup>684</sup> Vgl. Tab. 3-2 sowie Anlage 16, Tab. A - 1 und Tab. A - 2.

<sup>685</sup> Die geltenden Regeln basieren auf einem Rundschreiben des BaFin (BaKred) vom April 1997. Vgl. BaKred: Behandlung von ABS, Rundschreiben 04/97, S. 1-3. Darin wird den Kreditinstituten die Möglichkeit gegeben, durch die Verbriefung von Krediten im Rahmen von ABS-Transaktionen ihre Eigenmittel zu entlasten. Für die bankenaufsichtsrechtliche Anerkennung müssen folgende Voraussetzungen erfüllt sein: (1) Vollständiger Transfer des Adressenausfallrisikos, (2) Kein Cherry-Picking und (3) Keine Beeinträchtigung des Vertrauensverhältnisses zwischen dem Kreditinstitut und dem Kunden. Vgl. ausführlicher S. Jortzik und B. Müller (2002), Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate, S. 17. Für die zukünftigen Regelungen nach Basel II siehe ebenda, S. 50-53.

<sup>686</sup> Vgl. R. Schoder und M.-J. Kerschkamp (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 1 (MOODY'S Report).

<sup>687</sup> Vgl. S. Bund et al. (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 1 u. 4 (FITCH Report).

<sup>688</sup> Vgl. M. Schmidtchen und H. Krämer-Eis (2002), CDO-Ratings der Agenturen, S. 2.

<sup>689</sup> Vgl. Anlage 16.

<sup>690</sup> Vgl. P. Cogan et al. (2000), Rating criteria for CDOs, S. 6 (FITCH Report).

Die Ratingfaktoren von FITCH sind historisch motiviert und repräsentieren die Ausfallraten zur Zeit der Weltwirtschaftskrise im Jahr 1929.<sup>691</sup> Durch die Multiplikation der Ratingfaktoren mit den Einzelexposures erhält man die erwarteten Verluste der einzelnen Kredite unter dem Stressszenario von 1929. Wiedergewinnungsraten werden nicht angesetzt. Die Summation führt zum erwarteten Verlust des Gesamtportfolios. Durch die anschließende Division durch das Gesamtexposure ergibt sich die gestresste Ausfallrate für das Gesamtportfolio. Die gestresste Ausfallrate kann abschließend auf ein Ratingsymbol zurück transformiert werden. Durch die Wahl der Ratingfaktoren werden Kredite geringer Bonität stärker gewichtet als Kredite guter Bonität. Damit beeinflussen Kredite geringerer Bonität das Portfoliorating im Verhältnis zu ihrem Portfolioanteil überproportional.<sup>692</sup>

Das auf diese Weise ermittelte Rating des Modellportfolios (MPR in Tab. 4-4) beträgt auf der Basis der Ratingfaktoren nach FITCH auf der kardinalen Skala 32,5 und liegt damit – wie im entsprechenden NEW ISSUE REPORT von FITCH angegeben – zwischen den beiden Ratings „BBB-“, und „BB+“. Auf der Basis der Ratingfaktoren nach MOODY’S beträgt das Rating des Modellportfolios 1.074 und liegt – ebenfalls wie im entsprechenden NEW ISSUE REPORT von MOODY’S angegeben – zwischen den beiden Ratings „Ba1“ und „Ba2“. Infolgedessen soll davon ausgegangen werden, dass die Bonitätsstruktur des Modellportfolios der Bonitätsstruktur des Referenzportfolios weitgehend entspricht.

#### 413 Restlaufzeiten

Auch zu den Restlaufzeiten der Kredite stehen relativ wenige Informationen zur Verfügung. Die kürzeste Restlaufzeit beträgt weniger als einen Monat. Die längste Restlaufzeit beträgt 60 Monate und entspricht damit der Restlaufzeit des Master-CDS, der Restlaufzeit der durch die KfW emittierten Certificates of Indebtedness, der CDSs sowie der durch die PROMISE-K 2001-1 PLC emittierten CLNs.<sup>693</sup> Laut INFORMATION MEMORANDUM verteilen sich die Kredite auf folgende Restlaufzeitklassen:

Restlaufzeit	bis 12	13-24	25-36	37-48	49-60 Monate
Anteil	25,60 %	21,34 %	19,42 %	17,59 %	16,05 %

**Tab. 4-5: Verteilung der Restlaufzeiten im Referenzportfolio**<sup>694</sup>

<sup>691</sup> Vgl. M. Schmidtchen und H. Krämer-Eis (2002), CDO-Ratings der Agenturen, S. 3, Fn. 11.

<sup>692</sup> Vgl. P. Cogan et al. (2000), Rating criteria for CDOs, S. 6 (FITCH Report).

<sup>693</sup> Die Referenzportfolios einiger Transaktionen enthalten, abweichend hiervon, Kredite mit Restlaufzeiten, die über die der ABS-Struktur hinausgehen. Im Falle eines Credit Events werden zur Ermittlung der Verlusthöhe jedoch nur diejenigen Zahlungen herangezogen, die vor dem Laufzeitende der ABS-Transaktion fällig gewesen wären. Diese Struktur ist insbesondere für statische Referenzportfolios wie das der PROMISE-XXS-2003-1 PLC-Transaktion interessant. Vgl. T. Klotz, J. Lindner und M. Erickson (2003), Promise-XXS-2003-1 plc, S. 2 u. 5 f. (MOODY’S Report).

<sup>694</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 67.

Die durchschnittliche Restlaufzeit (Weighted Average Life, WAL), gebildet aus den Forderungsbeträgen<sup>695</sup> (Outstanding Nominal Value, ONV), gewichtet mit den Restlaufzeiten,

$$WAL_{RP} = \frac{\sum_{i=1}^N ONV_i \cdot T_i}{\sum_{i=1}^N ONV_i}, \quad (4.2)$$

betrug am Abschlussstag des Krediteinkaufszeitraums 2,4 Jahre.<sup>696</sup> Zwar kann sich die Verteilung der Restlaufzeiten im Portfolio während der Restlaufzeit der Transaktion durch vorgenommene Replenishments verändern, die gewichtete Restlaufzeit des Referenzportfolios darf jedoch den Wert von 2,5 Jahren nicht überschreiten.<sup>697</sup>

Den Krediten im Modellportfolio wurden entsprechend der Verteilung aus Tab. 4-5 zufällig Restlaufzeiten zwischen einem und 60 Monaten zugeordnet. Die minimale Restlaufzeit im Modellportfolio beträgt ein Monat. Die maximale Restlaufzeit ist 60 Monate. Die gewichtete Restlaufzeit des Modellportfolios beträgt 2,34 Jahre. Die Verteilungen der Restlaufzeiten im Referenzportfolio (RP) und Modellportfolio (MP), gemessen anhand der Nominalvolumina, lesen sich in vergleichender Gegenüberstellung wie folgt:

Restlaufzeit	bis 12	13-24	25-36	37-48	49-60 Monate
Anteil (RP)	256 Mio.	213 Mio.	194 Mio.	176 Mio.	160 Mio.
Anteil (MP)	240 Mio.	207 Mio.	206 Mio.	154 Mio.	193 Mio.

**Tab. 4-6: Verteilung der Restlaufzeiten im Referenzportfolio (RP) und Modellportfolio (MP) in Nominalvolumina**

#### 414 Kapitaldienst

Weder das INFORMATION MEMORANDUM noch die NEW ISSUE REPORTS von FITCH und MOODY's enthalten Angaben bezüglich der Zins- und Tilgungszahlungen des Referenzportfolios. Überraschend ist dies insofern, da zumindest die Tilgungsmodalitäten einen wesentlichen Einfluss auf die Verlustrisiken der CDOs haben. Die Zinszahlungen dürften mit Blick auf die begrenzte Zinsunterbeteiligung vorrangig für Investoren des FLPs von Interesse sein.<sup>698</sup> Typischerweise gewährt die KfW im Rahmen ihrer Fördertätigkeiten Ab-

<sup>695</sup> Die ausstehenden Kreditbeträge im Zeitpunkt  $t_0$  werden im Rahmen der Modellierung mit den Nominalwerten gleichgesetzt.

<sup>696</sup> Vgl. S. Bund et al. (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 4 f. (FITCH Report).

<sup>697</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 63, Abschnitt 5, Abs. xi. Für den Fall, dass die kumulierten Kreditsicherheiten den Wert von 30 % des ausstehenden Portfolioforderungsbetrags unterschreiten, darf die gewichtete Restlaufzeit nur maximal 1,75 Jahre betragen. Vgl. ebenda, S. 63, Abschnitt 5, Abs. ix.

<sup>698</sup> Da das FLP bei der der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion nicht mit ABS verbriefte wurde und folglich die ISP nicht im direkten Zusammenhang mit den emittierten ABS steht, bedarf es nicht notwendigerweise der Angaben über die Zinszahlungen aus dem Referenzportfolio.

zahlungs- bzw. Tilgungsdarlehen<sup>699</sup> mit halbjährlicher Tilgungsleistung und vierteljährlicher Zinszahlung.<sup>700</sup> Annuitätendarlehen werden seltener und nur für bestimmte Zwecke gewährt.<sup>701</sup> Daher werden für die Kredite des Modellportfolios ebenfalls halbjährliche Tilgungsleistungen und vierteljährliche Zinszahlungen angenommen. Die Zinssätze seien konstant<sup>702</sup> und richten sich nach der Kreditwürdigkeit des Kreditnehmers. Da die genauen Zinskonditionen der Kredite des Referenzportfolios nicht vorliegen, einzelne Kredite bereits einige Jahre vor der Zusammenstellung des Referenzportfolios unter anderen Marktbedingungen vergeben worden sein könnten und zudem im Rahmen der Replenishments neue Kredite zu dann veränderten Marktkonditionen hinzukommen werden, sollen durchschnittliche, ratingabhängige Zinssätze verwendet werden. Als Indikatoren für die Höhe sollen von MERRILL LYNCH für den Euroraum ermittelte Corporate Bond-Indizes dienen:

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B
Index	ER10	ER20	ER30	ER40	HE10	HE20
Durchschnitt	4,55 %	4,76 %	5,13 %	5,72 %	9,87 %	11,81 %

**Tab. 4-7: Portfoliozinssätze**

BLOOMBERG-Symbole und Durchschnittswerte der täglichen Daten des Zeitraums vom 04.01.1999 bis 21.12.2003 (5 Jahre) der verwendeten MERRILL LYNCH Corporate Bond-Indizes für den Euroraum.

Die Indizes zeigen die geeignet gewichteten Durchschnittsrenditen von börslich gehandelten Corporate Bonds des Euroraums mit entsprechender Ratingeinstufung. Das indikative Heranziehen von Durchschnittswerten dieser Indizes impliziert, dass (a) der verwendete Durchschnittsbildungszeitraum indikativ für die Laufzeit der betrachteten CDO-Transaktion ist und (b) die Konditionen des Kreditmarktes sich nicht wesentlich von den Konditionen des Corporate Bond Marktes unterscheiden. Prämien für zusätzliche Risiken, z. B. Liquiditäts- oder Informationsrisiken, werden vernachlässigt.

#### 415 Recovery Rates

Orientierung für die Modellierung der Recovery Rates bieten empirische Untersuchungen von ALTMAN & KISHORE<sup>703</sup>, MOODY'S<sup>704</sup> sowie STANDARD & POOR'S<sup>705</sup>. Die Studien zei-

<sup>699</sup> Für die einzelnen Darlehensformen nach dem Kriterium der Tilgung siehe bspw. R. Zantow (2004), Finanzierung, S. 128-131.

<sup>700</sup> Vgl. P. Viala (2000), KfW's PROMISE, S. 7 f. Üblicherweise werden zwei tilgungsfreie Anlaufjahre gewährt. Da ABS-Transaktionen jedoch auf regelmäßige Cash Flows angewiesen sind, ist davon auszugehen, dass ausschließlich Kredite verbrieft wurden, bei denen eine etwaige Anlaufzeit vorüber ist.

<sup>701</sup> Annuitätendarlehen werden bspw. im Rahmen des KfW-Wohneigentumprogramms, des KfW-CO2-Gebäudesanierungsprogramms und des KfW-Wohnraum-Modernisierungsprogramms gewährt.

<sup>702</sup> Die Zinssätze werden i. d. R. für zehn Jahre fixiert. Die gegenwärtigen Konditionen sind der im WWW bereitgestellten KfW-Konditionentabelle zu entnehmen:

<http://www.kfw-formularsammlung.de/Konditionen/Konditionentabelle3.pdf> (geladen am 12.08.2004).

<sup>703</sup> Vgl. E. Altman und V. Kishore (1996), Recoveries on defaulted bonds, S. 58.

<sup>704</sup> Vgl. D. Hamilton et al. (2003), Default & recovery rates, S. 20 f. (MOODY'S Studie).

<sup>705</sup> Vgl. K. VandeCastle, D. Keisman und R. Yang (2001), Insights into recoveries, S. 81-86; R. Bos (2003), Initial trading price: Poor recovery indicator, S. 63-66 (STANDARD & POOR'S Studien).

gen, dass – erwartungsgemäß – Recovery Rates maßgeblich von der Seniorität der Finanztitel innerhalb der Schuldtitelrangfolge bestimmt werden. Den Ergebnissen von STANDARD & POOR'S folgend, lagen die Werte der letzten 15 Jahre – durchschnittlich betrachtet – zwischen 18,7 % (Junior Subordinated) und 81,6 % (Bank Debt).<sup>706</sup> In den letzten fünf Jahren waren jedoch geringere Quoten zu beobachten. Sie lagen zwischen 2,5 % (Junior Subordinated) und 74,3 % (Bank Debt). Senior Notes wiesen Werte zwischen 16,1 % und 47,2 % bei hohen Standardabweichungen von ca. 30 % auf:

Studie		MOODY'S <sup>707</sup>		STANDARD & POOR'S <sup>708</sup>	
Größe		Mittelwert	Volatilität	Mittelwert	Volatilität
Bank Debt		---	---	74,3 %	31,4 %
Notes	Senior Secured	53,80 %	26,86 %	47,2 %	36,9 %
	Senior Unsecured	51,13 %	25,45 %	31,8 %	33,7 %
	Senior Subordinated	38,52 %	23,81 %	16,1 %	26,7 %
	Subordinated	32,74 %	20,18 %	15,0 %	24,7 %
	Junior Subordinated	17,09 %	10,90 %	2,5 %	4,1 %

**Tab. 4-8: Mittelwerte und Standardabweichungen von Recovery Rates**

Alle Kredite des Referenzportfolios werden von den Agenturen als „unsubordinated“ klassifiziert.<sup>709</sup> Die Recovery Rates dürften daher im oberen Viertel der Bandbreite in Tab. 4-8 zu finden sein. Die durchschnittliche Portfoliobesicherung wird mit 54 % des ausstehenden Portfolioforderungsbetrags angegeben.<sup>710</sup> Dennoch sind vorsichtige bzw. vorsichtigere Modellierungsansätze geboten. Die DRESDNER BANK ordnet bei mehreren Schuldtiteln gegenüber einem einzelnen Schuldner nicht immer den einzelnen Krediten spezifische Kreditbesicherungen zu. Vielmehr legt die Bank die Kreditbesicherungen des jeweiligen Schuldners auf die einzelnen Schuldtitel um. Die damit einhergehenden zusätzlichen Unsicherheiten sollten sich in konservativen Modellierungsannahmen niederschlagen. FITCH nimmt eine Recovery Rate von 50 % an.<sup>711</sup> MOODY'S modellierte mit 35 % - 40 % sogar noch deutlich vorsichtiger.<sup>712</sup>

Zu berücksichtigen ist ebenfalls, dass im Rahmen der Portfolioreplenishments die Qualität des Kollaterals abnehmen kann. Der minimal erlaubte durchschnittliche Wert der Sicher-

<sup>706</sup> Vgl. R. Bos (2003), Initial trading price: Poor recovery indicator, S. 64.

<sup>707</sup> Vgl. JPMorgan (1997), CM™ Technical Document, S. 78. Vgl. auch die Werte in L. Carty und D. Lieberman (1997), Historical default rates, S. 11 f. u. S. 15.

<sup>708</sup> Vgl. R. Bos (2003), Initial trading price: Poor recovery indicator, S. 66 (STANDARD & POOR'S Studie).

<sup>709</sup> Vgl. S. Bund et al. (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 5 (FITCH Report).

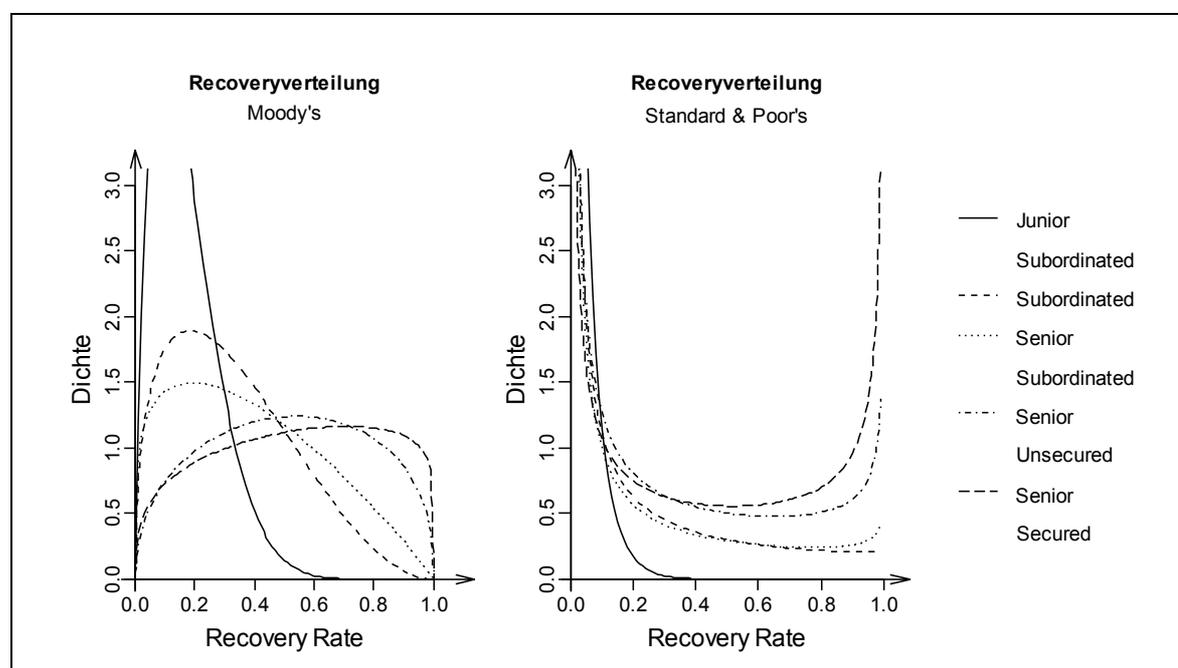
<sup>710</sup> Vgl. R. Schoder und M.-J. Kerschkamp (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 5 (MOODY'S Report).

<sup>711</sup> Vgl. S. Bund et al. (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 5 (FITCH Report).

<sup>712</sup> Vgl. R. Schoder und M.-J. Kerschkamp (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 5 (MOODY'S Report).

heiten wird dabei mit 30 % des Nominalvolumens beziffert.<sup>713</sup> Für gewichtete Portfolio-  
restlaufzeiten von weniger als 1,75 Jahren darf dieser Wert jedoch beliebig unterschritten  
werden.<sup>714</sup> Gestützt wird der Grenzwert von 30 % allerdings durch die Tatsache, dass die  
minimale Kreditbesicherung auf Einzelkreditbasis am Abschluss des Krediteinkaufs-  
zeitraums nicht weniger als 30 % betrug.<sup>715</sup>

Sofern in dieser Arbeit durchschnittliche Recovery Rates Verwendung finden, wird ein  
pessimistisches Szenario mit einer durchschnittlichen Recovery Rate von 30 % und ein  
optimistisches Szenario mit einer durchschnittlichen Recovery Rate i. H. d. ausgewiesenen  
durchschnittlichen Portfoliobesicherung von 54 % angenommen. Auf einen einzelnen Kre-  
dit bezogen, werden die durchschnittlichen Recovery Rates als deterministisch angesehen.



**Abb. 4-4: Recoveryverteilungen von Bonds und Loans**

Theoretische Recoveryverteilungen basierend auf empirisch ermittelten Erwartungswerten und Standardab-  
weichungen gem. Tab. 4-8. Den empirisch ermittelten Erwartungswerten und Standardabweichungen wurden  
Beta-Verteilungen angepasst.

Sollen die Recovery Rates stochastisch gestaltet werden, stellt sich die Frage nach empiri-  
sch belegt Recoveryverteilungen. Empirische Studien – insbesondere diejenigen der  
Ratingagenturen – geben jedoch lediglich Auskunft über historische Mittelwerte und Stan-  
dardabweichungen, nicht jedoch über die Art der Verteilung. Da Recovery Rates Werte  
innerhalb des Bereichs  $[0,1]$  annehmen, wurde in der Literatur die Beta-Verteilung vorge-  
schlagen.<sup>716</sup> Sie lässt sich mit Hilfe des Mittelwertes und der Standardabweichung voll-

<sup>713</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 63, Abschnitt 5, Abs. ix.

<sup>714</sup> Vgl. Abschnitt 413.

<sup>715</sup> Vgl. R. Schoder und M.-J. Kerschkamp (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 5 (MOODY'S Report).

<sup>716</sup> Vgl. JPMorgan (1997), CM™ Technical Document, S. 80.

ständig beschreiben. In Abb. 4-4 sind Dichtefunktionen von entsprechenden Recoveryverteilungen graphisch abgetragen. Die Verteilungsparameter  $\alpha$  und  $\beta$  wurden dabei auf der Basis der Erwartungswerte und Standardabweichungen aus Tab. 4-8 kalibriert:

$$\alpha = \frac{\mu}{\theta}, \quad (4.3)$$

$$\beta = \frac{1-\mu}{\theta}, \quad (4.4)$$

mit :

$$\theta = \frac{\sigma^2}{\mu(1-\mu) - \sigma^2}.$$

Es wird deutlich, dass in Abhängigkeit der Eingangsparameter die Form der Beta-Verteilung stark variieren kann. Während die Mittelwerte und Standardabweichungen gem. den Untersuchungen von MOODY'S zu Verteilungen führen, die relativ wenig Wahrscheinlichkeitsmasse den Randbereichen des Definitionsbereichs zuordnen (links), wirken die Dichtefunktionen, basierend auf den Mittelwerten und Standardabweichungen aus den Untersuchungen von STANDARD & POOR'S, beinahe bimodal (rechts). Es befindet sich relativ viel Wahrscheinlichkeitsmasse in den Randbereichen des Definitionsbereichs und relativ wenig Wahrscheinlichkeitsmasse im mittleren Bereich. Ursache dafür sind die kreditklassenübergreifend höheren Standardabweichungen. Der bimodale Verteilungscharakter wirkt zunächst unplausibel, scheint jedoch in empirischen Studien – zumindest für Bankkredite – Bestätigung zu finden. Untersuchungen von ASARNOW & EDWARDS<sup>717</sup> zeigen jedoch, dass dabei bedeutend mehr Wahrscheinlichkeitsmasse im Bereich der oberen zweistelligen Recovery Rates, verglichen mit dem Bereich der unteren einstelligen Recovery Rates, zu finden ist, als es die Dichtefunktionen in Abb. 4-4 vermuten lassen. Trifft diese Beobachtung generell für senioritätsmäßig nicht nachgeordnete Kredite (unsubordinated) zu, dann ist dies eher mit den Dichtefunktionen nach MOODY'S vereinbar.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden, trotz aller Kritik an der Beta-Verteilung, Recovery Rates – sofern diese von stochastischer Natur sein sollen – mit einer Beta-Verteilung modelliert. Der Erwartungswert beträgt dabei 30 %. Dadurch werden die resultierenden Ergebnisse mit denen auf der Basis der durchschnittlichen Recovery Rate von 30 % vergleichbar. Die Standardabweichung soll wahlweise 10 %, 20 %, 30 % und 40 % betragen. Insbesondere für 40 % weist die Recoveryverteilung bimodale Charakteristika auf.

---

<sup>717</sup> Vgl. E. Asarnow und D. Edwards (1995), Loss on defaulted bank loans, S. 11-23.

## 416 Replenishments

Beim Referenzportfolio der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion handelt es sich um einen revolving Pool. Während der Laufzeit der Transaktion können insbesondere teilweise oder vollständig amortisierte Kredite durch neue Kredite ersetzt werden, um somit das Portfolio aufzufüllen (engl.: to replenish).<sup>718</sup> Nicht ersatzfähig sind ausgefallene Kredite.<sup>719</sup>

Die Replenishments haben unter Einhaltung der „Eligibility Criteria“<sup>720</sup> und „Replenishment Conditions“<sup>721</sup> mit dem Zweck zu erfolgen, zum Schutze der Investoren, der Portfoliodiversifikation, der Portfoliobonität sowie der Portfoliorestlaufzeit Stabilität zu verleihen. Im Rahmen der Modellbetrachtung wird dies gewährleistet, indem im Falle einer vorzunehmenden Portfolioauffüllung, die notwendigen Kredite zufällig (gleichverteilt) aus dem ursprünglichen Modellportfolio unter Anpassung der Restlaufzeit<sup>722</sup> gezogen werden.<sup>723</sup> Dabei wird stets sichergestellt, dass der ursprüngliche Portfolionominalbetrag abzüglich der eingetretenen und kumulierten Verluste ex post der Sicherheitsverwertungen (Recoveries) nicht überschritten wird. Da die Restlaufzeit des am längsten laufenden Kredites nicht die Restlaufzeit der ABS-Transaktion überschreiten darf, sinkt im Zuge der fortschreitenden Transaktionslebensdauer die durchschnittliche Restlaufzeit.

Es ist zu erwarten, dass die zusätzlich aufgenommenen Kreditrisiken die Ereignis- und Verlustverteilung erheblich beeinflussen. Zum Schutze der Investoren und zur Feinsteuerung der Lage und Form der Verlustverteilung kommen daher Replenishment-Trigger zum Einsatz. Zumeist werden mehrere ineinander greifende Trigger zur Berücksichtigung der zeitlichen Struktur des technisch-organisatorischen Prozesses der Kreditabwicklung definiert.<sup>724</sup> Wesentlich für die Modellbildung bleibt, dass mit Überschreitung einer bestimmten Verlustgrenze, die Replenishments ausgesetzt werden. Im Rahmen dieses Modells finden Replenishments statt, solange die kumulierten realisierten Verluste, ex post der Sicherheitsverwertungen, 1.2 % des ursprünglichen Portfolionominalwertes von 1 Mrd. Euro (=12 Mio. EUR) nicht überschreiten.

---

<sup>718</sup> Vgl. S. Bund et al. (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 4 (FITCH Report).

<sup>719</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 60, Abschnitt 5, Abs. i.

<sup>720</sup> Vgl. zu den „Eligibility Criteria“ Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 59 f., Abschnitt 4, Ziff. (a)-(v).

<sup>721</sup> Vgl. zu den „Replenishment Conditions“ Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 60-64., Abschnitt 5, Abs. i-xiii.

<sup>722</sup> Die Kredite beginnen erneut zu laufen. Maximal kann jedoch die neue Restlaufzeit der verbleibenden Restlaufzeit der ABS-Transaktion entsprechen.

<sup>723</sup> Aufgrund des Zufallsmoments ist es denkbar, dass einzelne Bedingungen für kurze Zeit verletzt sind. Um jedoch den Simulationsaufwand vertretbar zu halten, soll das in Kauf genommen werden.

<sup>724</sup> Insbesondere können replenishmentshindernde Tatbestände durch sog. „Late Recoveries“ geheilt werden. Die Replenishment-Trigger werden daher als „Suspension Events“ bezeichnet. Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 60 f., Abschnitt 5, Abs. i-iii und S. 28, Abschnitt 8.2.

#### 417 Komplexitätsreduktion durch Bänderbildung

Ähnlich der Vorgehensweise von CSFB bei der Formulierung von CreditRisk+™ werden die Kredite in Exposure-Bänder unterteilt.<sup>725</sup> Ziel der Bänderbildung ist die Reduktion des Rechenaufwandes zur Ermittlung der Verlustverteilungen mit Hilfe der (wahrscheinlichkeits)erzeugenden Funktionen.

Für ein Referenzportfolio, bestehend aus 2.916 Krediten mit einem Portfolionominalvolumen von EUR 1 Mrd., ermöglicht erst die Bänderbildung eine semi-analytische Ermittlung der Verlustverteilung mit Hilfe der erzeugenden Funktion. Der Grund liegt in der außerordentlich großen Anzahl von Koeffizienten, die im Rahmen der Ermittlung der erzeugenden Funktion zu berechnen wäre. Sind alle Verlustausprägungen durch geeignete Kreditkombinationen erzielbar, beträgt deren Anzahl 1 Mrd. plus eins.<sup>726</sup>

Zur Bildung der Bänder werden sämtliche Exposures als ganzzahlige Vielfache einer Basiseinheit  $L$  ausgedrückt. Dazu werden alle Exposures durch die Basiseinheit dividiert und auf die nächste natürliche Zahl gerundet.<sup>727</sup> Da das Portfolio Kredite mit sehr kleinen Exposures enthält, ist im Rahmen der Rundung sicherzustellen, dass die Rundung nicht zum Wert null führt und der betroffene Kredit aus der Portfoliobetrachtung herausfällt:

$$D_{i,L} = \max\left(\left\lfloor \frac{D_i}{L} \right\rfloor, 1\right). \quad (4.5)$$

Infolgedessen wird der Wertebereich des Portfolioverlustes in Klassen der Größe  $L$  eingeteilt. Verluste durch Ausfallereignisse werden den einzelnen Klassen zugeordnet. Die Klassen werden durch die Klassengrenzen repräsentiert. Die Nominalwerte der einzelnen Kredite werden somit durch ein gerundetes Vielfaches der Basiseinheit  $L$ , d. h.  $D_{i,L} * L$ , ersetzt. Dadurch wird die Zahl möglicher Ausfallausprägungen durch diverse Kreditkombinationen reduziert und die Zahl der Koeffizienten der erzeugenden Funktion sinkt erheblich. Die Rechnungen können auf der Basis der gerundeten Vielfachen mit anschließender Volumenadjustierung erfolgen. Die Anzahl der Potenzen der komplexitätsreduzierten erzeugenden Funktion ergibt sich aus der Summe aller gerundeten Vielfachen:<sup>728</sup>

$$k = 1 + \sum_i^N D_{i,L}. \quad (4.6)$$

<sup>725</sup> Vgl. CSFB(1997), CR+™ Technical Document, S. 35-38 (Appendix A).

<sup>726</sup> Der zusätzliche Koeffizient berücksichtigt die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit, d. h. die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Verlust null beträgt.

<sup>727</sup> Vgl. M. Gordy (2000), Anatomy of credit risk models, S. 123.

<sup>728</sup> Dabei wird davon ausgegangen, dass alle Klassen mit positiver, von null verschiedener Wahrscheinlichkeit Verluste enthalten. Ist dies nicht der Fall, ist die Anzahl der Koeffizienten entsprechend geringer.

Die Bänder- bzw. Klassenbildung stellt eine Approximation dar.<sup>729</sup> Unter der Voraussetzung, dass das Referenzportfolio groß und die Klassengröße bezüglich des maximal möglichen Verlustes sowie der durchschnittlichen Kredithöhe klein ist, dürften die Auswirkungen auf die Verlustverteilung des Portfolios nicht signifikant sein. Für das CREDITRISK+™ Modell konnten analytische Studien diese These bestätigen.<sup>730</sup> Insbesondere hatte die genaue Wahl der Basiseinheit kaum einen Einfluss. Das hier betrachtete Referenzportfolio enthält jedoch sehr viele Kleinstkredite. Daher soll der Einfluss der Approximation anhand bedingter Verlustverteilungen für die Basiseinheiten EUR 12.000, 25.000, 50.000 und 100.000 im Vergleich zu einer Punktsimulation ohne Diskretisierung untersucht werden.

$L$	12.000	25.000	50.000	100.000
Bänderzahl	198	124	77	46
$Max(D_{i,L})$	763	366	183	92
Koeffizientenzahl	83.610	40.453	20.617	10.848
$\sum D_{i,L} * L - \sum D_i$	EUR 3.408.000	EUR 11.400.000	EUR 30.900.000	EUR 84.800.000
$\sum  D_{i,L} * L - D_i $	EUR 10.996.202	EUR 24.778.934	EUR 55.684.576	EUR 130.221.414

**Tab. 4-9: Bändercharakteristika für das Referenzportfolio**

Die Charakteristika der Diskretisierungen sind in Tabelle Tab. 4-9 eingetragen. Neben der Anzahl der Bänder sowie der Koeffizientenzahl der erzeugenden Funktion sind auch die Auswirkungen der Approximation auf den Portfolionominalbetrag (4. Zeile) sowie auf die Einzelkreditnominalbeträge (5. Zeile) aufgeführt. Erwartungsgemäß steigen die Abweichungen mit wachsender Klassengröße an. Die Größenordnungen der Abweichungen sind jedoch insbesondere für die Basisgrößen EUR 12.000 und EUR 25.000 unter Berücksichtigung der Größe des Referenzportfolios vernachlässigbar bzw. vertretbar gering. Die Zahl der Koeffizienten der erzeugenden Funktion nimmt mit der Zunahme der Klassengröße ab. Eine Verdoppelung der Basiseinheit führt näherungsweise zu einer Halbierung der Zahl der Koeffizienten.

Die Auswirkung der Klassenbildung auf die (bedingte) Verlustverteilung ist in der Abb. 4-5 erkennbar. Dazu wurden die verstetigten Wahrscheinlichkeitsfunktionen (Dichtefunktionen) auf der Basis der erzeugenden Funktionen dem Histogramm aus der Simulation gegenübergestellt. Da mit zunehmender Klassengröße die gerundeten Vielfachen abnehmen und somit das Referenzportfolio auf der Basis der gerundeten Vielfachen an Volumen einbüßt, wurden die Dichtefunktionen ähnlich der Vorgehensweise zur Anpassung von

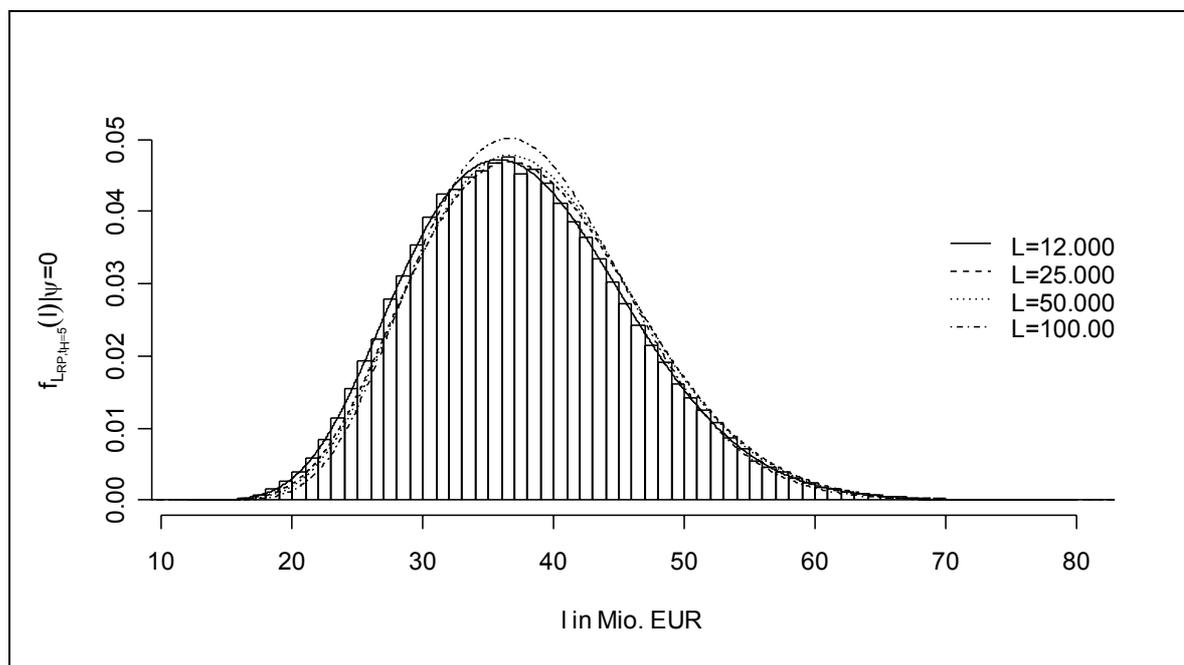
<sup>729</sup> Vgl. auch CSFB(1997), CR+™ Technical Document, S. 35 (Appendix A).

<sup>730</sup> Vgl. M. Gordy (2000), Anatomy of credit risk models, S. 140.

Klassenbreiten eines Histogramms<sup>731</sup> entlang der Abszisse mit einem größenadjustierenden Faktor  $F_L$  „gestreckt“ und entlang der Ordinate mit demselben Faktor<sup>732</sup> „gestaucht“:

$$F_L = \frac{\sum_i^N D_i}{\sum_i^N D_{i,L}} \approx L. \quad (4.7)$$

Der größenadjustierende Faktor  $F_L$  entspricht ungefähr der Basiseinheit  $L$ . Anders als bei einer Korrektur mit der Basiseinheit wird jedoch der Fehler bezüglich des Portfolionominalvolumens berücksichtigt (vgl. Tab. 4-9).



**Abb. 4-5: Auswirkung der Bänderbildung auf die bedingte Verlustverteilung**

Graphische Gegenüberstellung der bedingten Verlustverteilungen des Referenzportfolios für den Risikohorizont von 5 Jahren, ermittelt (a) durch eine Punktsimulation mit  $10^5$  Szenarien (Histogramm) und (b) mit Hilfe der erzeugenden Funktionen (Linien) für die Basiseinheiten EUR 12.000, 25.000, 50.000 und 100.000. Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S. Der systematische Faktor  $\psi$  und die Recovery Rate betragen null.

Man erkennt deutlich, dass sich die Dichtefunktionen mit zunehmender Klassenbreite vom Histogramm entfernen. Während die Approximationsfehler für die Basiseinheiten EUR 12.000 und EUR 25.000 als vernachlässigbar anzusehen sind, zeichnet sich ab, dass mit darüber hinaus gehenden Klassenbreiten die Approximationsfehler nicht im akzeptablen Bereich liegen. Daher wird in dieser Arbeit mit einer Klassenbreite von EUR 12.000 (Abb. 4-5, durchgezogene Linie) gearbeitet.

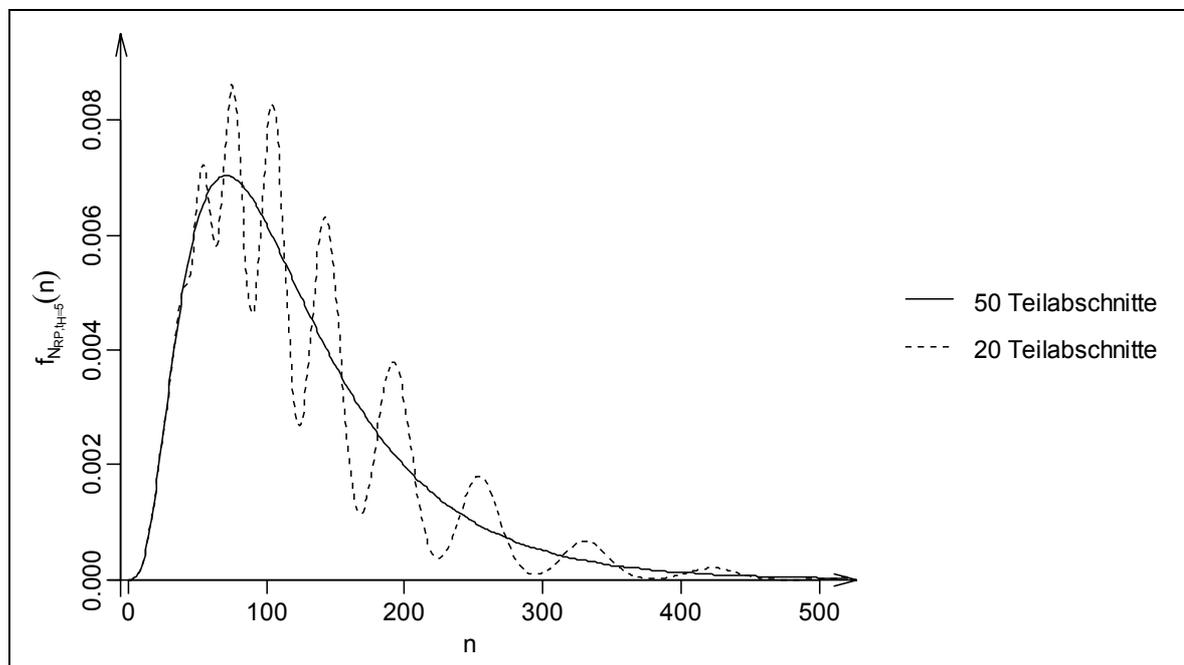
<sup>731</sup> Für eine anschauliche Darstellung zur Verstetigung von Verteilungen siehe J. Völker (2000), VaR-Modelle, S. 80-83.

<sup>732</sup> Die Fläche unterhalb der Dichtefunktion wird somit nach der horizontalen Verzerrung wieder auf den Wert eins normiert.

## 42 Kreditrisikomessung mit Ereignisverteilungen

### 421 Ereignisverteilungen ohne Portfolioreplenishments

Die Ereignisverteilungen werden im Folgenden aus den bedingten erzeugenden Funktionen  $G_{N_{RP,t}}(z)|\Psi$  gem. (3.135) bzw. den Koeffizienten  $c_{N_{RP,t}|j}|\Psi$  gem. (3.140) des semi-analytischen Modells abgeleitet. Zur Ermittlung der unbedingten erzeugenden Funktionen  $G_{N_{RP,t}}(z)$  bzw. der unbedingten Koeffizienten  $c_{N_{RP,t},j}$  sind die bedingten erzeugenden Funktionen gem. (3.136) bzw. die bedingten Koeffizienten gem. (3.142) über alle möglichen Ausprägungen des systematischen Faktors  $\Psi$ , gewichtet mit den Werten seiner Dichtefunktion, zu integrieren. Die Integration erfolgt numerisch und ist daher approximativ. Es ist zu klären, mit welcher Genauigkeit die numerische Integration durchzuführen ist. Dabei muss zwischen dem Rechenaufwand und dem Approximationsfehler abgewogen werden:



**Abb. 4-6: Ereignisverteilung des Referenzportfolios im Licht der numerischen Integration**

Graphische Gegenüberstellung der unbedingten Ereignisverteilungen des Referenzportfolios für den Risikohorizont von 5 Jahren ermittelt (a) mit Hilfe von 20 bedingten Ereignisverteilungen und (b) mit Hilfe von 50 bedingten Ereignisverteilungen. Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S.

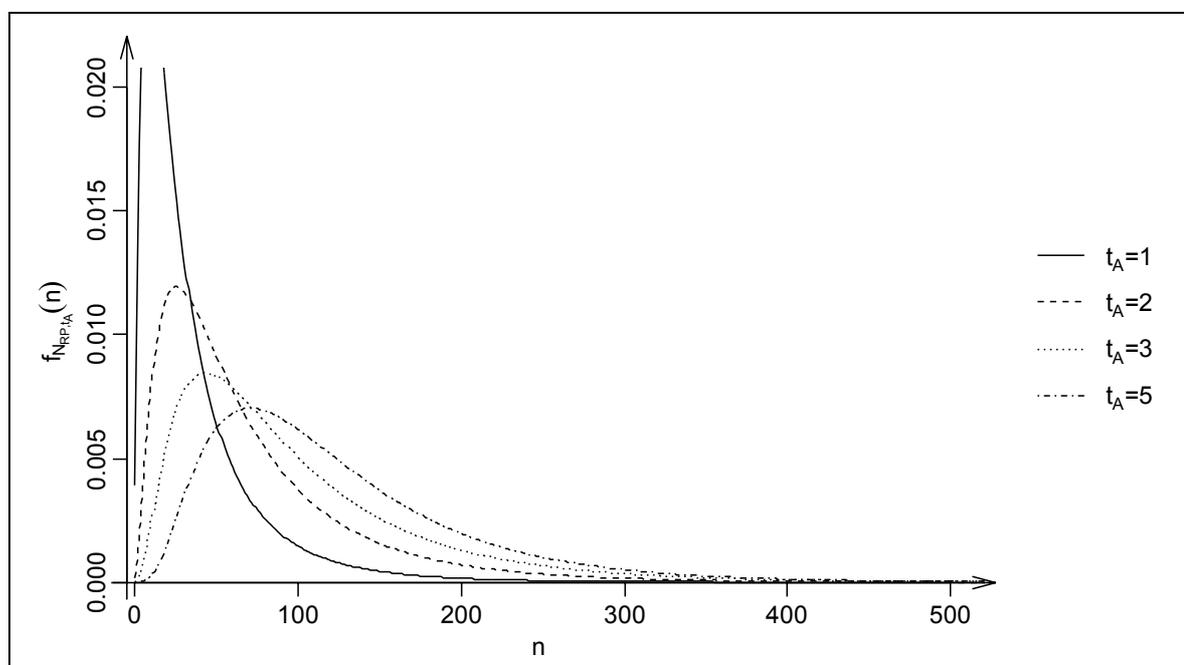
Zur Klärung dieser Frage wurde die Ereignisverteilung für den Risikohorizont  $t_H=5$  auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S für mehrere Genauigkeitsgrade ermittelt. Dazu wurde der Bereich  $[-5,5]^{733}$  des systematischen Risikofaktors in (a) 20, (b) 50, (c) 100 und (d) 300 Teilabschnitte aufgeteilt. Während für 20 Teilabschnitte die Form der unbedingten Ereignisverteilung noch von den Spitzen der bedingten Ereignisverteilungen geprägt ist (vgl. Abb. 4-6), erhält man für 50 Teilschritte bereits eine glatte Graphenstruktur.

<sup>733</sup> Auf diesen Teil des Definitionsbereichs entfallen beinahe 100 % der Wahrscheinlichkeitsmasse der Standardnormalverteilung.

Zur Entscheidungsfindung kann als Grad der Verbesserung der Approximation die Summe der absoluten Differenzen zwischen den Koeffizienten der jeweiligen, im Genauigkeitsgrad variierenden erzeugenden Funktionen herangezogen werden. Beim Übergang von 20 auf 50 Teilabschnitte ergab dies einen Differenzwert von ca. 0,26. Beim Übergang von 50 auf 100 Teilabschnitte sank dieser auf ca.  $1,7 \cdot 10^{-3}$  und betrug nur noch ca.  $1 \cdot 10^{-7}$  beim Übergang auf 300 Teilschritte. Daher wird im Weiteren mit 100 Teilabschnitten gearbeitet.

Anhand von Abb. 4-6 wird deutlich, dass kaum mehr als 500 der 2.916 Kredite des Referenzportfolios ausfallen werden. Zur Ermittlung der Wahrscheinlichkeit für dieses unwahrscheinliche Ereignis, sind schlicht die Koeffizienten der erzeugenden Funktion beginnend mit dem 502. Koeffizienten aufzuaddieren. Obwohl es grafisch den Anschein hat, dass alle Koeffizienten jenseits des 501. Koeffizienten null sind, werden ihnen bei der semi-analytischen Modellierung tatsächlich von null verschiedene Werte zugewiesen. Erst der 1932. Koeffizient trägt keine Wahrscheinlichkeitsmasse mehr. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 500 Kredite ausfallen, beträgt 0,22%.

Verlegt man den Analysezeitpunkt von ursprünglich  $t_A = t_H = 5$  vor<sup>734</sup>, muss bedeutend mehr Wahrscheinlichkeitsmasse auf den kleineren Kreditausfallzahlen liegen.<sup>735</sup> Das Ausmaß der Veränderung der Ereignisverteilung bei kürzeren Analysehorizonten zeigt Abb. 4-7:



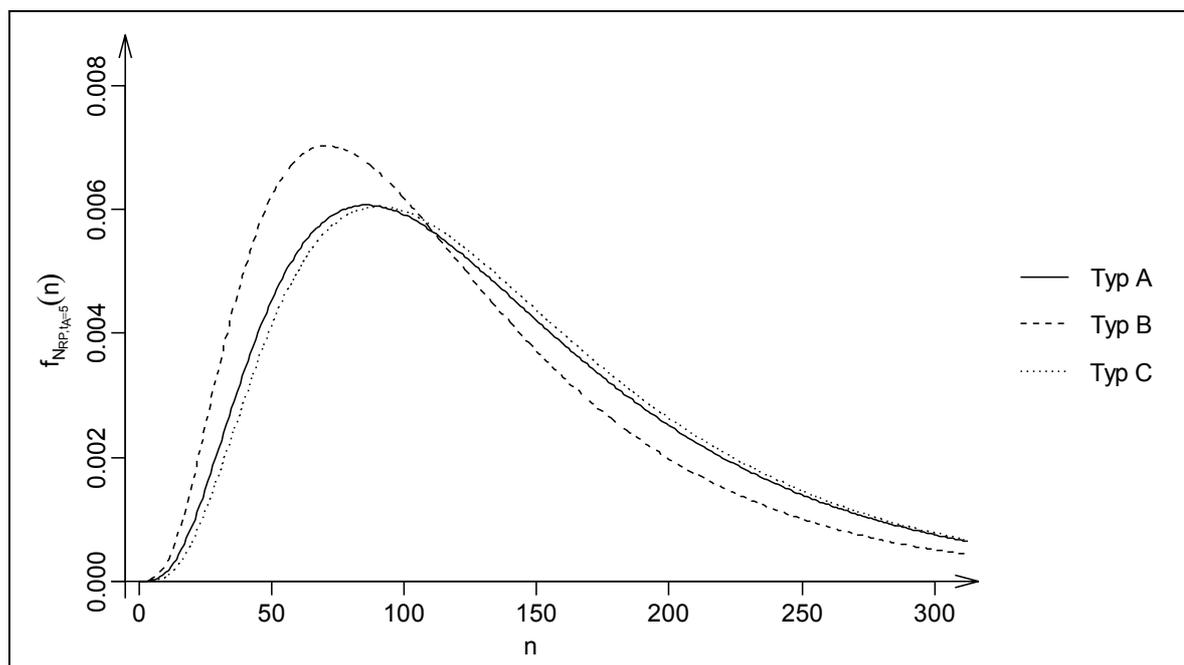
**Abb. 4-7: Ereignisverteilung des Referenzportfolios für alternative Analysezeitpunkte**  
Graphische Gegenüberstellung der Ereignisverteilungen des Referenzportfolios für die Analysezeitpunkte von 1, 2, 3 und 5 Jahren. Die Rechnungen basieren auf den Credit Curves vom Typ B.

<sup>734</sup> Der Risikohorizont ist mit der Laufzeit der gesamten CDO-Transaktion verknüpft.

<sup>735</sup> Die Ausfallsschranken müssen bzw. sollten nicht neu kalibriert werden. Vgl. Abschnitt 343.

Die Ereignisverteilungen können sowohl auf der Basis der Credit Curves vom Typ A<sup>736</sup> als auch auf der Basis der Credit Curves vom Typ B und C<sup>737</sup> ermittelt werden.<sup>738</sup> Fraglich ist, inwieweit die Wahl der Methodik zur Berechnung der Credit Curve einen Einfluss auf die Lage und Form der Ereignisverteilung hat. Unterschiede in den Verteilungen sollen insbesondere anhand der Erwartungswerte und anhand ausgewählter Quantile erörtert werden. Die Analysen sollen für unterschiedliche Analysehorizonte vorgenommen werden.

Für den Analysehorizont von einem Jahr sind kaum Unterschiede festzustellen. Die Erwartungswerte der Ereignisverteilungen liegen für alle Credit Curve Typen einheitlich bei 37 Krediten.<sup>739</sup> Auch in den Quantilen lassen sich nur unwesentliche Unterschiede feststellen. Das 1 % (5 %)-Quantil liegt für die Credit Curves vom Typ A bei 193 (111) Krediten, während für die Credit Curves vom Typ B und C die Werte bei 195 (113) und 194 (112) Krediten liegen. Als Zwischenfazit bleibt festzuhalten, dass für kurze Analysehorizonte, bspw. für den in der Kreditrisikomessung üblichen Analysehorizont von einem Jahr, die Wahl der Methode zur Ermittlung der Credit Curve nur unwesentlich die Ergebnisse beeinflusst.



**Abb. 4-8: Ereignisverteilungen des Referenzportfolios für alternative Credit Curves**

Graphische Gegenüberstellung der Ereignisverteilungen des Referenzportfolios für die Credit Curves vom Typ A, B und C nach STANDARD & POOR'S. Der Analysehorizont beträgt 5 Jahre. Die Rechnungen basieren auf dem semi-analytischen Modellansatz.

<sup>736</sup> Credit Curves, basierend auf den historischen, durchschnittlichen, kumulativen Ausfallraten nach STANDARD & POOR'S. Vgl. Anlage 16, Tab. A - 1.

<sup>737</sup> Credit Curves, basierend auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres- bzw. T-Jahres-Migrationsraten nach STANDARD & POOR'S. Vgl. Tab. 3-2.

<sup>738</sup> Vgl. Abschnitt 322.

<sup>739</sup> Typ A: 36,13; Typ B: 36,71 und Typ C: 36,68.

Merkliche Unterschiede sind hingegen beim Analysehorizont von fünf Jahren erkennbar. Dabei sind die Unterschiede in den Ereignisverteilungen auf der Basis der Credit Curves vom Typ A und C mit Blick auf die Art und Weise ihrer Konstruktion erwartungsgemäß geringer als diese im Vergleich zur Ereignisverteilung auf der Basis der Credit Curve vom Typ B ausfallen (vgl. Abb. 4-8). Die Konstruktion der Credit Curves vom Typ A und C erfolgte gerade so, dass – abgesehen von den Auswirkungen der unterschiedlichen empirischen Datenbasis<sup>740</sup> – die resultierenden Ausfallwahrscheinlichkeiten für ganzjährige Risikohorizonte identisch ausfielen. Lediglich im unterjährigen Bereich führten beide Credit Curves zu (geringfügig) verschiedenen Ausfallwahrscheinlichkeiten. Die Ähnlichkeit der Konstruktion spiegelt sich in den Ereignisverteilungen wider. Die Erwartungswerte für die Typen A und C betragen 142 und 145 ausgefallene Kredite womit beide Werte dicht beieinander liegen. Der Erwartungswert für den Typ B beträgt dagegen nur 123 Kredite. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei der Betrachtung ausgewählter Quantile. Die Quantilswerte für die Typen A und C liegen bei 431 (311) und 431 (313) Krediten während der Quantilswert für den Typ B bei 392 (277) Krediten zu suchen ist. Die Ursache der Abweichungen ist in den bereits oben festgestellten, mit zunehmendem Zeithorizont wachsenden Lagabweichungen der Credit Curve Typen A und C einerseits sowie B andererseits zu sehen.<sup>741</sup> Die Heterogenität des Referenzportfolios erlaubt darüber hinaus jedoch kaum weiterführende Aussagen zur Natur der Abweichungen. Es kann jedoch festgehalten werden, dass die Ereignisverteilungen auf der Basis der Credit Curve Typen A und C ein deutlich pessimistischeres Bild der Risikostruktur des Kreditportfolios zeichnen. Die pessimistischeren Ergebnisse erscheinen plausibel wenn man berücksichtigt, dass der überwiegende Teil der Kredite ein „BB“-Rating trägt<sup>742</sup>. Die kalibrierten Ausfallschranken der Typen A und C für „BB“-geratete Kredite liegen mit den Werten  $K_{BB, Typ A} = (-3, 2372)$  und  $K_{BB, Typ C} = (-3, 2198)$  deutlich näher am Wert null als die kalibrierte Ausfallschranke des Typs B mit dem Wert  $K_{BB, Typ B} = (-3, 4535)$ .<sup>743</sup> Die Wahrscheinlichkeiten, dass die entsprechenden Ability-to-Pay-Prozesse die Ausfallschranken  $K_{BB, Typ A}$  und  $K_{BB, Typ C}$  erreichen, sind somit höher, als die Wahrscheinlichkeit, dass die Ausfallschranke  $K_{BB, Typ B}$  durchschlagen wird. Mit der Dominanz der „BB“-gerateten Kredite folgt somit das pessimistischere Bild der Risikostruktur im Falle der Verwendung der Credit Curve-Typen A und C.

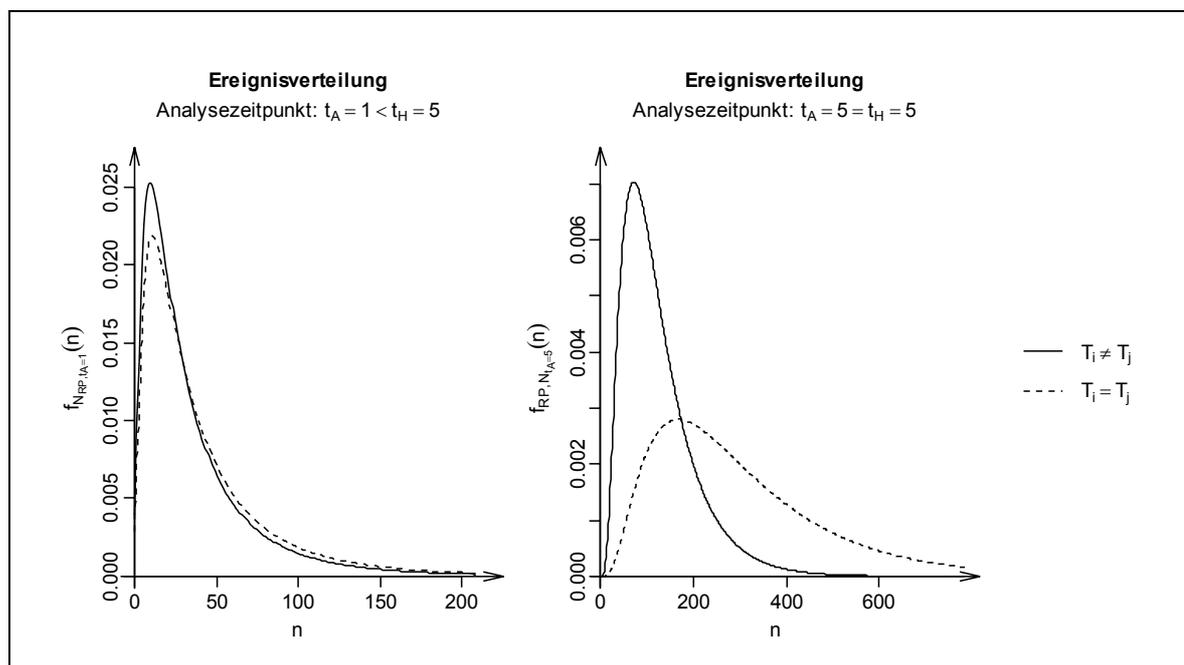
<sup>740</sup> STANDARD & POOR'S verwendet unterschiedliche Kreditportfolios zur Ermittlung von kumulativen Ausfallraten und T-Jahres-Migrationsraten. Vgl. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 19 (STANDARD & POOR'S Studie). Siehe auch die Ausführungen in Abschnitt 322.

<sup>741</sup> Vgl. zu Lösungsmöglichkeiten Abschnitt 322.

<sup>742</sup> Vgl. Tab. 4-3.

<sup>743</sup> Die Ausfallschranken vom Typ A und C liegen für den Investment-Grade- und oberen Speculative-Grade-Bereich näher am Wert null. Vgl. Tab. 3-5.

Ein Element des vorgestellten Modellrahmens war die Berücksichtigung unterschiedlicher Restlaufzeiten im Referenzportfolio durch die Betrachtung der Ability-to-Pay-Prozesse über entsprechend kurze bzw. lange Zeiträume hinweg.<sup>744</sup> Die Bedeutung unterschiedlicher Restlaufzeiten, insbesondere dann, wenn eine Vielzahl von Krediten vor dem Analysezeitpunkt zu tilgen ist, wird in Abb. 4-9 deutlich. Darin sind die gemeinsamen Ereignisverteilungen (a) auf der Basis der oben modellierten Restlaufzeitverteilung<sup>745</sup> und (b) auf der Basis (naiver) homogener Restlaufzeiten für die beiden Analysezeitpunkte von einem Jahr und fünf Jahren zu sehen.<sup>746</sup> Bereits beim 1-jährigen Analysehorizont wird deutlich, dass in einem Modell mit homogenen Restlaufzeiten die Wahrscheinlichkeiten für hohe Ausfallzahlen überschätzt werden. Ursache hierfür ist die Möglichkeit, dass extrem kurzlaufende Kredite modelltechnisch nach ihrem Fälligkeitszeitpunkt ausfallen. Da jedoch die durchschnittliche Restlaufzeit des Portfolios bei 2,34 Jahren liegt, sind nur relativ wenige Kredite vor dem Analysezeitpunkt von einem Jahr fällig und beide Ereignisverteilungen liegen noch sehr nahe beieinander. Ein verändertes Bild ergibt sich für den 5-jährigen Analysehorizont. Da fast alle Kredite vorzeitig fällig sind, werden die Wahrscheinlichkeiten für hohe Kreditausfallzahlen im Modell mit homogenen Restlaufzeiten beträchtlich überschätzt:



**Abb. 4-9: Laufzeiteffekt auf die Ereignisverteilung**

Graphische Gegenüberstellung der Ereignisverteilungen des Referenzportfolios der Analysezeitpunkte von 1 Jahr und 5 Jahren für inhomogene und homogene Restlaufzeiten. Im Falle homogener Restlaufzeiten entsprechen diese mindestens dem Analysehorizont. Die Rechnungen basieren auf den Credit Curves vom Typ B.

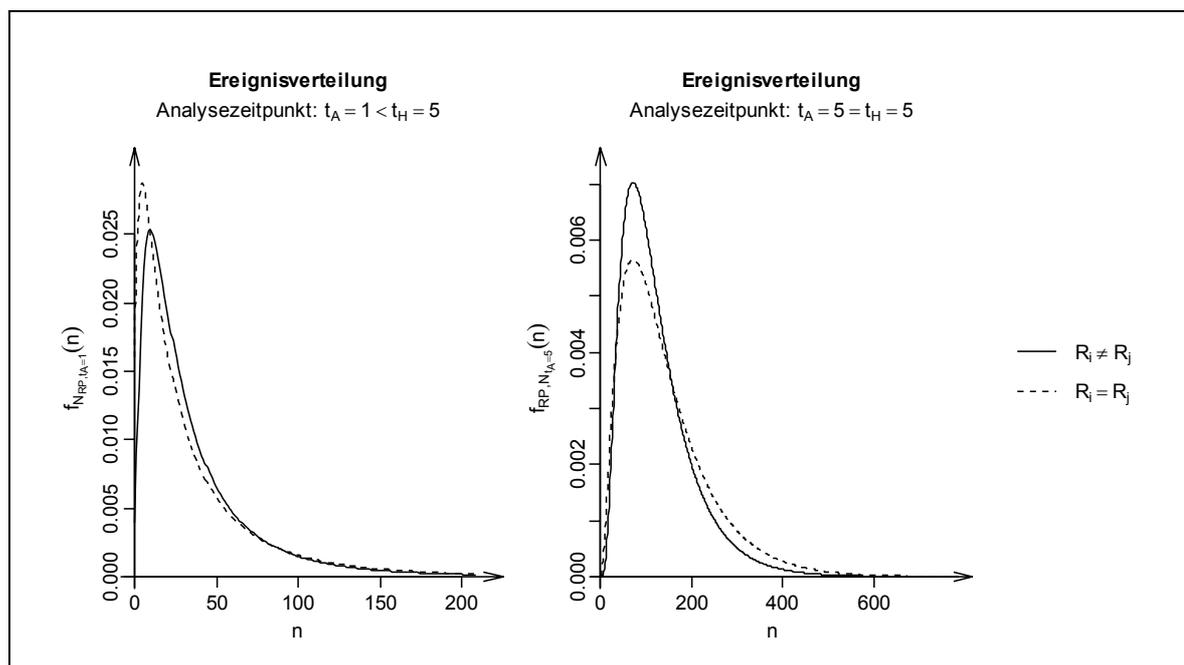
<sup>744</sup> Vgl. Abschnitt 354.

<sup>745</sup> Vgl. Abschnitt 413.

<sup>746</sup> Im Falle des 5-jährigen Analysezeitpunkts wurden die homogenen Restlaufzeiten auf fünf Jahre gesetzt. Im Falle des 1-jährigen Analysezeitpunkts ist es letztlich unerheblich, ob die homogenen Restlaufzeiten den Wert eins oder fünf annehmen.

Der vorgestellte Modellrahmen ermöglicht die Einbeziehung unterschiedlicher Kreditratings und ratingabhängiger Faktorsensitivitäten. Eine Reduktion der Modellkomplexität könnte durch eine *Homogenisierung* des Referenzportfolios versucht werden. Neben der bereits angesprochenen Restlaufzeitproblematik, stellt sich die Frage nach den zu verwendenden Kreditratings und den etwaigen Auswirkungen auf die Ereignisverteilungen. In Abb. 4-10 sind zum Vergleich die Ereignisverteilungen (a) auf der Basis der oben modellierten Ratingverteilung<sup>747</sup> und (b) auf der Basis des durchschnittlichen Portfolioratings nach FITCH (BBB-/BB+) / MOODY's (Ba1/Ba2)<sup>748</sup> zu sehen. Da kein eindeutiges Rating und folglich keine einzelne Credit Curve zugeordnet werden kann, wird konservativ verfahren und ein homogenes Rating von „BB“ mit der zugehörigen Faktorsensitivität von  $\rho_{BB}=17,75\%$ <sup>749</sup> angenommen.

Tatsächlich sind die Ereignisverteilungen einander sehr ähnlich. Die beobachtbaren Verzerrungen zu Gunsten höherer Ausfallzahlen im Falle der homogenen Ratings sind begünstigt durch die konservative Wahl des Portfolioratings, womit die Schwierigkeiten beim Prozess der Homogenisierung offenkundig werden.



**Abb. 4-10: Ratingeffekt auf die Ereignisverteilung**

Graphische Gegenüberstellung der Ereignisverteilungen des Referenzportfolios der Analysezeitpunkte von 1 Jahr und 5 Jahren für inhomogene und homogene Kreditratings. Im Falle homogener Kreditratings entsprechen diese dem durchschnittlichen Portfoliorating „BB“. Die zugehörige (uniforme) Faktorsensitivität beträgt  $\rho_{BB}=17,75\%$ . Die Rechnungen basieren auf den Credit Curves vom Typ B.

<sup>747</sup> Vgl. Abschnitt 412.

<sup>748</sup> Vgl. Tab. 4-4.

<sup>749</sup> Vgl. Tab. 3-6.

Abschließend soll der vorgestellte (semi-)analytische Modellrahmen erneut<sup>750</sup> – jedoch diesmal auf der Basis des hier betrachteten Referenzportfolios – mit dem ebenfalls analytisch und faktorbezogenen Modellrahmen zur NEUEN BASLER EIGENKAPITALVERORDNUNG (Basel II) verglichen werden. Da der Modellrahmen nach Basel II von einem homogenen, unendlich granularen Portfolio ausgeht, sind homogene Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_i=p_j=p$ , homogene Restlaufzeiten  $T_i=T_j=T$ , homogene Kreditratings  $R_i=R_j=R$  und homogene Faktorsensitivitäten  $\rho_i=\rho_j=\rho_R$  vorzugeben.<sup>751</sup>

Erneut könnte einwendend vorgebracht werden, dass hier kein unendlich granulares Referenzportfolio vorliege und ein solches auch nicht existiere. Da jedoch die (Ereignis-)Verteilung in Form des Ausfallanteils  $N_t/N$  im Basler Modellrahmen bereits ab wenigen hundert Krediten hinreichend genau durch die relativ einfache, analytische Modellformulierung

$$F_{N_t/N}(x) = F_{SN} \left( \frac{1}{\sqrt{\rho_R}} \left( \sqrt{1-\rho_R} \cdot F_{SN}^{-1}(x) - F_{SN}^{-1}(p_{R,t}) \right) \right) \quad \text{für } N_t = 0, \dots, N. \quad (4.8)$$

approximiert werden kann und das hier betrachtete Referenzportfolio 2.916 Kredite umfasst, soll das Basler Modell zur Approximation der Ereignisverteilung als hinreichend genau angesehen werden.<sup>752</sup>

Fraglich bleibt die Behandlung der Heterogenität des Referenzportfolios. Die Heterogenität erstreckt sich dabei auf die Restlaufzeiten und die Kreditratings. Die Parametrisierung des Modells gem. (4.8) erfordert eine „Homogenisierung“ aller Kredite des Referenzportfolios. Als homogenes Kreditrating  $R$  soll das gewichtete Portfoliorating „BB“ herangezogen werden.<sup>753</sup> Damit wird allen Krediten ein und dieselbe Credit Curve zur Ermittlung zeitabhängiger Ausfallwahrscheinlichkeiten zugeordnet. Da Ratings auf einer ordinalen Skala abgetragen werden, birgt dies die Gefahr, dass die gewählte Credit Curve mit Blick auf die Portfolioqualität zu pessimistisch oder zu optimistisch ist. Mit einem Portfolioratingfaktor

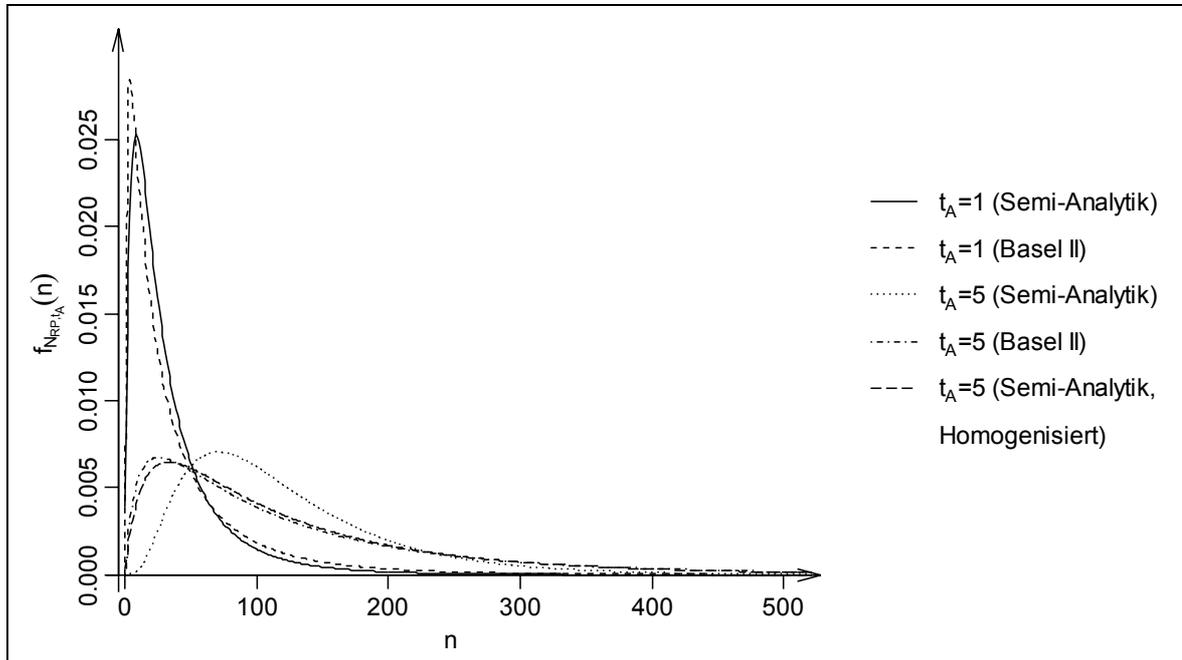
<sup>750</sup> Vgl. die Ausführungen in Abschnitt 394 zum Modellvergleich bei homogenen Kreditportfolios.

<sup>751</sup> Vgl. grundlegend zur Methodik des Basler Modells H. Rau-Bredow (2001), Kreditrisikomodellierung im Neuen Basler Accord, S. 1004; T. Wilde (2001), IRB approach explained, S. 87-89; M. Wilkens, O. Entrop und H. Scholz (2002), Analyse des IRB-Ansatzes, S. 142 f. Aufgrund der mehrfachen Überarbeitung der Basler Vorschläge im Rahmen des Konsultationsprozesses kann es vorkommen, dass einzelne Details – insbesondere die Parametrisierungen – in den zitierten Aufsätzen nicht mehr den aktuellen Gegebenheiten entsprechen. Die Ergebnisse des Konsultationsprozesses können dem abschliessenden und zusammenfassenden Basler Papier entnommen werden. Vgl. BCBS (2004), Basel II, Abs. 270-386. Siehe auch H. Schulte-Mattler und T. Manns (2004), Kreditkosten des Mittelstandes, S. 376-378.

<sup>752</sup> Für die Herleitung siehe P. Schönbucher (2000), Factor models, S. 11 f.

<sup>753</sup> Vgl. Abschnitt 412.

von 32,5 (FITCH) bzw. von 1074 (MOODY'S) scheint die getroffene Wahl im vorliegenden Fall pessimistisch.<sup>754</sup> Zur Ermittlung der homogenen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{R,t}$  ist zu klären, mit welcher Restlaufzeit gearbeitet werden soll. Den jeweiligen Analysezeitpunkt  $t_A$  als Restlaufzeit zu verwenden, ist mit Blick auf den Restlaufzeiteffekt (vgl. Abb. 4-9) zu hinterfragen. Sinnvoll erscheint vielmehr die Verwendung der durchschnittlichen, nominalwertgewichteten Portfoliorestlaufzeit von 2,34 Jahren. Allerdings ist es mehr als fraglich, bei Analysezeitpunkten  $t_A$  mit  $t_A < 2,34$  die Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{R,t}$  auf der Basis von  $t=2,34$  zu kalibrieren. Die Ausfallwahrscheinlichkeiten würden signifikant zu hoch ausfallen. Ausschließlich in diesen Fällen soll auf den jeweiligen Analysezeitpunkt  $t_A$  als durchschnittliche Restlaufzeit zurückgegriffen werden. Im Falle von  $t_A=1$  wird demzufolge die uniforme Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{BB,1}=1,50\%$  verwendet. Als Basis dienen dabei die historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten, respektive die bonitätsentsprechende Credit Curve vom Typ B, nach STANDARD & POOR'S. Soll hingegen der Risikohorizont betrachtet werden, d. h.  $t_A=t_H=5$ , dann findet der Wert  $p_{BB,2.34}=4,57\%$  als uniforme Ausfallwahrscheinlichkeit Anwendung. Die ratingabhängige Faktorsensitivität wird auf der Basis der einjährigen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{BB,1}=1,50\%$  ermittelt und beträgt  $\rho_{BB}=17,75\%$ .<sup>755</sup>



**Abb. 4-11: Modellvergleich mit Basel II**

Graphischer Vergleich der Ereignisverteilungen des Referenzportfolios mit dem Modellansatz nach Basel II für die Risikohorizonte von 1 Jahr und 5 Jahren. Für das Modell nach Basel II wurde das durchschnittliche Portfoliorating „BB“ zugrunde gelegt. Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S.

<sup>754</sup> Vgl. Tab. 4-4.

<sup>755</sup> Vgl. Tab. 3-6.

In Abb. 4-11 sind zum Vergleich die Ereignisverteilungen (a) auf der Basis des vorgestellten Modellrahmens und (b) auf der Basis von (4.8) zu sehen. Für den Analysezeitpunkt von einem Jahr liegen beide Ereignisverteilungen (durchgezogene und kurz-gestrichelte Linien) noch dicht beieinander. Ein Vergleich mit Abb. 4-9 und Abb. 4-10 i. V. m. der obigen Diskussion legt nahe, dass die Differenz weniger auf die unterschiedliche Behandlung der Restlaufzeiten als vielmehr auf die Schwierigkeiten bei der Homogenisierung der Ratings zurückzuführen ist. Das Basler Modell liefert, begünstigt durch die konservative Wahl des gewichteten Portfolioratings, höhere Wahrscheinlichkeiten für extreme Ausfallszenarien. Damit verbunden fallen sowohl die Quantile als auch die Erwartungswerte höher aus. Für den Analysezeitpunkt von fünf Jahren verschärfen sich jedoch die Abweichungen in beachtlichem Umfang. Die Ereignisverteilung auf der Basis des vorgestellten Modells (gepunktete Linie) weicht erheblich von der des Modells gem. (4.8) (gemischt gepunktete und gestrichelte Linie) ab. Wiederum weist das Modell nach Basel II höhere Quantile und Erwartungswerte auf. Die Differenzen können erneut mit Blick auf Abb. 4-10 zu großen Teilen auf die Homogenisierung der Ratings zurückgeführt werden, wobei sich die Auswirkungen mit dem wachsenden Analysezeitpunkt verstärken. Die Wirkungsrichtung der Homogenisierung der Restlaufzeiten lässt sich nur schwer abschätzen. Insbesondere ermanngelt es einer ökonomischen Interpretation des Durchschnittswertes.<sup>756</sup>

Ein direkter Vergleich der beiden Modellansätze unter Ausschaltung der Einflüsse der unterschiedlichen Behandlung der Kreditportfolioinhomogenität kann erreicht werden, wenn das semi-analytische Modell auf das homogenisierte Kreditportfolio angewendet wird. Insbesondere wird dadurch eine u. U. konservative Wahl der Credit Curve auf den semi-analytischen Modellansatz übertragen. Das Resultat (lang-gestrichelte Linie) zeigt, dass in diesem Fall beide Modellansätze einander weitgehend entsprechen. Die verbleibenden Unterschiede sind auf die verschiedenen, modellinhärenten, multidimensionalen Abhängigkeitsstrukturen hinsichtlich der Ausfallereignisse zurückzuführen.

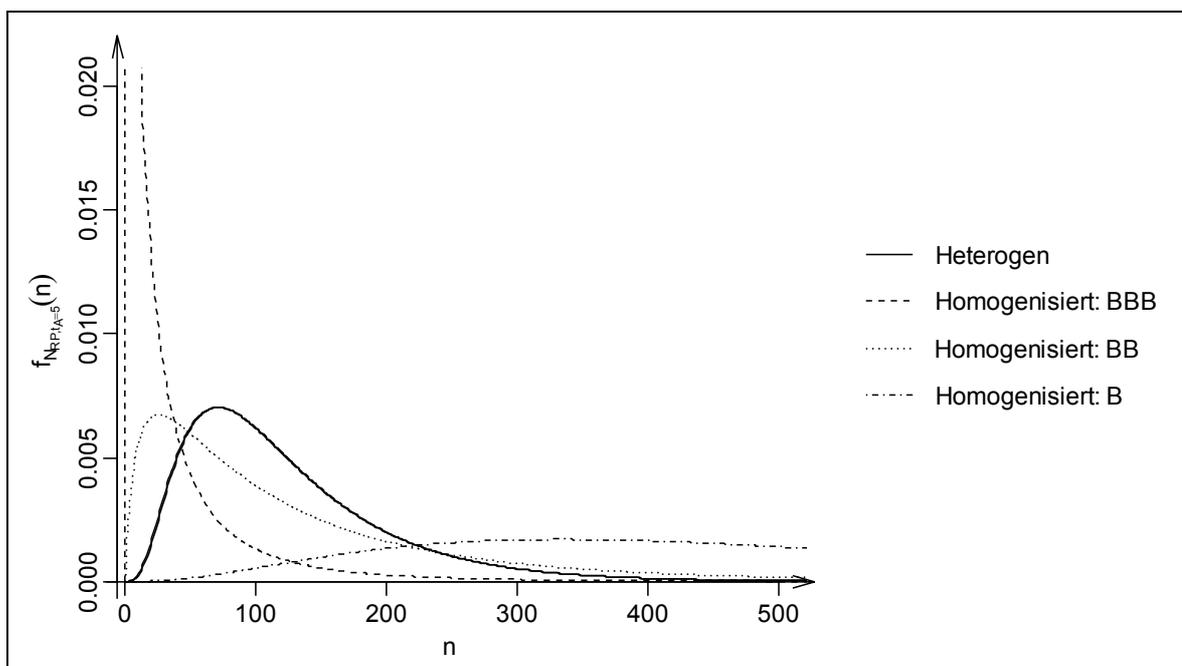
Der Einfluss der Wahl der Credit Curve auf die Ereignisverteilung im Rahmen der Homogenisierung wird anhand der Abb. 4-12 deutlich. Darin wurden neben der Ereignisverteilung des homogenisierten Portfolios auf der Basis der Credit Curve für „BB“-geratete Kredite zusätzlich die Ereignisverteilungen für homogenisierte Portfolios unter Verwendung der jeweils nächst besseren und nächst schlechteren Credit Curve abgetragen.<sup>757</sup> Die Zu-

---

<sup>756</sup> Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 394.

<sup>757</sup> Mit der Verwendung alternativer Credit Curves ändern sich sowohl die verwendeten Ausfallwahrscheinlichkeiten als auch die verwendeten Faktorsensitivitäten.

ordnung einer alternativen Credit Curve zum Referenzportfolio hat demnach erhebliche Lage- und Formveränderungen der Ereignisverteilung zur Folge. Eine graduelle Änderung der Verteilung, ausgehend von derjenigen zugehörig zur Credit Curve „BBB“ über diejenige zugehörig zur Credit Curve „BB“ hin zu derjenigen zugehörig zur Credit Curve „B“, kann – sofern eine entsprechende Änderung der Ratingverteilung vorliegt – nur durch ein Modell nachvollzogen werden, welches heterogene Strukturen abbilden kann. Zum Vergleich wurde in Analogie zur Abb. 4-11 die Ereignisverteilung unter Berücksichtigung der Heterogenität des Referenzportfolios, insbesondere der Heterogenität der Ratingstruktur, abgetragen (durchgezogene Linie). Dadurch lässt sich neben der Tatsache, dass die Ereignisverteilung des heterogenen Referenzportfolios relativ nahe an der Ereignisverteilung des homogenisierten Referenzportfolios unter Verwendung der Credit Curve für „BB“-geratete Kredite liegt, das Ausmaß der Auswirkungen der Homogenisierungsmaßnahmen durch Vergleich der Lage und Form der verschiedenen Ereignisverteilungen erkennen.



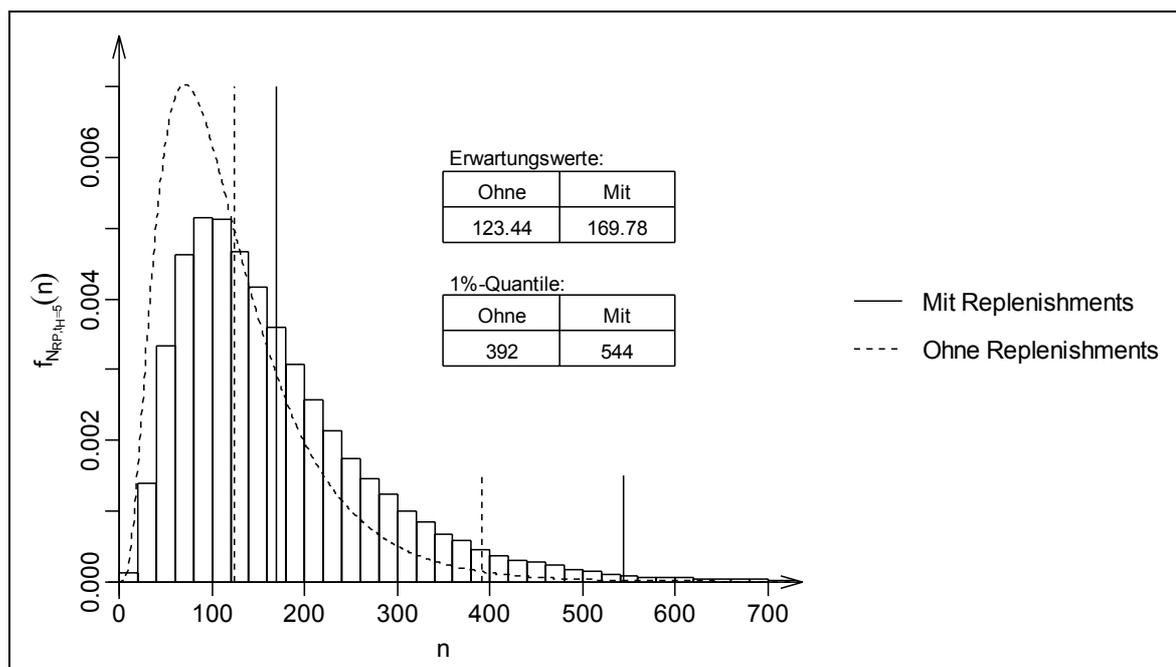
**Abb. 4-12: Modellvergleich bei homogenisierten Portfolios**

Graphischer Vergleich der Ereignisverteilungen für heterogene und homogenisierte Referenzportfolios. Im Falle der homogenisierten Referenzportfolios wurden diesen verschiedene Credit Curves zugeordnet. Der Risikohorizont beträgt 5 Jahre. Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S.

Als Fazit bleibt festzuhalten, dass einfache Modellansätze für homogene Portfolios die Modellierung von Ereignisverteilungen heterogener Portfolios insbesondere für längerfristige Risikohorizonte unter Berücksichtigung von Homogenisierungsmaßnahmen unzureichend sind. Als wesentliche Ursache ist im Gegensatz zum vorgestellten Modellrahmen die fehlende Möglichkeit, heterogene Strukturen innerhalb des Portfolios hinreichend genau zu erfassen.

## 422 Ereignisverteilungen mit Portfolioreplenishments

Die Ermittlung der Ereignisverteilungen mit Portfolioreplenishments erfolgt, anders als im vorherigen Abschnitt, nicht auf der Basis des semi-analytischen Modellansatzes, sondern auf der Basis der Simulation der einzelnen Ability-to-Pay-Prozesse aufgrund der Bedeutung der zeitlichen Struktur der Ausfälle für den Umfang der Replenishments.<sup>758</sup> Während abgelaufene und teilamortisierte Kredite ersetzt werden, gilt dies grundsätzlich nicht für ausgefallene Kredite. Lediglich der wiedergewonnene Anteil wird aufgefüllt.



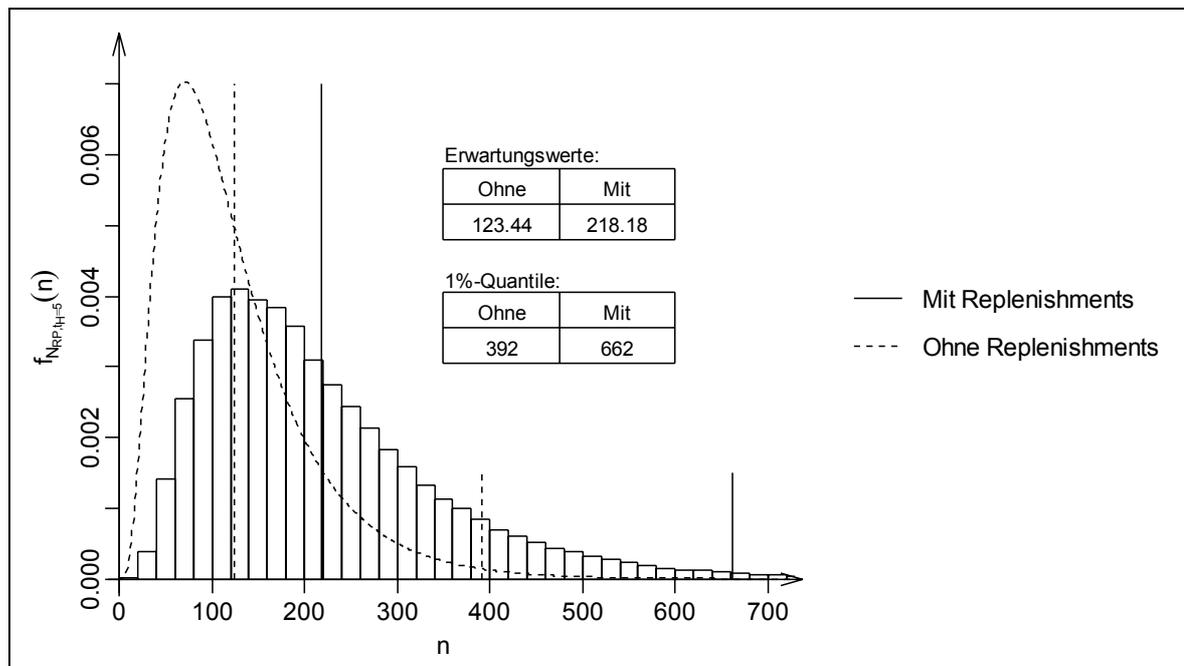
**Abb. 4-13: Effekt der Replenishments auf die Ereignisverteilung von Bonds**

Vergleich der Ereignisverteilung des Referenzportfolios mit und ohne Replenishments. Die Kredite sind endfällig (Bonds). Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Recovery Rate beträgt 0 %. Die Simulation basiert auf den Credit Curves vom Typ B bei 250.000 Simulationsschritten und erfolgt ohne Replenishment-Trigger.

Damit haben bei Berücksichtigung von Replenishments sowohl die Tilgungszahlungen als auch die Recovery Rates einen Einfluss auf die Ereignisverteilungen. Abb. 4-13 zeigt das Ausmaß des Einflusses der Replenishments im Falle endfälliger Kredite (Bonds). Dazu wurde die Ereignisverteilung auf der Basis des semi-analytischen Modells (gestrichelte Linie) der Ereignisverteilung mit Portfolioreplenishments für eine Recovery Rate von 0 % auf der Basis der Pfadsimulation (Histogramm) gegenübergestellt. Durch die im Rahmen der Replenishments zusätzlich aufgenommenen Kredite steigt die erwartete Ausfallzahl von ca. 123 auf ca. 170 Titel. Noch deutlicher spiegelt sich der Replenishmenteffekt in den (1 %-)Quantilen wider. Eine leichte Intensivierung erfährt der Replenishmenteffekt durch wachsende Recovery Rates. Da der wiedergewonnene Teil einer ausgefallenen Forderung

<sup>758</sup> Vgl. zur Implementierung des Modellansatzes im Rahmen einer zeitraumbezogenen Monte Carlo Simulation Abschnitt 382.

durch neue Kredite ersetzt wird, steigt mit wachsender Recovery Rate durchschnittlich die Anzahl der neu in das Portfolio aufgenommenen Titel und somit die erwartete Ausfallzahl. Während bei einer Recovery Rate von 0 % durchschnittlich 5.060 Kredite neu aufgenommen wurden, waren es bei einer Recovery Rate von 30 % bereits 5.154 Kredite und 5.230 Kredite bei einer Recovery Rate von 54 %. Die erwarteten Kreditausfallzahlen steigen dementsprechend leicht von ca. 170 auf 171 bzw. 172 Titel an.



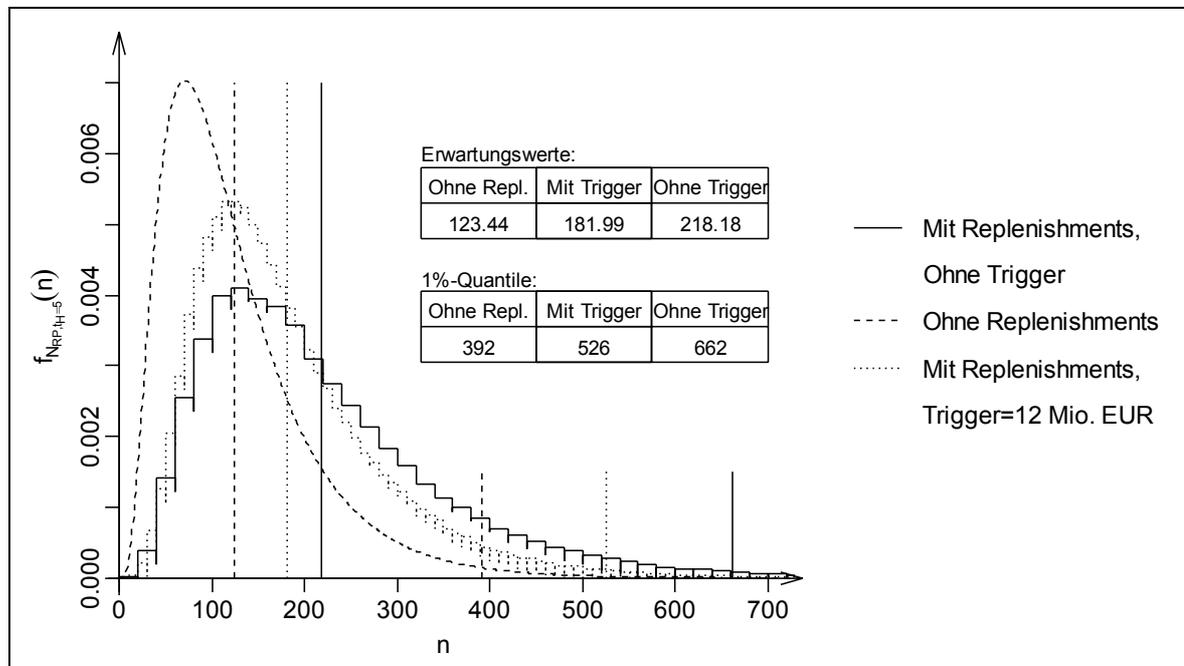
**Abb. 4-14: Effekt der Replenishments auf die Ereignisverteilung von Loans**

Vergleich der Ereignisverteilung des Referenzportfolios mit und ohne Replenishments. Die Kredite sind Abzahlungsdarlehen (Loans). Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Recovery Rate beträgt 0 %. Die Simulation basiert auf den Credit Curves vom Typ B bei 250.000 Simulationsschritten und erfolgt ohne Replenishment-Trigger.

Abb. 4-14 zeigt das Ausmaß des Einflusses der Replenishments auf das Referenzportfolio im Falle von Abzahlungsdarlehen (Loans). Wurden im Falle der Bonds durch die Replenishmentmaßnahmen bei einer Recovery Rate von 0 % durchschnittlich 5.060 Kredite neu aufgenommen, sind es im Falle der Loans durch den zusätzlichen Ersatz teilamortisierter Kredite durchschnittlich 8.500 Kredite. Die erwartete Anzahl ausgefallener Kredite steigt damit einhergehend von 170 Krediten auf 218 Kredite. Steigende Recovery Rates bedeuten ebenso wie bei den Bonds auch bei den Loans tendenziell steigende Kreditausfallzahlen. Der Recovery-Effekt erweist sich jedoch bei den Loans als schwächer, da die Recovery Rate sich lediglich auf den noch nicht amortisierten Teil des Kredits bezieht. Dieser Teil sinkt mit zunehmender Überlebensdauer.<sup>759</sup> Das Replenishment der Wiedergewinnung von 54 % führt durchschnittlich lediglich zu zwei zusätzlichen Kreditausfällen (vgl. Tab. 4-10).

<sup>759</sup> Für die entsprechenden Auswirkungen auf die Verlustverteilungen siehe die Abschnitte 432 und 4322.

In Abb. 4-15 wird die Analyse um einen Replenishment-Trigger i. H. v. 12 Mio. EUR erweitert. Der Trigger bewirkt, dass die Replenishmentmaßnahmen beim Erreichen der Verlustgrenze von 12 Mio. EUR sofort eingestellt werden. Dadurch sollen Investoren vor der Aufnahme neuer Kreditrisiken in das Portfolio geschützt werden. Tendenziell bewirkt die Einführung eines Replenishment-Triggers ceteris paribus niedrigere Kreditausfallzahlen:



**Abb. 4-15: Effekt des Replenishment-Triggers auf die Ereignisverteilung von Loans**

Vergleich der Ereignisverteilung des Referenzportfolios mit und ohne Replenishment-Trigger. Die Kredite sind Abzahlungsdarlehen (Loans). Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Recovery Rate beträgt 0 %. Die Simulation basiert auf den Credit Curves vom Typ B bei 250.000 Simulationsschritten. Der Replenishment-Trigger beträgt 12 Mio. EUR.

Die entsprechende Ereignisverteilung wurde im Vergleich zur graphischen Darstellung der Abb. 4-14 neu hinzugefügt (gepunktete Linie).<sup>760</sup> Der Erwartungswert mit Replenishments sinkt durch den Trigger um fast 17 %. Das 1%-Quantil fällt sogar um ca. 20 % (vgl. auch Tab. 4-10). Die Replenishmentmaßnahmen werden folglich durch den Trigger in erheblichem Maße berührt. Interessanterweise wird deutlich, dass trotz der geringen Höhe des Triggers im Vergleich zum Nominalvolumen des Referenzportfolios (1 Mrd. EUR) die resultierende Ereignisverteilung sich dennoch deutlich von der Ereignisverteilung ohne Replenishmentmaßnahmen unterscheidet (gestrichelte Linie).

Die Betrachtung der Lage und Form der Ereignisverteilung mit Replenishment-Trigger zeigt, dass diese genau zwischen derjenigen ohne Replenishmentmaßnahmen und derjenigen mit Replenishments, aber ohne Trigger eingezeichnet ist. Eine sinkende Höhe des Triggers muss zu einer zunehmend schmalere Verteilung führen bis diese vollständig der

<sup>760</sup> Die Histogramme in Abb. 4-15 wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit lediglich angedeutet.

Verteilung ohne Replenishments entspricht. Replenishmentmaßnahmen wären in diesem Fall faktisch untersagt. Umgekehrt muss eine wachsende Höhe der kritischen Verlustgrenze zu einer zunehmend breiteren Verteilung führen bis diese vollständig der Verteilung ohne Trigger entspricht. Die Wirkung des Triggers verschwindet. Damit eignen sich Replenishment-Trigger zur risikotechnischen Feinsteuerung von CDO-Strukturen.

Fraglich ist, bis zu welcher Höhe ein Trigger einen nennenswerten Einfluss auf die Ereignisverteilung ausübt. Tatsächlich führt bereits eine Verdoppelung des Triggers auf 24 Mio. EUR dazu, dass dieser kaum noch eine nennenswerte Wirkung entfaltet.<sup>761</sup> Die resultierende Verteilung liegt dicht bei derjenigen ohne Trigger. Somit sind Replenishment-Trigger im Vergleich zur Höhe des Nominalvolumens des Referenzportfolios stets klein zu wählen.

Recovery Rates	0 %		30 %		54 %	
Ohne Replenishments	123,44	392	123,44	392	123,44	392
Mit Replenishments, Trigger = 12''	181,99	526	192,50	544	204,02	571
Mit Replenishments, Trigger = 24''	201,41	562	209,49	584	216,56	621
Mit Replenishments, Ohne Trigger	218,18	662	219,68	672	220,16	679

**Tab. 4-10: Erwartungswerte und 1%-Quantile der Ereignisverteilung des Referenzportfolios mit Replenishments und Replenishment-Trigger im Vergleich**

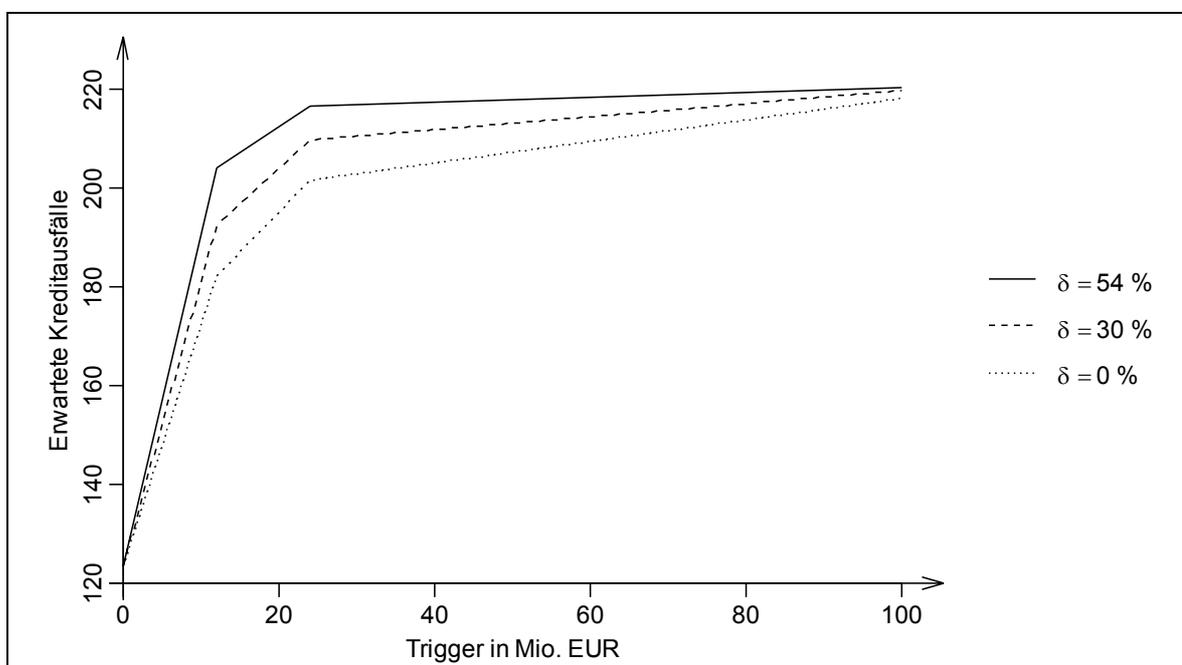
Vergleich der Erwartungswerte und 1%-Quantile für alternative Recovery Rates bei unterschiedlichen Replenishment-Triggern. Die Kredite stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Simulation basiert auf den Credit Curves vom Typ B bei 250.000 Simulationsschritten.

Anhand von Tab. 4-10 wird deutlich, dass die Höhe des Replenishment-Triggers den Einfluss der Recovery Rate auf die Form und Lage der Verteilung bestimmt. Am Beispiel der erwarteten Kreditausfallzahlen verdeutlicht, sind diese ohne Replenishmentmaßnahmen unabhängig vom wiedergewonnenen Kreditanteil. Demgegenüber ist bei einem Trigger von 12 Mio. EUR ein Wachstum von ca. 12,1 % zu verzeichnen. Mit zunehmendem Trigger sinkt die Wachstumsrate wieder. Bei 24 Mio. EUR beträgt sie noch 7,5 %. Steht den Replenishments kein Trigger entgegen, ist ein Anstieg der erwarteten Kreditausfallzahlen zwar beobachtbar, jedoch findet dieser auf einem äußerst geringen Niveau statt.

Wie ist diese Abhängigkeit zu begründen? Sind keine Replenishments zugelassen, können keine zusätzlichen Kreditrisiken in das Referenzportfolio aufgenommen werden. Dadurch können keine zusätzlichen Kreditereignisse auftreten. Die Ereignisverteilung ist konstant. Mit positivem, jedoch kleinem Trigger können dem Referenzportfolio zusätzliche Kreditrisiken hinzugefügt werden. Die Anzahl der Ausfallereignisse steigt tendenziell an (Bewe-

<sup>761</sup> Bei einem Trigger von 24 Mio. EUR liegt der Erwartungswert bereits wieder über 200 Kreditausfällen. Vergleiche auch die Kurvenverläufe in Abb. 4-16.

gung entlang der Graphen in Abb. 4-16). Allerdings sind die Möglichkeiten der Aufnahme neuer Kredite durch die niedrige Wahl des Triggers äußerst begrenzt. Umso bedeutender ist die Höhe der Recovery Rate. Mit zunehmender Recovery Rate können zusätzliche Kreditrisiken durch Auffüllung wiedergewonnener Anteile ausgefallener Kredite mit neuen Krediten aufgenommen werden. Der Erwartungswert der Kreditausfallzahl steigt merklich (Bewegung horizontal zur Ordinate im linken und mittleren Abschnitt der Abb. 4-16). Geringe Trigger werden folglich durch hohe Recovery Rates ausgeglichen.<sup>762</sup> Umgekehrt können bei niedrigen Recovery Rates hohe durchschnittliche Kreditausfallzahlen nur mit hohen Triggern einhergehen. Bestimmte gegebene durchschnittliche Kreditausfallzahlen sind in der Konsequenz mit verschiedenen Recovery Rate/Trigger-Kombinationen erzielbar. Da mit wachsendem Trigger die Notwendigkeit hoher Recovery Rates für hohe durchschnittliche Kreditausfallzahlen entfällt, sinkt auch ihr Einfluss. Zwar steigt das Potential für weitere Kreditausfälle innerhalb des Referenzportfolios durch die Möglichkeit zusätzlich wiedergewonnene Kreditanteile mit weiteren Krediten aufzufüllen. Jedoch ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieses zusätzliche Potential bei dem ohnehin hohen Trigger ausgenutzt wird, aufgrund der niedrigen Ausfallquoten gering. Die erwarteten Kreditausfälle liegen bei hohen Triggern für unterschiedliche Recovery Rates dicht beieinander (Bewegung horizontal zur Ordinate im rechten Abschnitt der Abb. 4-16).



**Abb. 4-16: Replenishment-Trigger, Recovery Rate und erwartete Kreditausfallzahl**

Der Erwartungswert der Ereignisverteilung in Abhängigkeit der Höhe des Replenishment-Triggers für alternative Recovery Rates. Die Kredite stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Simulation basiert auf den Credit Curves vom Typ B.

<sup>762</sup> Im Extremfall beträgt die Recovery Rate 100 %, womit die Begrenzung der Replenishmentmaßnahmen sogar außer Kraft gesetzt wäre.

### 423 Ereignisverteilungen in der Sensitivitäts- und Szenarioanalyse

Als wesentliche Parameter für das Aussehen der Ereignisverteilungen sind unbestreitbar die Form und vor allem die Lage der Credit Curves anzusehen. Eine Verschiebung, Drehung<sup>763</sup> oder Krümmungsänderung der Credit Curves nach oben führt ceteris paribus zu höheren Wahrscheinlichkeiten für einzelne und gemeinsame Kreditausfälle. Umgekehrt führt eine Verschiebung, Drehung oder Krümmungsänderung der Credit Curves nach unten ceteris paribus zu weniger Ausfallereignissen. Fraglich bleibt das Ausmaß etwaiger Veränderungen auf die gemeinsamen Ereignisverteilungen.

Zunächst ist jedoch zu klären, wie eine Veränderung der Credit Curves aussehen kann und welche Größenordnungen dabei realistisch sind. Da bereits die Ausfallwahrscheinlichkeiten zwischen den einzelnen Ratingklassen nicht linear ansteigen, ist nicht zu erwarten, dass sich Veränderungen der Credit Curves, insbesondere induziert durch Veränderungen des gesamtwirtschaftlichen Klimas, ratingübergreifend betragsmäßig gleich vollziehen. Orientierung bieten die empirischen Untersuchungen der Ratingagenturen. Seit 1981 betrachtet STANDARD & POOR'S sog. statische Portfolien, d. h. bezüglich eines Jahres abgeschlossene Portfolien, welche sämtliche durch STANDARD & POOR'S gerateten Schuldner des jeweiligen Jahres umfassen.<sup>764</sup> Die Ratingmigrationen innerhalb der statischen Portfolien werden regelmäßig dokumentiert und ausgewertet. Insbesondere sind die veröffentlichten 1-jährigen Übergangsmatrizen für die weiteren Überlegungen von Interesse.<sup>765</sup> Eine erste Analyse zeigt, dass die Übergangsmatrizen im Zeitraum nicht konstant sind.<sup>766</sup> Vielmehr haben bereits empirische Studien auf mögliche Zusammenhänge zwischen makroökonomischen Variablen und Migrationsmatrizen hingewiesen.<sup>767</sup> Aus den 1-jährigen Übergangsmatrizen seit 1981 sollen eine Worst-Case- und eine Best-Case-Matrix sowie damit einhergehend *Worst-Case und Best-Case Credit Curves* ermittelt werden. Als Auswahlkriterium könnten die Ausfallraten herangezogen werden. Problematisch ist, dass die Minima und Maxima der Ausfallraten einzelner Ratingklassen nicht immer zum selben Zeitpunkt erreicht werden. Zudem sind bei verändertem Risikohorizont die Migrationsraten hinzuzuziehen. Ggf. führt die Gesamtstruktur der einzelnen Matrizen dazu, dass Lage und Form der resultierenden Credit Curves ähnlich sind, sich die Graphen für einzelne Ratings je-

---

<sup>763</sup> Gemeint ist eine Drehung der Credit Curves um den Ordinaten Schnittpunkt.

<sup>764</sup> Vgl. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 13-15 (STANDARD & POOR'S Studie).

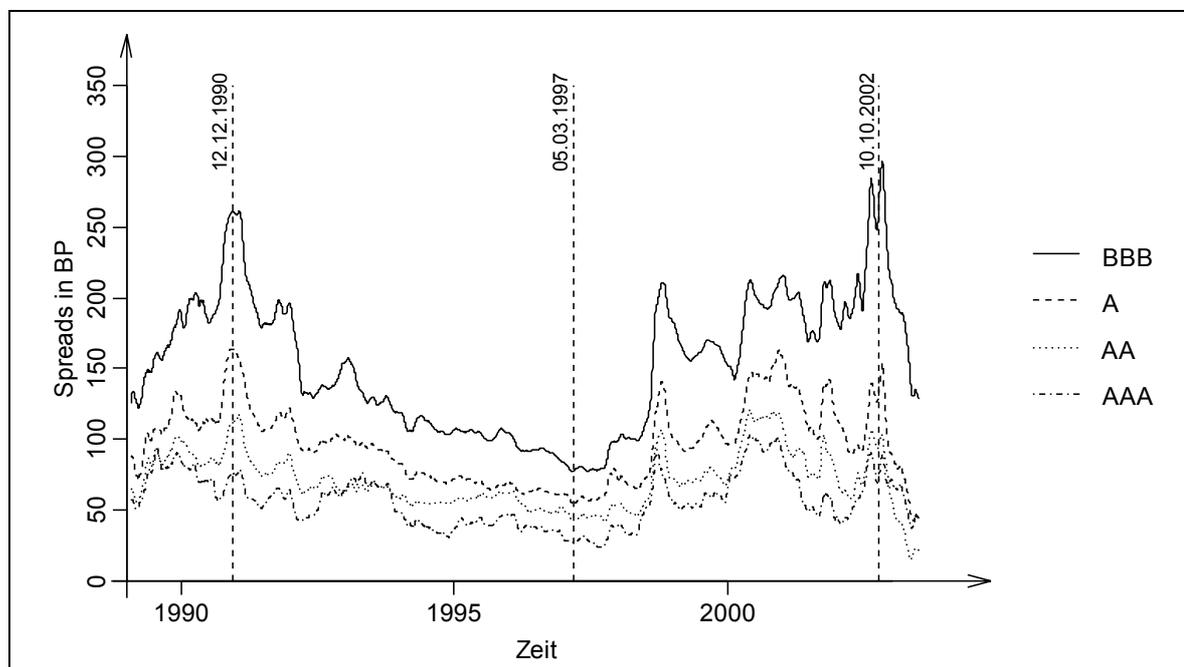
<sup>765</sup> Vgl. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 30-35 (STANDARD & POOR'S Studie).

<sup>766</sup> Diese Beobachtung spricht gegen die MARKOV-Eigenschaft der Migrationsmatrizen. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass die Migrationsmatrizen aus sich regelmäßig ändernden Portfolios (Stichproben) ermittelt werden.

<sup>767</sup> Vgl. A. Bangia et al. (2002), Rating migration and the business cycle, S. 463-468. Die Autoren schätzen durchschnittliche Migrationsmatrizen für Expansions- und Rezessionsphasen.

doch schneiden. U. U. ist weiterhin die Ratingverteilung des Referenzportfolios hinzuzuziehen. Hier soll ein pragmatischer Ansatz verfolgt werden, indem zusätzlich zu den Ausfallraten die Credit Spreads an den Bondmärkten herangezogen werden.

Credit Spreads können als relative Finanzierungskosten eines Schuldners interpretiert werden, da sie als Renditeaufschläge gegenüber der Verzinsung eines (kredit)risikofreien Benchmarktitels anzeigen, welche zusätzlichen Risikokompensationen Gläubiger für (kredit)risikobehaftete Engagements im Vergleich zu einer (kredit)risikofreien Anlage fordern.<sup>768</sup> Unter Vernachlässigung des Einflusses etwaiger Änderungen des Marktpreises für eine „Einheit“ Kreditrisiko können Credit Spreads als Marktbarometer<sup>769</sup> für den Kreditrisikogehalt der Schuldtitel herangezogen werden.<sup>770</sup>



**Abb. 4-17: Investment-Grade Credit Spreads im Zeitablauf**

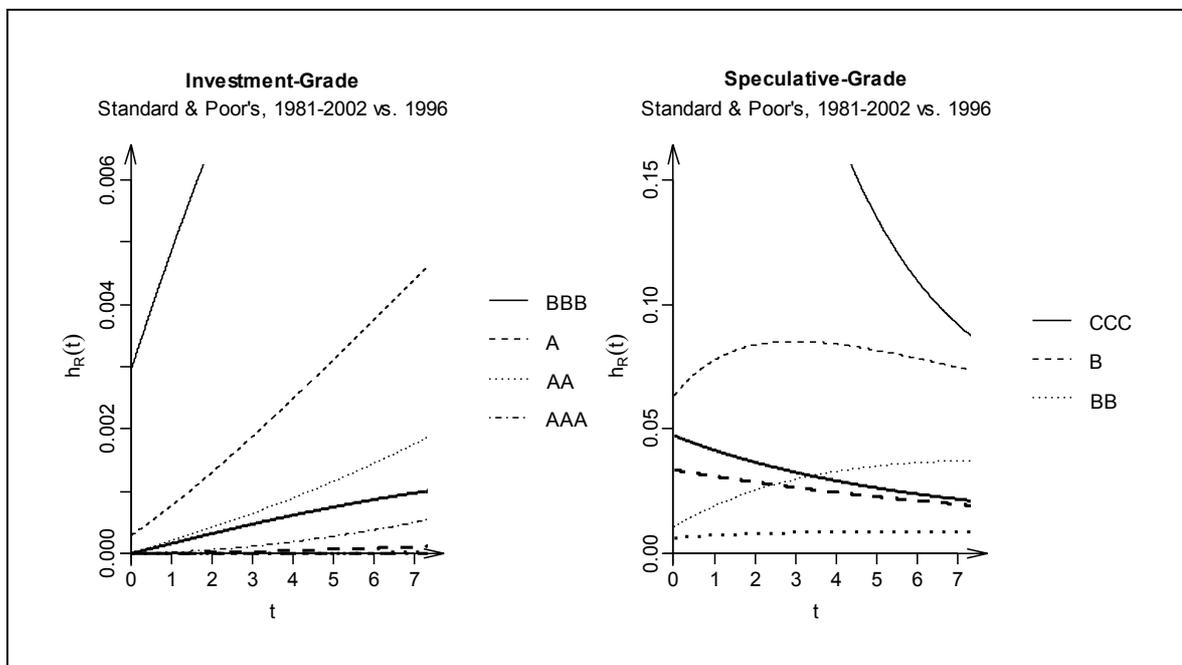
20-Tage-Durchschnitte der täglichen Spreadausprägungen für den Zeitraum vom 03.01.1989 bis zum 30.06.2003 (3739 Datensätze) zwischen dem US-Treasury-Index und den US Corporate Investment-Grade Bond-Indizes für das Laufzeit-Cluster von 7 bis 10 Jahren.

<sup>768</sup> Vgl. S. Jortzik und S. Mergner (2003), Bond Credit Spreads und Ratings, S. 7. Credit Spreads stellen lediglich einen Teil des gesamten Spreads dar. Vgl. A. Estrella et al. (2000), Credit ratings, S. 119 f. Da aber der Credit Spread die bedeutendste Komponente darstellt, soll im Folgenden keine Unterscheidung erfolgen. Vgl. P. Collin-Dufresne, R. Goldstein und J. Martin (2001), Credit spread changes, S. 2178.

<sup>769</sup> Theoretisch liegt der obigen Betrachtung die Annahme zugrunde, dass die (Anleihe-)Märkte jederzeit alle relevanten Informationen in die Preise der Schuldtitel einfließen lassen. Dies sollte in effizienten Märkten stets der Fall sein. Vgl. R. Brealey und S. Myers (2003), Corporate finance, S. 347-356. Die Annahme effizienter Bondmärkte scheint zumindest in der halb-strengen Form begründet zu sein. Vgl. bspw. M. Weinstein (1977), Effects on rating change announcements, S. 345; G. Pinches und J. Singleton (1978), Bond rating changes, S. 29; R. Ingram, L. Brooks und R. Copeland (1983), Information content, S. 1002. Bei internationalen Märkten gilt die Annahme der Effizienz nicht uneingeschränkt, da u. U. nicht die gesamte öffentliche Information eines nationalen Bondmarktes auch den Marktteilnehmern aus anderen Märkten zeitnah zugänglich ist. Vgl. M. Steiner und V. Heinke (2001), Event study, S. 140.

<sup>770</sup> Zum empirischen Zusammenhang zwischen Ausfallraten und Credit Spreads siehe S. Jortzik und S. Mergner (2003), Bond Credit Spreads und Ratings, S. 21 f.

Die betrachteten Spreads sind im Zeitablauf deutlichen Schwankungen unterworfen (Abb. 4-17).<sup>771</sup> Ende Mai 1991 stiegen die Spreads signifikant an. Nachdem die Spreads ihre Höchststände überschritten hatten, folgte eine anhaltende Phase sinkender Spreads. Die Tiefstände wurden Ende Oktober 1997 erreicht. In den folgenden Jahren verdoppelten sich die Spreads und erreichten 2001 bzw. 2002 neue Höchststände.<sup>772</sup> Die Spreadentwicklung geht einher mit der Entwicklung der 1-jährigen Ausfallraten. Den Ausfallraten folgend, kommen als Worst-Case sowohl die Übergangsmatrix für 1991 als auch die für 2001 und 2002 in Betracht. Aufgrund der höheren Spitzen der Credit Spreads im Jahr 2002, insbesondere im mittleren Bonitätsbereich, wird jedoch die letzte Matrix herangezogen. Als Best-Case wird die Übergangsmatrix für das Jahr 1996 verwendet. Aus den Übergangsmatrizen lassen sich die folgenden, fett eingezeichneten Best- und Worst-Case Credit Curves ableiten:

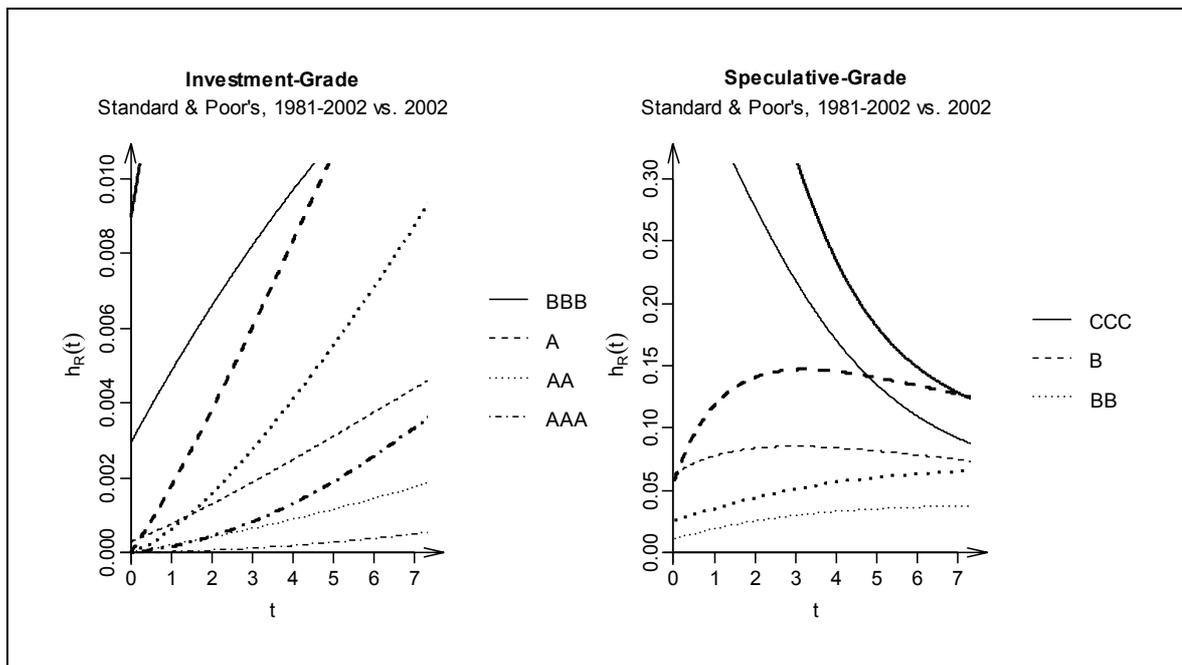


**Abb. 4-18: Best-Case Credit Curves vom Typ B im Vergleich**

Die durchschnittlichen Credit Curves (1981-2002) im Vergleich mit den Credit Curves, basierend auf der historischen 1-jährigen Migrationsmatrix für das Jahr 1996 (fett eingezeichnet) nach STANDARD & POOR'S.

<sup>771</sup> Die Analyse der Credit Spreads basiert auf durchschnittlichen Spreads U.S.-amerikanischer Unternehmensanleihen. Für aus Unternehmensanleihen zusammengesetzte Indizes liefert BLOOMBERG die historischen Yields to Maturity für jeden Börsentag aufgeteilt nach Ratingklassen und Restlaufzeitklassen. Außerdem stellt BLOOMBERG die Treasury Yields für U.S.-amerikanische Staatsanleihen zur Verfügung. Für das Restlaufzeitcluster von 7 bis 10 Jahren wurden für jede Ratingklasse börsentäglich vom 03.01.1989 bis 30.06.2003 (3739 Datensätze) die Spreads als Differenz zwischen der Rendite des ausfallrisikobehafteten Anleiheindex und der restlaufzeitidentischen Treasury Yield ermittelt. Vgl. ausführlicher zur Methodik und Datenbasis S. Jortzik und S. Mergner (2003), Bond Credit Spreads und Ratings, S. 15 u. 19 f. sowie S. 60, Anlage 2, Tab. A-6.

<sup>772</sup> Für detailliertere Analysen siehe S. Jortzik und S. Mergner (2003), Bond Credit Spreads und Ratings, S. 19-29.



**Abb. 4-19: Worst-Case Credit Curves von Typ B im Vergleich**

Die durchschnittlichen Credit Curves (1981-2002) im Vergleich mit den Credit Curves, basierend auf der historischen 1-jährigen Migrationsmatrix für das Jahr 2002 (fett eingezeichnet) nach STANDARD & POOR'S.

Aus Abb. 4-18 und Abb. 4-19 ist ersichtlich, dass die Änderungen der Credit Curves in Abhängigkeit von der Bonität unterschiedlich stark ausgeprägt sind. Tendenziell nimmt das Ausmaß der Änderungen – absolut betrachtet – mit sinkender Bonität zu. Relativ betrachtet, fallen die Änderungen im Investment-Grade-Bereich hingegen deutlich stärker als im Speculative-Grade-Bereich aus.<sup>773</sup>

Die Best- und Worst-Case Credit Curves gehen einher mit entsprechend geänderten Ausfallsschranken  $K_R$  gem. (3.32). Dabei wurden die Schranken erneut so gewählt, dass die Zeittransformation (3.26) den Risikohorizont  $t_H=5$  stets unberührt lässt:

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
1996	-10,7667	-9,8012	-8,5297	-6,9291	-4,6093	-3,3881	-3,1277
Ø 1981-2002	-7,7582	-6,6994	-5,9218	-4,6947	-3,4535	-2,1648	-0,7949
2002	-6,5033	-5,6391	-5,0140	-3,6628	-2,8307	-1,5721	-0,3964

**Tab. 4-11: Ratingabhängige Ausfallsschranken in der Szenarioanalyse**

Ratingabhängige Ausfallsschranken für zeittransformierte BROWNSche Bewegungen auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S für den Risikohorizont  $t_H=5$ .

Da sich mit den geänderten Credit Curves die Ausfallwahrscheinlichkeiten geändert haben, sind die Faktorsensitivitäten gem. (3.41) anzupassen. Zur Berechnung werden wie zuvor die 1-jährigen, ratingabhängigen Ausfallwahrscheinlichkeiten herangezogen:

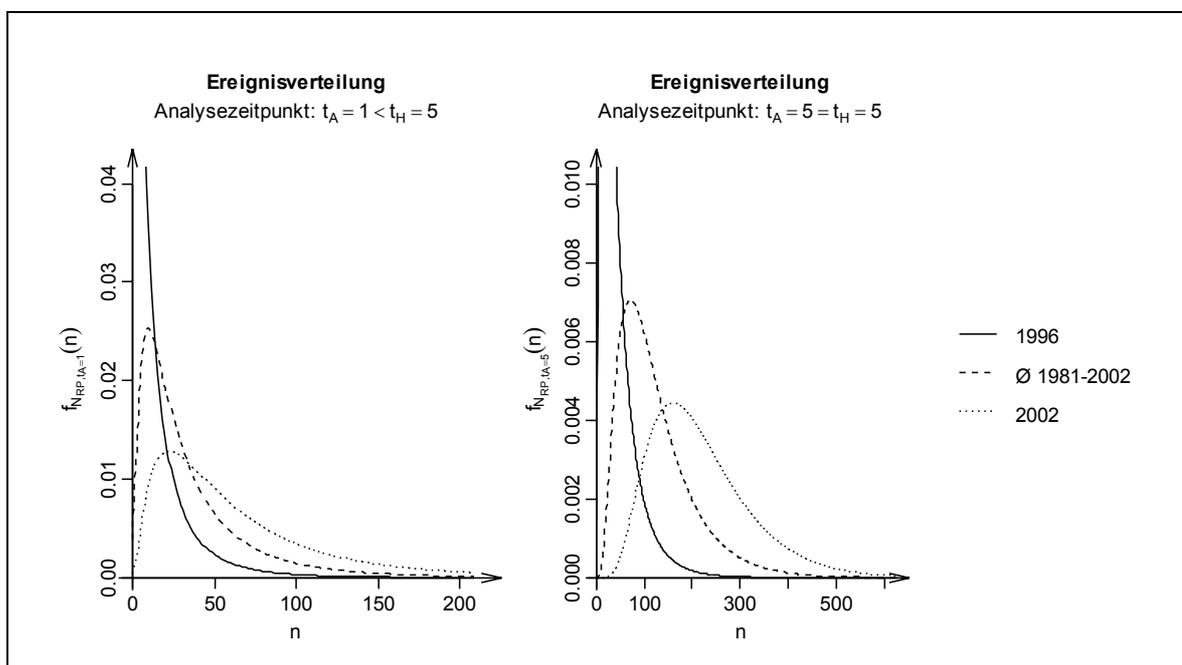
<sup>773</sup> Zu vergleichbaren Ergebnissen gelangen S. Jortzik und S. Mergner (2003), Bond Credit Spreads und Ratings, S. 30-36 bei der empirischen Analyse von Credit Spreads.

Rating	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC
1996	24,00 %	24,00 %	24,00 %	23,95 %	20,53 %	14,45 %	13,37 %
Ø 1981-2002	24,00 %	23,94 %	23,69 %	21,87 %	17,65 %	12,38 %	12,00 %
2002	23,96 %	23,84 %	23,49 %	18,60 %	14,67 %	12,15 %	12,00 %

**Tab. 4-12: Ratingabhängige Faktorsensitivitäten in der Szenarioanalyse**

Ratingabhängige Faktorsensitivitäten für Unternehmenskredite in Anlehnung an das dritte Konsultationspapier des BCBS zur neuen Eigenkapitalvereinbarung. Die zugehörigen Ausfallwahrscheinlichkeiten entsprechen den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie den 1-Jahres-Migrationsraten der Jahre 1996 und 2002 nach STANDARD & POOR'S.

Zunächst seien die Ereignisverteilungen ohne Replenishments betrachtet. Sie sind für Bonds und Loans identisch und mit Hilfe des semi-analytischen Modellansatzes ermittelbar. Abb. 4-20 zeigt die resultierenden verstetigten Wahrscheinlichkeitsfunktionen:



**Abb. 4-20: Ereignisverteilung für Loans und Bonds in der Szenarioanalyse**

Graphischer Vergleich der Ereignisverteilungen des Referenzportfolios für die Credit Curves auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S für die Analysezeitpunkte  $t_A=1$  und  $t_A=5$ .

Es wird ersichtlich, dass bereits bei einem Analysehorizont von nur einem Jahr erhebliche Lageabweichungen auftreten. Die Verteilungen des Best-Case (durchgezogene Linien) sind erwartungsgemäß schmaler und konzentrieren einen erheblichen Teil der Wahrscheinlichkeitsmasse auf deutlich geringere Ausfallzahlen. Die Verteilungen des Worst-Case (gepunktete Linien) fallen beträchtlich breiter aus und lassen erahnen, dass bei einer Verschlechterung des makroökonomischen Umfeldes trotz der Portfoliodiversifikation mit spürbar höheren Verlusten zu rechnen sein wird. Bei 2.916 Krediten besteht eine deutlich von null verschiedene Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 500 Kredite ausfallen. Zur Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeit sind erneut die Koeffizienten der (wahrscheinlich-

keits)erzeugenden Funktion beginnend mit dem 502. aufzuaddieren.<sup>774</sup> Betrag ihr Wert im Ausgangsszenario gerade 0,22 %, liegt dieser im Worst-Case-Szenario bei 1,81 %.

Das Ausmaß der Unterschiede wird insbesondere anhand der Entwicklung der Erwartungswerte sowie der Quantile ersichtlich. Bereits für den Risikohorizont von einem Jahr liegt annähernd eine Verdreifachung des 1 %-Quantils beim Übergang vom Best-Case zum Worst-Case vor. Ähnlich stellt sich die Situation beim 5 %-Quantil dar. Auffallend ist die sich verstärkende Symmetrie der Verteilung. Sie geht einher mit überproportional variierenden Erwartungswerten. Am Beispiel des 5-jährigen Analysezeitpunkts beträgt der Erwartungswert des Worst-Case das Fünffache des Wertes des Best-Case:

Horizont	1 Jahr			5 Jahre		
	1996	Ø 1981-2002	2002	1996	Ø 1981-2002	2002
EW	15,80	36,71	66,35	42,23	123,44	217,55
Q=5 %	56	113	184	120	277	419
Q=1 %	106	195	293	194	392	546

**Tab. 4-13: Erwartungswerte und Quantile der Ereignisverteilung ohne Replenishments in der Szenarioanalyse**

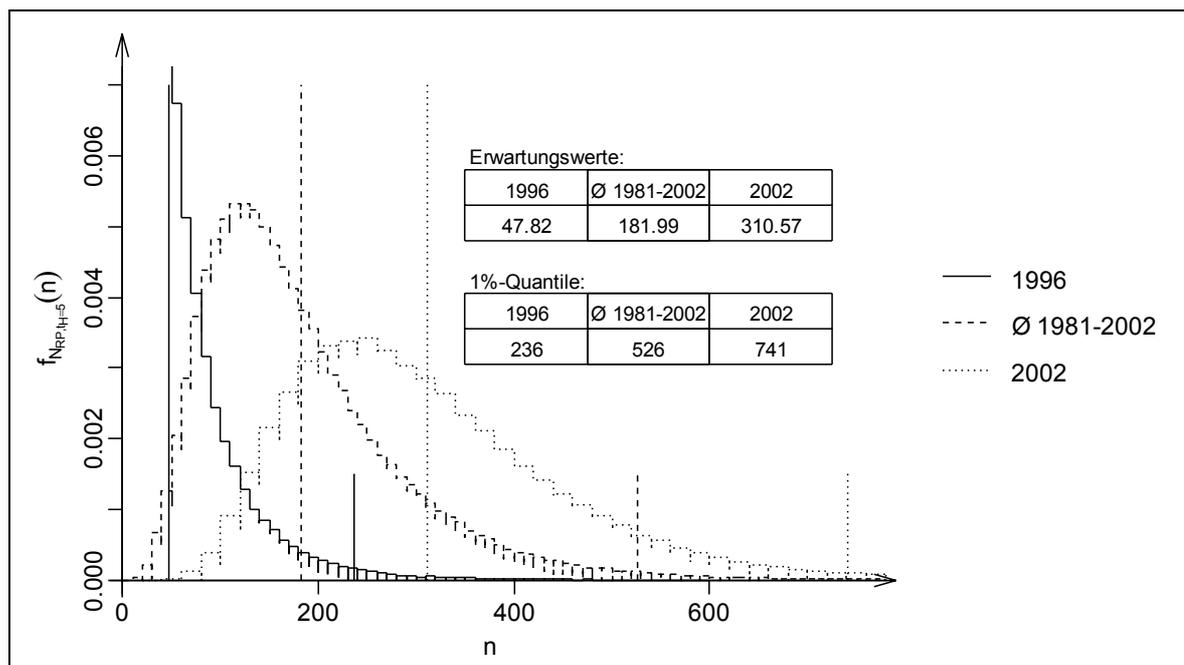
Erwartungswerte und Quantile der Ereignisverteilung auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S für die Analysezeitpunkte  $t_A=1$  und  $t_A=5$ .

Ist bereits mit einer drastischen Erhöhung der Kreditausfallzahlen im Falle des Worst-Case gegenüber dem Ursprungsszenario für das Referenzportfolio ohne Replenishmentmaßnahmen zu rechnen, verstärkt sich diese Tendenz noch einmal spürbar, sollten Replenishmentmaßnahmen zulässig und in die Modellierung einzubeziehen sein. Die erhöhten Kreditausfallwahrscheinlichkeiten wirken sich dann auch auf die dem Referenzportfolio neu hinzugefügten Kredite aus. Der Tendenz entgegen wirkt, dass ausgefallene Kredite nicht ersetzt werden können. Somit werden bei höheren Ausfallwahrscheinlichkeiten aufgrund der höheren Ausfallzahlen im Ursprungsportfolio durchschnittlich weniger Kredite im Zuge der Replenishmentmaßnahmen dem Ursprungsportfolio hinzugefügt. Die Beschränkung der Replenishments auf nicht ausgefallene Kredite fungiert somit als „Notbremse“.

Sollte das Referenzportfolio zudem sich amortisierende Kredite (Loans) enthalten, können ferner die bereits amortisierten Kreditanteile durch Replenishmentmaßnahmen aufgefüllt werden. Das wird die Kreditausfallzahlen tendenziell weiter erhöhen. Allerdings könnte ein starkes Wachstum der Ausfallquote durch einen Replenishment-Trigger wirksam begrenzt werden. Die dadurch eingeführte kritische Verlustgrenze dürfte zeitlich betrachtet

<sup>774</sup> Vgl. auch die Ausführungen im Abschnitt 421.

im Durchschnitt früher erreicht werden. Die Replenishmentmaßnahmen wären einzustellen. Mit Blick auf die Diskussion der Wirksamkeit eines Triggers bezüglich der Wahl seiner Höhe sollte dieser auch im Falle eines hohen Wertansatzes seine Wirkung nicht verlieren. Damit könnte der Trigger genau so gewählt werden, dass dieser unter „normalen“ ökonomischen Bedingungen kaum einen Einfluss auf die Ereignisverteilung ausübt (Bewegung entlang der Graphen im rechten Abschnitt der Abb. 4-16), jedoch bei Verschlechterung der Rahmenbedingungen die Kreditausfallzahlen wirksam begrenzt.



**Abb. 4-21: Ereignisverteilung für Loans mit Replenishmentmaßnahmen und Replenishment-Trigger in der Szenarioanalyse**

Vergleich der Ereignisverteilungen des Referenzportfolios für die Credit Curves auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S. Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Der Replenishment-Trigger beträgt 12 Mio. EUR.

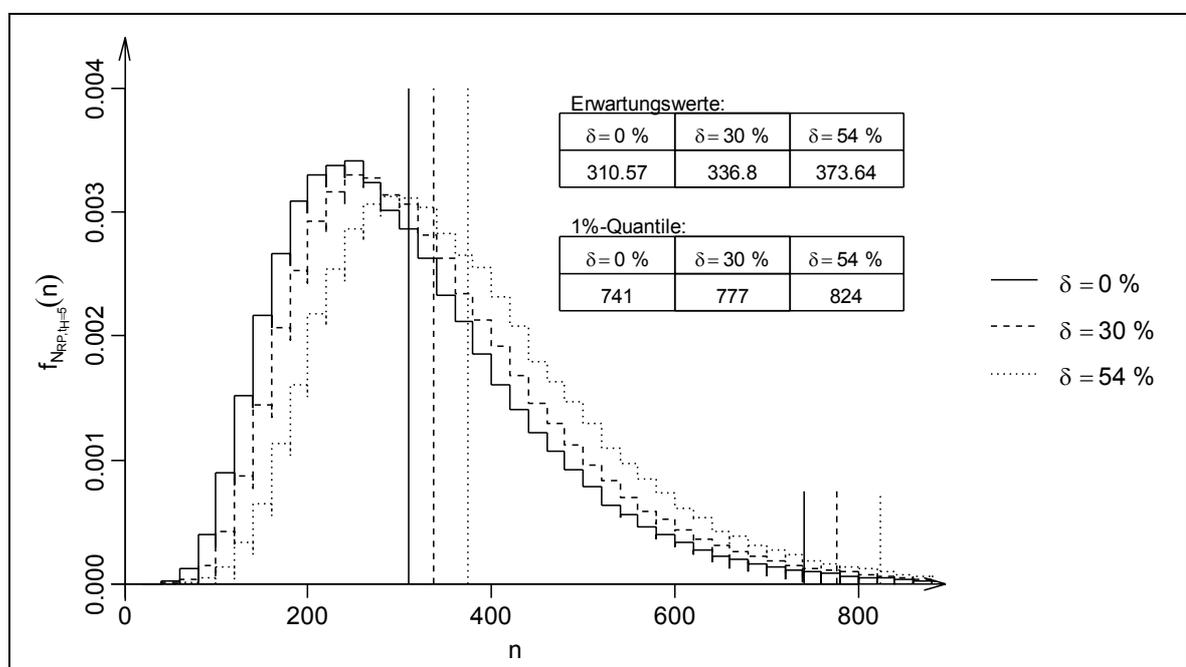
In Abb. 4-21 sind für eine Recovery Rate von 0 % die relativen Häufigkeitsverteilungen (Histogramme) der Kreditausfallzahlen im Falle von Abzahlungsdarlehen unter Berücksichtigung von Replenishmentmaßnahmen und einem Replenishment-Trigger i. H. v. 12 Mio. EUR, basierend auf einer Monte-Carlo-Simulation mit 250.000 Simulationsschritten, abgetragen. Ein Vergleich mit Abb. 4-20 (rechts) zeigt, dass – wie vermutet – die Wirkung der Rahmenbedingungen des Worst-Case auf die Ereignisverteilung durch die Replenishments multipliziert wird. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 500 Kredite ausfallen beträgt nun 9,47 %. Die Erwartungswerte des Best- und Worst-Case unterscheiden sich voneinander um den Faktor 6,5. Das 1 %-Quantil liegt im Worst-Case bei 741 Krediten und entspricht damit ca. 25 % der Kreditanzahl des ursprünglichen Referenzportfolios.

Horizont	5 Jahre								
Szenario	1996			Ø 1981-2002			2002		
	$\delta=0\%$	$\delta=30\%$	$\delta=54\%$	$\delta=0\%$	$\delta=30\%$	$\delta=54\%$	$\delta=0\%$	$\delta=30\%$	$\delta=54\%$
EW	47,82	48,07	48,13	181,99	192,50	204,02	310,57	336,80	373,64
Q=5 %	141	143	143	378	394	418	571	605	651
Q=1 %	236	236	241	526	544	571	741	777	824

**Tab. 4-14: Erwartungswerte und Quantile der Ereignisverteilung von Loans mit Replenishments und Replenishment-Trigger in der Szenarioanalyse**

Erwartungswerte und Quantile der Ereignisverteilung auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S für unterschiedliche Recovery Rates. Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Der Trigger beträgt 12 Mio. EUR.

Abschließend seien alternative Recovery Rates in die Diskussion einbezogen. Tab. 4-14 zeigt die Erwartungswerte und ausgewählte Quantile des Best- und Worst-Case für alternative Recovery Rates. Insbesondere im Worst-Case (vgl. Abb. 4-22) führen hohe Recovery Rates durch die Auffüllung wiedergewonnener Kreditanteile im Falle von Kreditausfällen zur Aufnahme zusätzlicher Kreditrisiken in das Referenzportfolio und zu tendenziell höheren Ausfallzahlen. Bei einer Recovery Rate von 54 % beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 500 Kredite ausfallen 17,56 %. Die Erwartungswerte des Best- und Worst-Case unterscheiden sich voneinander um den Faktor 7,8. Das 1 %-Quantil liegt bei 824 Krediten und entspricht fast 30 % der Kreditanzahl des ursprünglichen Referenzportfolios.



**Abb. 4-22: Worst-Case-Ereignisverteilungen für Loans mit Replenishments und Replenishment-Trigger**

Vergleich der Ereignisverteilungen des Referenzportfolios für die Credit Curves auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S. Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Der Replenishment-Trigger beträgt 12 Mio. EUR.

### 43 Kreditrisikomessung mit Verlustverteilungen

#### 431 Verlustverteilungen ohne Portfolioreplenishments

#### 4311 Heterogene Portfolios mit endfälligen Krediten

Die Verlustverteilungen werden im Folgenden aus den bedingten erzeugenden Funktionen  $G_{L_{RP,t}}(z)|\Psi$  gem. (3.169) bzw. den Koeffizienten  $c_{L_{RP,t}j}|\Psi$  gem. (3.171) des semi-analytischen Modells abgeleitet.<sup>775</sup> Zur Ermittlung der unbedingten erzeugenden Funktion  $G_{L_{RP,t}}(z)$  bzw. der unbedingten Koeffizienten  $c_{L_{RP,t}j}$  sind die bedingten erzeugenden Funktionen in Analogie zu (3.136) bzw. die bedingten Koeffizienten in Analogie zu (3.142) über alle möglichen Ausprägungen des systematischen Faktors  $\Psi$ , gewichtet mit den Werten seiner Dichtefunktion, zu integrieren. Die Integration erfolgt numerisch und ist daher approximativ. Den Analysen zur Integrationsgüte im Rahmen der Ereignisverteilung folgend, wird dazu der Abschnitt  $[-5,5]$  des Definitionsbereichs des systematischen Risikofaktors in 100 Teilabschnitte aufgeteilt.<sup>776</sup>

Wie zuvor die Ereignisverteilungen sind ebenso die Verlustverteilungen auf der Basis der Credit Curves vom Typ A<sup>777</sup>, B und C<sup>778</sup> ermittelbar.<sup>779</sup> Erneut auf die Diskussion zur Ereignisverteilung verweisend, soll im weiteren Verlauf lediglich auf die Credit Curves vom Typ B zurückgegriffen werden.<sup>780</sup> Verzichtet wird ebenso auf die abermalige Erörterung portfolioinhomogener Restlaufzeiten<sup>781</sup> und Kreditratings<sup>782</sup>.

Zu betrachten sind dagegen die spezifischen verlustverteilungseigenen Einflussfaktoren. Eine herausragende Stellung nehmen dabei die Nominalwerte der einzelnen Kredite ein und verdienen daher besondere Aufmerksamkeit. Zunächst sei dabei von endfälligen Krediten (Bonds) ausgegangen. Die Recovery Rate betrage 0 %. In Abb. 4-23 sind die Verlustverteilungen des Referenzportfolios für die Analysezeitpunkte  $t_A=1$  (durchgezogene Linie) und  $t_A=5$  (gestrichelte Linie) abgetragen. Dabei wird deutlich, dass hohe Verluste trotz des hohen Portfoliovolumens lediglich mit geringen Wahrscheinlichkeiten einhergehen. Über die Laufzeit der CDO-Transaktion von 5 Jahren hinweg sind Ausfälle von mehr als 150 Mio. EUR des ursprünglichen Portfolionominalwertvolumens von 1 Mrd. EUR äußerst unwahrscheinlich. Das 1 %-Quantil liegt bei 172,07 Mio. EUR (vgl. Tab. 4-15).

---

<sup>775</sup> Die Verwendung der erzeugenden Funktion ist auf Grund der angenommenen Konstanz der Recovery Rate möglich. Bei stochastischen Recovery Rates müsste auf die charakteristischen Funktionen zurückgegriffen werden. Vgl. Abschnitt 373.

<sup>776</sup> Vgl. Abschnitt 421.

<sup>777</sup> Vgl. Fn. 736.

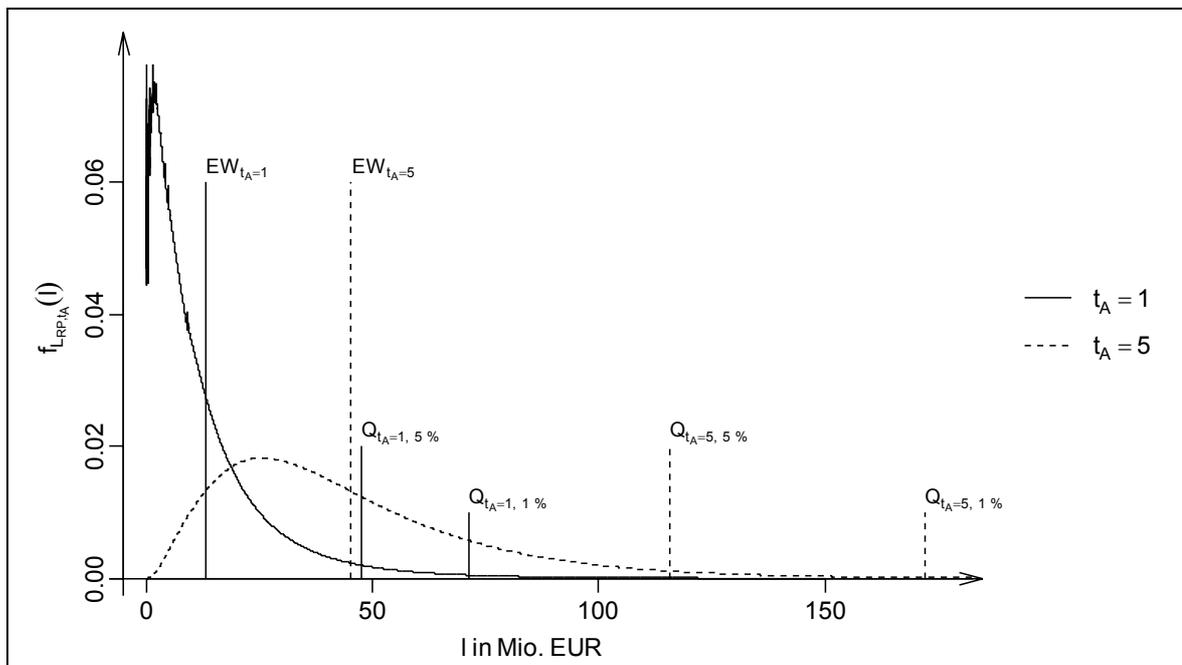
<sup>778</sup> Vgl. Fn. 737.

<sup>779</sup> Vgl. Abschnitt 322.

<sup>780</sup> Vgl. Abschnitt 421, Abb. 4-8.

<sup>781</sup> Vgl. Abschnitt 421, Abb. 4-9.

<sup>782</sup> Vgl. Abschnitt 421, Abb. 4-10.



**Abb. 4-23: Verlustverteilung des Referenzportfolios für alternative Analysezeitpunkte**

Graphische Gegenüberstellung der Verlustverteilungen des Referenzportfolios in Mio. EUR auf der Basis der Credit Curves von Typ B für die Analysezeitpunkte  $t_A=1$  (durchgezogen) und  $t_A=5$  (gestrichelt). Die Kredite sind endfällig (Bonds). Die Recovery Rate beträgt 0 %.

Fraglich ist, inwiefern für große Portfolios die Berücksichtigung heterogener Nominalwerte überhaupt von Bedeutung ist. Die Modellierung könnte erheblich vereinfacht werden, wenn man die heterogenen Nominalwerte durch den durchschnittlichen Nominalwert des Referenzportfolios substituierte. Zur isolierten Betrachtung des Nominalwerteffekts könnte die Verlustverteilung auf der Basis des durchschnittlichen Kreditbetrags von 342.901,20 EUR mit dem semi-analytischen Modell erneut berechnet werden. Die Rechnung kann jedoch erheblich beschleunigt werden, wenn man berücksichtigt, dass die gesuchte Verteilung mit jedem konstanten Nominalwert und anschließender Größenadjustierung ermittelbar ist. Da gem. (4.6) die Anzahl der Koeffizienten der erzeugenden Funktion – natürliche Zahlen für die Nominalwerte vorausgesetzt – von der Summe der Nominalwerte abhängt, ist es sinnvoll und entspricht dem Ziel der Reduktion des Rechenaufwands<sup>783</sup>, den konstanten kreditübergreifenden Nominalwert möglichst klein zu wählen. Zielführend und interpretatorisch zugänglich ist die Wahl der Zahl Eins. Damit erhält man die Ereignisverteilung gem. (3.130) als Spezialfall der Verlustverteilung gem. (3.166). Die heterogenen Restlaufzeiten und Ratings werden nach wie vor in dieser Rechnung berücksichtigt. Die Ereignisverteilung ist im Anschluss mit dem durchschnittlichen Kreditbetrag von 342.901,20 EUR zu reskalieren. Die Reskalierung muss sich sowohl auf den Definitionsbereich als auch auf den Wertebereich erstrecken.

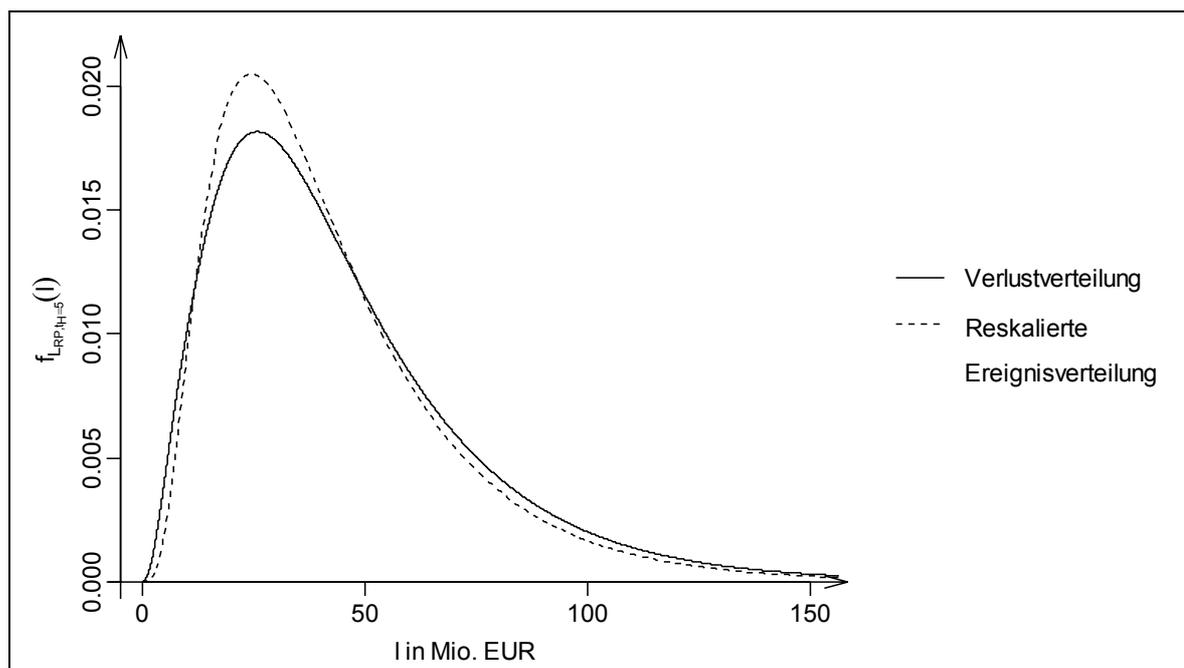
<sup>783</sup> Vgl. Fn. 786.

Zeitpunkt	1 Jahr	5 Jahre	
Basis	Verlustverteilung	Verlustverteilung	Reskalierte Ereignisverteilung
EW	13,17 Mio. EUR	45,28 Mio. EUR	42,32 Mio. EUR
Q=5 %	47,39 Mio. EUR	115,73 Mio. EUR	94,98 Mio. EUR
Q=1 %	71,31 Mio. EUR	172,07 Mio. EUR	134,42 Mio. EUR

**Tab. 4-15: Quantile der Verlustverteilung**

Quantile der Verlustverteilung des Referenzportfolios in Mio. EUR auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten nach STANDARD & POOR'S für die Analysezeitpunkte  $t_A=5$  und  $t_A=1$ . Die Recovery Rate beträgt 0 %.

Graphisch betrachtet, ist die erzeugende Funktion der Ereignisverteilung  $G_{NRP,t}(z)$  mit dem durchschnittlichen Kreditbetrag von 342.901,20 EUR entlang der Abszisse zu „strecken“ und entlang der Ordinate zum Zwecke der Normierung<sup>784</sup> zu „stauchen“.<sup>785</sup> Man erhält die Verlustverteilung eines bzgl. der Nominalwerte homogenisierten Portfolios unter Berücksichtigung der heterogenen Restlaufzeiten und Kreditratings. In Abb. 4-24 ist neben der Verlustverteilung (verstetigte Wahrscheinlichkeitsfunktion) mit heterogenen Nominalwerten für den Analysezeitpunkt von  $t_A=t_H=5$  die so reskalierte Ereignisverteilung abgetragen:



**Abb. 4-24: Nominalwerteffekt auf die Verlustverteilung**

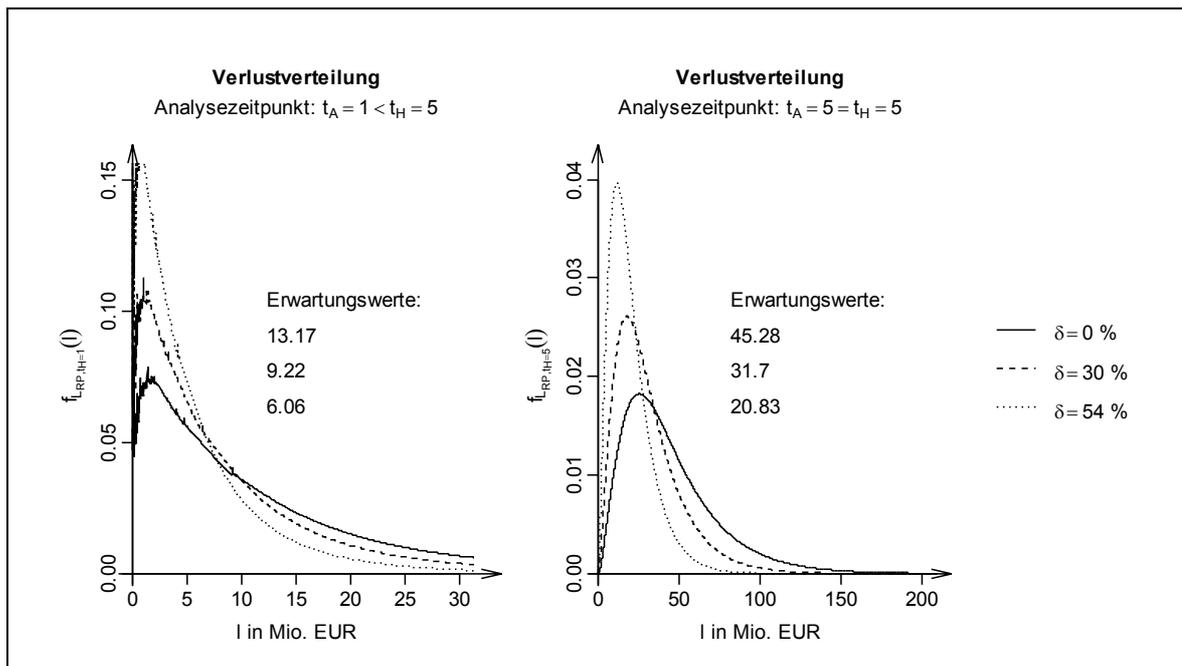
Graphische Gegenüberstellung der Verlustverteilungen des Referenzportfolios mit heterogenen Nominalwerten (durchgezogen) und der reskalierten Ereignisverteilung (gestrichelt) auf der Basis der Credit Curves vom Typ B in Mio. EUR. Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren.

Ein Vergleich der beiden Verteilungen offenbart, dass die reskalierte Ereignisverteilung zwar einen guten Schätzer für die Verlustverteilung darstellt, diese die Wahrscheinlichkei-

<sup>784</sup> Die Fläche unterhalb einer Dichtefunktion muss stets den Wert eins aufweisen.

<sup>785</sup> Beispiel: Der 100. Koeffizient der erzeugenden Funktion gibt die Wahrscheinlichkeit für 99 Kreditausfälle an. Ausgehend von einem durchschnittlichen Kreditbetrag von 342.901,20 EUR kann der Wert dieses Koeffizienten gleichzeitig als Wahrscheinlichkeit für einen Portfolioverlust von 99·342.901,20 EUR = 33,95 Mio. EUR im Rahmen eines entsprechend homogenisierten Portfolios interpretiert werden.

ten hoher Portfolioverluste jedoch systematisch unterschätzt. Während das 1% (5%)-Quantil der Verlustverteilung 172,07 (115,73) Mio. EUR beträgt, wird der Wert mit 134,42 (94,98) Mio. EUR auf der Basis der reskalierte Ereignisverteilung deutlich unterschätzt (vgl. Tab. 4-15). Der erheblich geringere Rechenaufwand der Approximation<sup>786</sup> legt jedoch den Einsatz als Analyseinstrument im Zuge der Portfoliobildung im Vorfeld einer ABS-Transaktion nahe. Die abschließende Portfolioanalyse sollte hingegen immer auf einer detaillierten Berechnung unter Einbeziehung der Heterogenität der Nominalwerte basieren.



**Abb. 4-25: Verlustverteilungen des Referenzportfolios für alternative Recovery Rates**

Graphische Gegenüberstellung der Verlustverteilungen des Referenzportfolio in Mio. EUR auf der Basis der Credit Curves vom Typ B für die Recovery Rates  $\delta=0, 30$  und  $54\%$ . Die Analysezeitpunkte betragen  $t_A=1$  (links) und  $t_A=5$  (rechts).

Der Einfluss der Recovery Rates auf die Verlustverteilung wird mit Abb. 4-25 ersichtlich. Mit zunehmender Recovery Rate wird in wachsendem Ausmaß Wahrscheinlichkeitsmasse nach links verschoben. Die Erwartungswerte und Quantile der Verlustverteilung erfahren eine entsprechende Verringerung. Es ist jedoch zu vermuten, dass die Annahme der Konstanz der Recovery Rate die Wahrscheinlichkeiten für hohe Verluste systematisch unterschätzt. Deutlich wird dies wenn man bedenkt, dass bei einer konstanten Recovery Rate von 30 % oder 54 % der vollständige Verlust des Portfolionominalvolumens von 1 Mrd. EUR ein unmögliches Ereignis darstellt, während die Modellierung von stochastischen Recovery Rates auf dem Bereich  $[0,1]$  mit entsprechenden Erwartungswerten diesem Ereignis eine positive (wenn auch verschwindend geringe) Wahrscheinlichkeit zuordnet.

<sup>786</sup> Die erzeugende Funktion der Ereignisverteilung des Referenzportfolios (2.916 Kredite) besitzt gerade 2.917 Koeffizienten, während die erzeugende Funktion der Verlustverteilung bei einem Verlustband von 12.000 EUR (vgl. Abschnitt 417) 83.619 Koeffizienten aufweist.

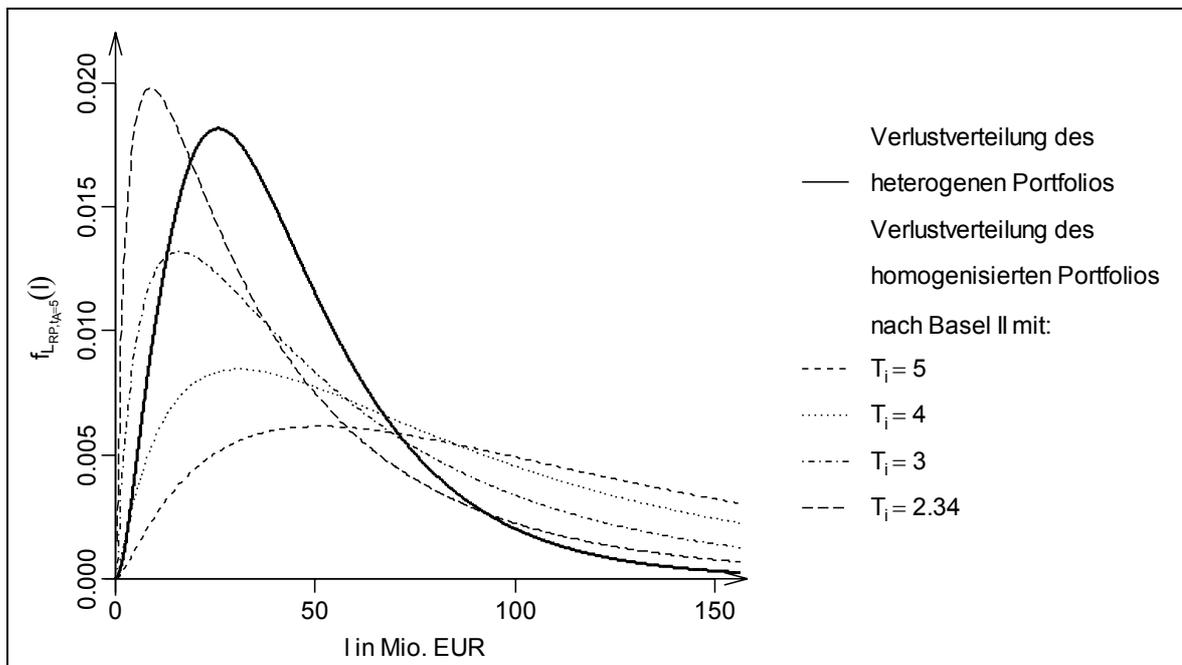
Abschließend soll die Verlustverteilung auf der Basis des vorgestellten Modellrahmens unter Berücksichtigung heterogener Kreditratings, heterogener Restlaufzeiten und heterogener Nominalwerte mit der Verlustverteilung für ein vollständig homogenisiertes Portfolio auf der Basis des Modellrahmens zur NEUEN BASLER EIGENKAPITALVERORDNUNG (Basel II) gem. (4.8) für den Risikohorizont von  $t_H=5$  verglichen werden. In Analogie zur entsprechenden Untersuchung der Ereignisverteilung<sup>787</sup> werden alle Kredite mit einem homogenen Kreditrating  $R_i=R_j=R$ , einer homogenen Restlaufzeit  $T_i=T_j=T$  und einer homogenen Faktorsensitivität  $\rho_i=\rho_j=\rho$  versehen. Als homogenes Kreditrating  $R$  wird das gewichtete Portfoliorating „BB“ verwendet. Damit wird allen Krediten ein und dieselbe Credit Curve zugeordnet, wodurch die Gefahr einer zu pessimistischen bzw. zu optimistischen Credit Curve-Wahl besteht. Für die homogene Restlaufzeit  $T$  wird die durchschnittliche nominalwertgewichtete Portfoliorestlaufzeit von 2,34 Jahren verwendet. Um den Einfluss der Wahl der Höhe der homogenen Restlaufzeit zu verdeutlichen, sollen alternativ dazu sowohl kürzere als auch längere Laufzeiten einer Betrachtung unterzogen werden. Auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten, respektive der bonitätskonformen Credit Curve des Typs B nach STANDARD & POOR'S, ergibt sich im Falle der homogenen Restlaufzeit  $t=2,34$  Jahre eine homogene Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t}=p_{j,t}=p_{BB,2.34}$  in Höhe von 4,57 %. Die ratingabhängige Faktorsensitivität wird auf der Basis der einjährigen Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{BB,1}=1,50$  % ermittelt und beträgt  $\rho_{BB}=17,75$ %. Zusätzlich zur Vorgehensweise im Rahmen der Betrachtung der Ereignisverteilung wird ein homogener Nominalwert  $D_i=D_j=D$  in Höhe des durchschnittlichen Nominalwertes von 342.901,20 EUR modelliert.

Bei der graphischen Darstellung der Dichten bzw. der verstetigten Wahrscheinlichkeitsfunktionen ist zu beachten, dass das Basler Modell gem. (4.8) auf dem Intervall  $[0,1]$  definiert ist und sich folglich nicht auf absolute Portfolioverluste, sondern auf ausgefallene Portfolioanteile bezieht. Daher ist ähnlich der Vorgehensweise zur Ermittlung der reskalierten Ereignisverteilung<sup>788</sup> eine entsprechende Adjustierung vorzunehmen. Im vorliegenden Fall soll das Modell von Basel auf absolute Verlusthöhen bezogen werden. Die Adjustierung bezieht sich sowohl auf die Abszisse als auch auf die Ordinate, um sicherzustellen, dass die Fläche unter der dargestellten Dichte stets eins ergibt. Die Werte des Intervalls  $[0,1]$  sind dazu mit dem Portfolionominalbetrag zu multiplizieren. Die zugehörigen Funktionswerte gem. (4.8) sind demgegenüber durch den Portfolionominalbetrag zu dividieren.

---

<sup>787</sup> Vgl. Abschnitt 421, Abb. 4-11.

<sup>788</sup> Vgl. Abb. 4-24.



**Abb. 4-26: Modellvergleich mit Basel II bei heterogener Portfoliostruktur**

Vergleich der Verlustverteilung mit dem Modellansatz nach Basel II. Die Rechnung nach Basel II basiert auf dem durchschnittlichen Portfoliorating „BB“. Der Nominalwert beträgt einheitlich 342.901,20 EUR. Die Restlaufzeiten betragen 5, 4, 3 und 2,34 (durchschnittliche, nominalwertgewichtete Portfoliorestlaufzeit). Die Recovery Rate beträgt 0 %.

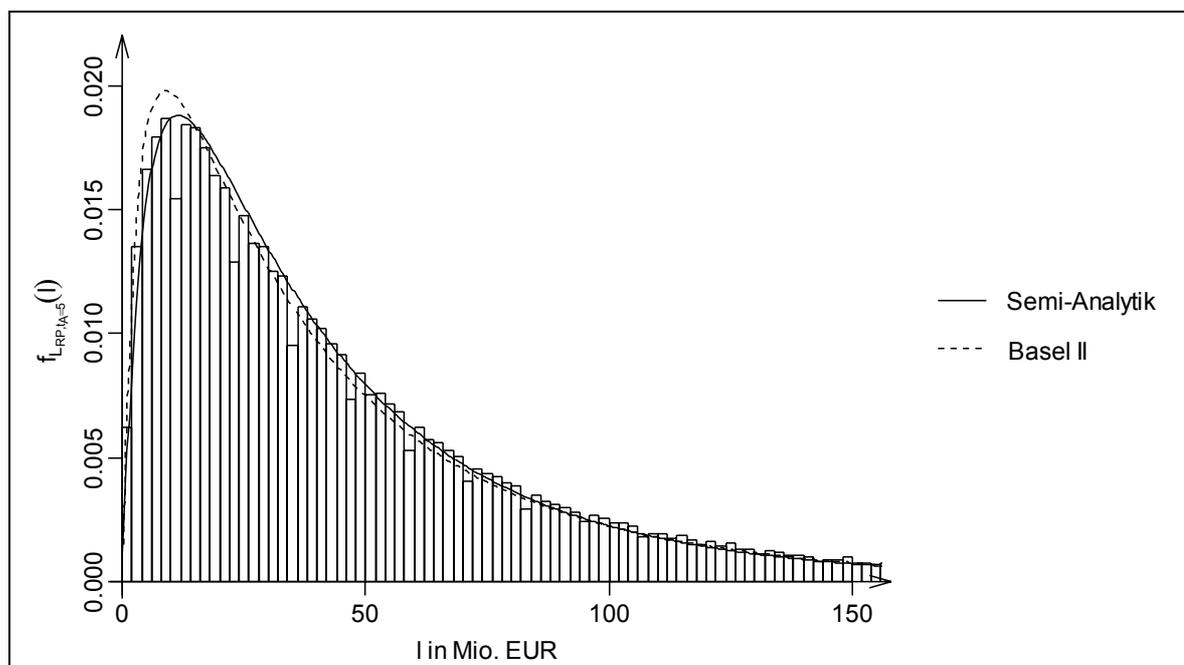
In Abb. 4-26 sind vergleichsweise die Verlustverteilungen für das heterogene Referenzportfolio (durchgezogene Linie) und das homogenisierte Referenzportfolio nach Basel II unter Verwendung der durchschnittlichen nominalwertgewichteten Restlaufzeit  $T=2,34$  Jahre (lang-gestrichelte Linie) abgetragen. Die Verlustverteilungen weichen erheblich voneinander ab. Um den Einfluss der Wahl der Höhe der homogenen Restlaufzeit zu untersuchen, wurden zusätzlich die Verlustverteilungen unter Verwendung alternativer Wertansätze (kurz-gestrichelte, gepunktete und gemischt gepunktete und gestrichelte Linie) eingezeichnet. Es wird deutlich, dass veränderte Wertansätze keine Lösung bieten. Die Verteilung auf der Grundlage der durchschnittlichen nominalwertgewichteten Restlaufzeit  $T=2,34$  ist derjenigen, basierend auf dem semi-analytischen Modelansatz, am ähnlichsten. Der Rating- und der Laufzeiteffekt auf die Ereignisverteilung<sup>789</sup> sowie der Effekt der Nominalwertapproximation auf die Verlustverteilung<sup>790</sup> legen nahe, dass Verteilungsapproximationen durch Portfoliohomogenisierungen wenig Erfolg versprechend und insbesondere mit Blick auf die fehlende ökonomische Interpretation einer durchschnittlichen Portfoliorestlaufzeit willkürlich sind. Leichte Modifikationen der Parameter können zu geringfügigen Anpassungsverbesserungen führen. Insbesondere kann die verwendete Faktorsensitivität variiert werden. Allerdings muss dafür die Zielverteilung bereits bekannt sein, was eine derartige Kalibrierung ad absurdum führt.

<sup>789</sup> Vgl. Abschnitt 421, Abb. 4-9 und Abb. 4-10.

<sup>790</sup> Vgl. Abb. 4-23.

Ein direkter Modellvergleich unter Ausschaltung der Einflüsse der unterschiedlichen Behandlung der Kreditportfolioinhomogenität kann erreicht werden, wenn das semi-analytische Modell auf das homogenisierte Kreditportfolio angewendet wird. Insbesondere wird dadurch eine u. U. konservative Wahl der Credit Curve auf den semi-analytischen Modellansatz übertragen. Eine weitgehende Übereinstimmung würde die Hypothese stützen, dass die beobachteten Verteilungsunterschiede in Abb. 4-26 weitgehend auf das Problem der Portfoliohomogenisierung zurückzuführen ist. Verbleibende Unterschiede hätten modellspezifischen Charakter.

Die resultierende Verlustverteilung ist in Abb. 4-27 (durchgezogene Linie) abgetragen. Zu sehen sind dabei sowohl die verstetigte Wahrscheinlichkeitsfunktion auf der Basis der Semi-Analytik als auch das Histogramm auf der Basis einer entsprechenden Pfadsimulation. Die Übertragung der homogenisierten Portfolioparameter auf den semi-analytischen Modellansatz führt zu einer Verlustverteilung, die weitgehend derjenigen nach dem Basler Modellansatz entspricht. Die verbleibenden Unterschiede sind auf die verschiedenen, modellinhärenten, multidimensionalen Abhängigkeitsstrukturen hinsichtlich der Ausfallereignisse zurückzuführen. Damit wird deutlich, dass die Ursache der beobachtbaren Unterschiede in Abb. 4-26 überwiegend durch die Portfoliohomogenisierungsmaßnahmen begründet ist. Damit sind einfache Modellansätze für homogene Portfolios für die Modellierung von Verlustverteilungen heterogener Portfolios unzureichend.

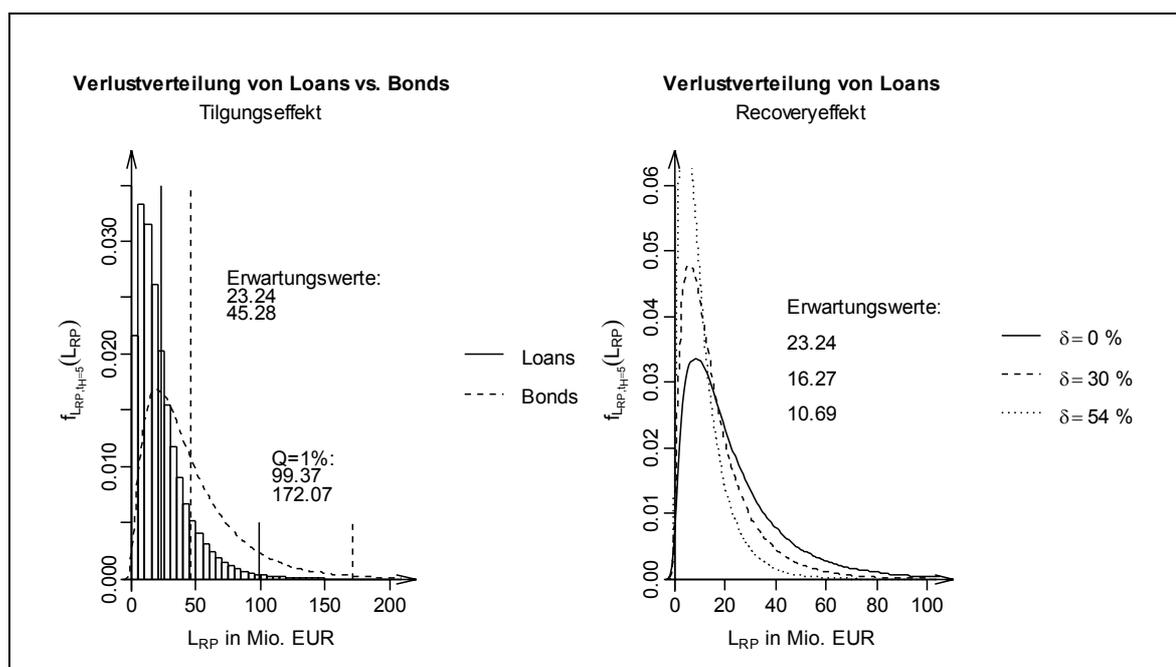


**Abb. 4-27: Modellvergleich mit Basel II bei homogener Portfoliostruktur**

Vergleich der Verlustverteilung mit dem Modellansatz nach Basel II. Beide Rechnungen basieren auf dem durchschnittlichen Portfoliorating „BB“. Der Nominalwert beträgt einheitlich 342.901,20 EUR. Die Restlaufzeiten entsprechen der gewichteten Portfolioestlaufzeit. Die Recovery Rate beträgt 0 %.

## 4312 Heterogene Portfolios mit Abzahlungsdarlehen

In den nachfolgenden Abschnitten sollen die Auswirkungen von regelmäßigen Kredittilgungszahlungen und Portfolioreplenishments auf die Verlustverteilung des Referenzportfolios untersucht werden. Da in beiden Fällen die Kenntnis der genauen Zeitpunkte eintretender Kreditereignisse zur Formulierung der Verlustverteilung notwendig ist, basieren die Untersuchungen nicht auf dem semi-analytischen Modell, sondern auf der Simulation der einzelnen Ability-to-Pay-Prozesse.<sup>791</sup>



**Abb. 4-28: Effekt der Tilgung auf die Verlustverteilung des Referenzportfolios**

Vergleich der Verlustverteilungen des Referenzportfolios (links) auf der Basis von endfälligen Krediten (Bonds) und Abzahlungsdarlehen (Loans) sowie Veranschaulichung der Auswirkung unterschiedlicher Recovery Rates auf die Verlustverteilung der Abzahlungsdarlehen (rechts). Der Risikohorizont beträgt 5 Jahre. Die Simulation basiert auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten nach STANDARD & POOR's bei 250.000 Simulationsschritten.

Anhand von Abb. 4-28 lassen sich die Auswirkungen regelmäßiger Tilgungszahlungen erkennen. Dabei wurde links für eine Recovery Rate von 0 % die Verlustverteilung von endfälligen Krediten (Bonds) auf der Basis des semi-analytischen Modells (gestrichelte Linie) der Verlustverteilung von Abzahlungsdarlehen (Loans) auf der Basis der Pfadsimulation (Histogramm) gegenübergestellt. Durch die regelmäßigen Tilgungen der Schuld im Vorfeld eines Kreditausfalls ist trotz identischer erwarteter Kreditausfallzahl<sup>792</sup> der erwartete Portfolioverlust erheblich geringer. Noch deutlicher wird dies anhand der (1 %-)Quantile. Das Diagramm rechts zeigt die Auswirkungen steigender Recovery Rates. Hervorgehoben sei, dass die Erwartungswerte in linearer Beziehung zu den Recovery Rates stehen.

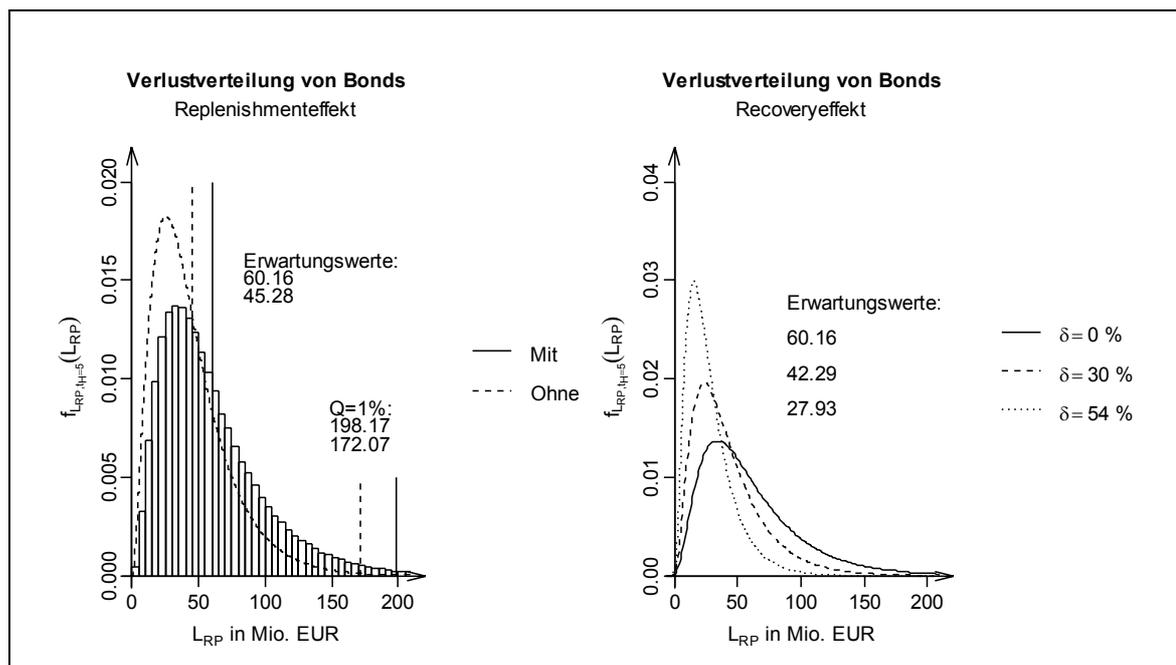
<sup>791</sup> Vgl. zur Implementierung des Modellrahmens im Rahmen einer pfadbezogenen Monte Carlo Simulation Abschnitt 382. Anstelle der Histogramme zeigen die folgenden Abbildungen zur besseren Übersicht häufig nicht-parametrisch angepasste Dichtefunktionen.

<sup>792</sup> Vgl. die Ereignisverteilungen ohne Replenishments in Abschnitt 421.

## 432 Verlustverteilungen mit Portfolioreplenishments

### 4321 Heterogene Portfolios mit endfälligen Krediten

Nach den regelmäßigen Tilgungszahlungen sollen nun die Portfolioreplenishments im Zentrum des Interesses stehen. Zur Gewährleistung einer ceteris paribus Analyse wird zunächst ausschließlich auf endfällige Kredite (Bonds) abgestellt. In Abb. 4-29 wurde links für eine Recovery Rate von 0 % die Verlustverteilung des Referenzportfolios auf der Basis des semi-analytischen Modells (gestrichelte Linie) der Verlustverteilung mit Replenishments auf der Basis der Pfadsimulationen (Histogramm) gegenübergestellt:



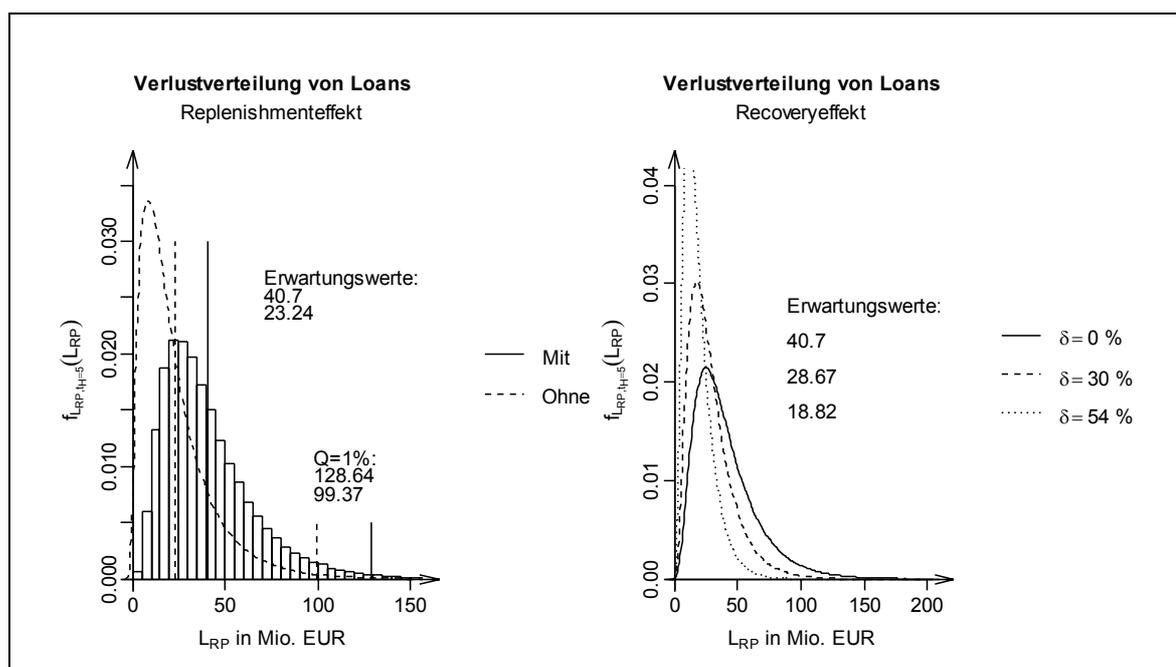
**Abb. 4-29: Effekt der Replenishments auf die Verlustverteilung des Referenzportfolios**

Vergleich der Verlustverteilungen des Referenzportfolios mit und ohne Replenishments (links) sowie Veranschaulichung der Auswirkung unterschiedlicher Recovery Rates auf die Verlustverteilung mit Replenishments (rechts). Die Kredite sind endfällig (Bonds). Der Risikohorizont beträgt 5 Jahre. Die Simulation basiert auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten nach STANDARD & POOR'S bei 250.000 Simulationsschritten und erfolgt ohne Replenishment-Trigger.

Durch den Ersatz abgelaufener Kredite verschiebt sich die Verlustverteilung nach rechts. Jedoch erweist sich dieser Replenishmenteffekt im vorliegenden Fall gegenüber dem Tilgungseffekt, gemessen an der absoluten Entwicklung der Erwartungswerte, als deutlich schwächer. Mit kürzer werdender gewichteter Restlaufzeit des Referenzportfolios dürfte jedoch Ersterer an Stärke zunehmen. Das Diagramm rechts zeigt die Auswirkungen steigender Recovery Rates. Im Unterschied zu den Verteilungen ohne Replenishments entwickeln sich die Erwartungswerte nicht linear. Ursache ist das Auffüllen des Portfolios um den wiedergewonnenen Kreditanteil eines ausgefallenen Kredits. Damit werden wachsende Recovery Rates durch die dadurch zusätzlich aufgenommenen Kreditrisiken zum Teil konterkariert. Die erwarteten Verluste sinken unterproportional. Aufgrund der im Mittel geringen Anzahl an Kreditausfällen, ist dieser gegenläufige Effekt allerdings sehr gering.

## 4322 Heterogene Portfolios mit Abzahlungsdarlehen

Nachdem regelmäßige Tilgungszahlungen und Portfolioreplenishments separat betrachtet wurden, sollen Tilgungs- und Replenishmenteffekt in Kombination untersucht werden. Vorangestellt werden soll jedoch eine ceteris paribus Analyse des Replenishmenteffekts im Falle von Abzahlungsdarlehen (Loans).<sup>793</sup> In Abb. 4-30 wurde links für eine Recovery Rate von 0 % die Verlustverteilung des Referenzportfolios ohne Replenishments (gestrichelte Linie) der Verlustverteilung mit Replenishments (Histogramm) gegenübergestellt:<sup>794</sup>



**Abb. 4-30: Verlustverteilung des Referenzportfolios mit Tilgungen und Replenishments**

Vergleich der Verlustverteilungen des Referenzportfolios mit und ohne Replenishments (links) sowie Veranschaulichung der Auswirkung unterschiedlicher Recovery Rates auf die Verlustverteilung mit Replenishments (rechts). Die Kredite stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Simulation basiert auf den Credit Curves vom Typ B. Die Simulation erfolgt mit 250.000 Simulationsläufen ohne Replenishment-Trigger.

Wie bereits im Falle der endfälligen Kredite verschiebt sich die Verlustverteilung durch den Ersatz abgelaufener Kredite nach rechts. Da jedoch zusätzlich auch der bereits amortisierte Teil der jeweiligen Kredite mit neuen Krediten aufgefüllt wird, wirkt sich der Replenishmenteffekt, gemessen anhand der Entwicklung der Erwartungswerte, relativ betrachtet, deutlich stärker aus.<sup>795</sup> Das Diagramm rechts zeigt die Auswirkungen steigender Recovery Rates. Wie bei den Bonds entwickeln sich auch bei den Loans die Erwartungswerte mit wachsenden Recovery Rates lediglich unterproportional. Ursache ist erneut das Auffüllen des Portfolios um den wiedergewonnenen Kreditanteil im Falle eines Kreditausfalles, wo-

<sup>793</sup> Vgl. zur ceteris paribus Analyse des Replenishmenteffekts im Falle von endfälligen Darlehen (Bonds) Abschnitt 432.

<sup>794</sup> Beide Verteilungen basieren auf der Pfadsimulation. Vgl. dazu Abschnitt 382.

<sup>795</sup> Vgl. dazu auch Abb. 4-29. Während der Erwartungswert im Falle der Bonds durch die Replenishments um ca. 35 % steigt, beträgt die die Wachstumsrate bei den Loans ca. 75 %.

durch wachsende Recovery Rates durch die damit einhergehend zusätzlich aufgenommenen Kreditrisiken zum Teil konterkariert werden. Obwohl dieser gegenläufige Effekt aufgrund der im Mittel niedrigen Anzahl an Kreditausfällen ohnehin schon sehr gering ausfällt, wird er im Unterschied zu den Bonds im Falle der Loans durch die Tilgungszahlungen insofern weiter abgeschwächt, dass sich die Recovery Rates mit zunehmender Transaktionszeit auf regelmäßig abnehmende ausstehende Kreditvolumina beziehen.

Ein Vergleich der erwarteten Verluste im Falle von Abzahlungsdarlehen mit Portfolio-replenishments (vgl. Abb. 4-30, rechts) mit den erwarteten Verlusten im Falle von endfälligen Krediten ohne Portfolioreplenishments (vgl. Abb. 4-25, rechts) zeigt, dass die letzteren unterhalb der ersteren liegen. Die Erklärung ist in den entgegengesetzt gerichteten Tilgungs- und Replenishmenteffekten zu suchen. Während der Tilgungseffekt den erwarteten Verlust senkt (vgl. Abb. 4-28, rechts), erhöht der Replenishmenteffekt diesen wieder. Da die regelmäßigen Tilgungen jedoch einen größeren Einfluss als die Replenishments ausüben, folgt das genannte Ergebnis. Mit kürzer werdender gewichteter Restlaufzeit des Referenzportfolios dürfte jedoch der Replenishmenteffekt an Stärke zunehmen.<sup>796</sup>

#### **4323 Berücksichtigung von Replenishment-Triggern**

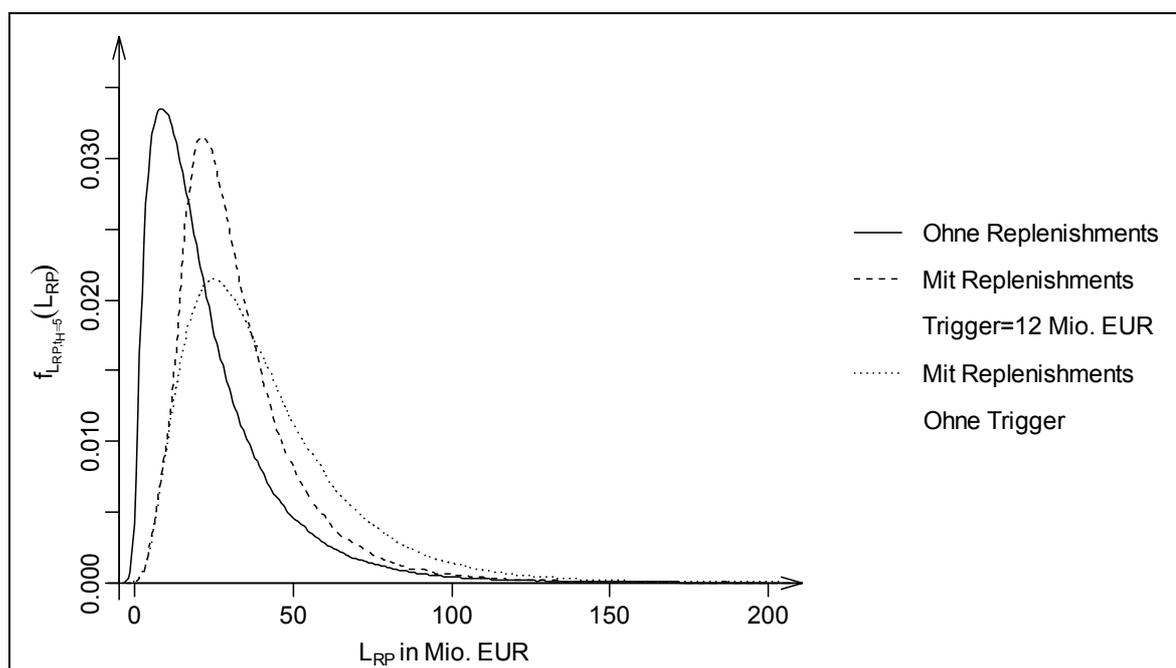
Aus Investorensicht begrenzen Replenishment-Trigger tendenziell die Höhe schlagend werdender Verluste aus Investitionen in einzelne ABS-Tranchen durch den Stopp der Replenishmentmaßnahmen beim Überschreiten bestimmter kritischer Verlustgrenzen. Aus der Sicht der Originatoren im Rahmen der Portfoliozusammenstellung eignen sich die Trigger zur Feinsteuerung der Portfolioverlustverteilung.

In Abb. 4-31 ist für eine Recovery Rate von 0 % die Verlustverteilung des Referenzportfolios ohne Replenishments (durchgezogene Linie) zwei Verlustverteilungen mit Replenishments gegenübergestellt. Die Erste weist keinen Replenishment-Trigger auf (gepunktete Linie) wohingegen die Zweite mit einem Replenishment-Trigger i. H. v. 12 Mio. EUR (gestrichelte Linie) modelliert wurde. Es wird deutlich, dass die im Vergleich zum Nominalvolumen des Referenzportfolios von 1 Mrd. EUR relativ geringe Höhe des Triggers bereits einen erheblichen Einfluss auf die Lage und Form der Verlustverteilung aufweist. Der Erwartungswert mit Replenishments sinkt durch den Trigger um fast 20 % (vgl. Tab. 4-16). Eine wachsende Höhe der kritischen Verlustgrenze führt zu einer zunehmend breiteren Verteilung bis diese vollständig der Verteilung ohne Trigger entspricht. Die Wirkung

---

<sup>796</sup> Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 432.

des Triggers verschwindet. Mit sinkender Höhe des Triggers gewinnt dieser hingegen an Einfluss. Die Verlustverteilung nähert sich derjenigen ohne Replenishments an.<sup>797</sup>



**Abb. 4-31: Verlustverteilung des Referenzportfolios mit Replenishments und Replenishment-Trigger im Vergleich**

Verlustverteilungen des Referenzportfolios mit und ohne Replenishments im Vergleich zur Verlustverteilung mit Replenishments sowie einem zusätzlichen Replenishment-Trigger. Die Kredite stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Der Risikohorizont beträgt 5 Jahre. Die Recovery Rate beträgt 0 %. Die Simulation basiert auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten nach STANDARD & POOR's bei 250.000 Simulationsschritten.

Anhand von Tab. 4-16 wird deutlich, dass, relativ betrachtet, die Wirkung des Replenishment-Triggers mit zunehmender Recovery Rate abnimmt. Fällt der Erwartungswert der Verluste bei einem Recovery-Szenario von 0 % durch die Einführung eines Triggers i. H. v. EUR 12 Mio. um ca. 20 %, ist bei einer durchschnittlichen Recovery Rate von 54 % lediglich ein Rückgang um ca. 8 % zu beobachten.

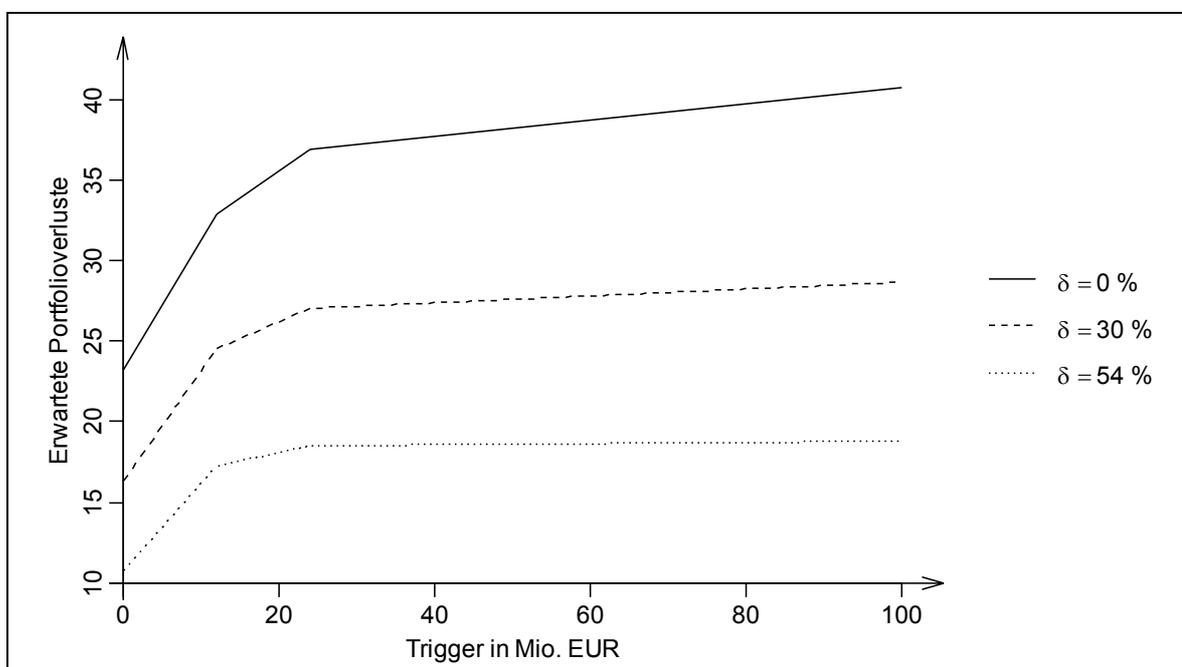
Recovery Rates	0 %		30 %		54 %	
Ohne Replenishments	23,24	99,37	16,27	69,56	10,69	45,71
Mit Replenishments, Trigger = 12“	32,87	103,68	24,56	74,57	17,26	49,93
Mit Replenishments, Trigger = 24“	36,89	107,75	27,06	77,59	18,48	54,04
Mit Replenishments, Ohne Trigger	40,70	128,64	28,67	90,96	18,82	59,68

**Tab. 4-16: Erwartungswerte und 1 %-Quantile der Verlustverteilung des Referenzportfolios mit Replenishments und Replenishment-Trigger im Vergleich**

Vergleich der Erwartungswerte und 1 %-Quantile der Verlustverteilungen des Referenzportfolios für alternative Recovery Rates bei unterschiedlichen Replenishment-Triggern. Die Kredite stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Simulation basiert auf den Credit Curves vom Typ B bei 250.000 Simulationsschritten.

<sup>797</sup> Die Wirkung von Triggeränderungen könnte durch ein Delta gemessen werden, welches die Änderung einer Bezugsgröße bezogen auf die Änderung der Höhe des Triggers um eine Währungseinheit aufzeigt.

Sind Replenishments ohne Begrenzung zugelassen, können dem Referenzportfolio stets zusätzliche Kreditrisiken sowohl im Rahmen der Kreditamortisation als auch im Rahmen der Kreditwiedergewinnung bei Kreditausfällen hinzugefügt werden. Die resultierende Verlustverteilung wird dabei sowohl vom Recovery- als auch vom Replenishmenteffekt geprägt. Beide Effekte wirken einander entgegen. Da die Verstärkung des Replenishmenteffekts durch wachsende Recovery Rates verhältnismäßig gering ausfällt, kann sich die folgende Argumentation vorrangig an den Recovery Rates orientieren.<sup>798</sup> Je höher die Recovery Rates ausfallen, desto unwahrscheinlicher ist es, dass die Portfolioverluste eine gegebene Grenze überschreiten. Wird ein im Verhältnis zum Nominalvolumen des Referenzportfolios hoher Trigger eingeführt, ist es bei hohen Recovery Rates unwahrscheinlich, dass dieser Trigger erreicht wird. Der Einfluss des Triggers auf die Verlustverteilung ist marginal. Der Verlauf der Graphen in Abb. 4-32 fällt daher umso flacher aus, je höher die Recovery Rates sind. Erst ein hinreichend kleiner Trigger führt zu einer spürbaren Beeinflussung der Verlustverteilung. Die erwarteten Portfolioverluste fallen merklich. Dabei ist der „kritische Trigger“ umso niedriger, je höher die Recovery Rate ist. Die Wahl des Triggers kann demzufolge so erfolgen, dass dieser unter dem angenommenen Recovery-Szenario kaum Einfluss auf die Verlustverteilung ausübt, aber bei einer durchschnittlichen Verschlechterung der Recovery Rates stark ansteigende Verluste weitgehend verhindert.



**Abb. 4-32: Replenishment-Trigger, Recovery Rate und erwarteter Portfolioverlust**

Der Erwartungswert der Verlustverteilung in Abhängigkeit der Höhe des Replenishment-Triggers für alternative Recovery Rates. Die Kredite stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Die Simulation basiert auf den Credit Curves vom Typ B.

<sup>798</sup> Vgl. zur Wirkung der Recovery Rates auf die Replenishmentmaßnahmen auch die Ausführungen in den Abschnitten 422, 432 und 4322.

#### 4324 Berücksichtigung stochastischer Recovery Rates

Bisherige Analysen fanden ausnahmslos unter der Prämisse einer durchschnittlichen Recovery Rate statt. Aus diesem Grund konnte die Verlustverteilung eines einzelnen Kredits – zwischenzeitliche Tilgungszahlungen seien nicht betrachtet – lediglich bimodaler Natur sein. Entweder fiel der Kredit aus mit einem Verlust in Höhe des Kreditbetrags multipliziert mit dem konstant angenommenen Verlustanteil oder er wurde termingerecht getilgt.

Wird dagegen die Recovery Rate stochastisch gestaltet, sind beliebige Verlusthöhen bis hin zum Totalverlust denkbar. Es kommt zu einer Vergrößerung des Definitionsbereichs der Verlustverteilung des einzelnen Kredits. Auf Portfolioebene ist daher zu vermuten, dass die Annahme der Konstanz der Recovery Rate die Wahrscheinlichkeiten für hohe Verluste systematisch unterschätzt. Bei einer konstanten Recovery Rate von 30 % oder 54 % stellt der vollständige Verlust des Portfolionominalvolumens von 1 Mrd. EUR ein unmögliches Ereignis dar. Die Modellierung von stochastischen Recovery Rates auf dem Wertebereich  $[0,1]$  mit entsprechenden Erwartungswerten ordnet diesem Ereignis eine positive (wenn auch verschwindend geringe) Wahrscheinlichkeit zu.

Für das modellierte Referenzportfolio führen stochastische Recovery Rates auf der Basis der Beta-Verteilung<sup>799</sup> jedoch zu keinen wesentlichen Veränderungen der Verlustverteilung. Insbesondere bleibt die Höhe der Standardabweichung der Recovery Rates weitgehend bedeutungslos. Als Ursache könnte die hohe Anzahl der Kredite im Referenzportfolio gesehen werden. Während die Recovery Rate des einen Kredites zufällig einen hohen Wert annimmt, wird der eintretende, verlusterhöhende Effekt regelmäßig durch die niedrige Ausprägung der Recovery Rate eines anderen Kredites konterkariert.

Ein verändertes Bild könnte sich für positiv korrelierte Recovery Rates ergeben. Im einfachen Unternehmenswertmodell kann dazu auf die stochastische Entwicklung des Wertes der kreditbesichernden Vermögensgegenstände abgestellt werden.<sup>800</sup> Im vorliegenden Modell wäre – eine einfache Kapitalstruktur vorausgesetzt – vom Wert der Ausfallschranke im First-Passage-Zeitpunkt ausgehend, über den Prozess der Vermögensgegenstände, auf die Recovery Rate zu schließen. Um korrelierte, stochastische Recovery Rates zu gewährleisten, wäre die Ausfallschranke selbst stochastisch zu gestalten.<sup>801</sup>

---

<sup>799</sup> Vgl. Abschnitt 415.

<sup>800</sup> Vgl. A. Arvantis und J. Gregory (2004), Credit, S. 59-61.

<sup>801</sup> Ein Beispiel für die Verwendung stochastischer Ausfallschranken stellt das Modell CREDITGRADES™ der Institutionen DEUTSCHE BANK, GOLDMAN SACHS, J. P. MORGAN und RISKMETRICS GROUP dar. Vgl.

### 433 Verlustverteilungen in der Sensitivitäts- und Szenarioanalyse

Als wesentliche Parameter für das Aussehen der Verlustverteilung des Referenzportfolios sind in Analogie zur Ereignisverteilung<sup>802</sup> insbesondere die Lage und Form der Credit Curves anzusehen. Eine Verschiebung, Drehung oder Krümmungsänderung der Credit Curves nach oben führt ceteris paribus zu höheren Wahrscheinlichkeiten für einzelne und gemeinsame Kreditausfälle und demzufolge zu höheren Verlusten. Umgekehrt führt eine Verschiebung, Drehung oder Krümmungsänderung der Credit Curves nach unten ceteris paribus zu geringen Verlusten. Fraglich bleibt das Ausmaß etwaiger Veränderungen auf die Verlustverteilung des Referenzportfolios.

In Analogie zur Vorgehensweise im Rahmen der Sensitivitäts- und Szenarioanalysen zur Ereignisverteilung soll dazu auf Worst-Case und Best-Case Credit Curves zurückgegriffen werden. Die Worst-Case und Best-Case Credit Curves basieren auf einer empirischen Datenbasis, wodurch sichergestellt ist, dass sowohl die Größenordnungen der Änderungen über alle Ratingklassen hinweg als auch – mit Blick auf die Form der einzelnen Credit Curves – die Änderungsstrukturen der Realität entsprechen. Zur Kalkulation der Credit Curves dienen erneut 1-jährige Übergangsmatrizen. Die 1-jährigen Übergangsmatrizen basieren auf empirischen Beobachtungen von STANDARD & POOR'S auf der Grundlage sog. statischer Portfolien.<sup>803</sup> Für den Best-Case wird erneut die Übergangsmatrix des Jahres 1996 herangezogen. Für den Worst-Case wird wie zuvor auf die Übergangsmatrix des Jahres 2002 zurückgegriffen. Die konstruierten Credit Curves sind notwendigerweise vom Typ B, da lediglich einzelne Übergangsmatrizen in den Kalibrierungsprozess eingeflossen sind.<sup>804</sup> Ihre grafischen Darstellungen können der Abb. 4-18 (Best-Case) und der Abb. 4-19 (Worst-Case) entnommen werden.

Die Best- und Worst-Case Credit Curves gehen einher mit entsprechend geänderten Ausfallsschranken  $K_R$  gem. (3.32). Dabei wurden die Schranken erneut so gewählt, dass die Zeittransformation (3.26) den Risikohorizont  $t_H=5$  stets unberührt lässt (vgl. Tab. 4-11).

Da sich mit den geänderten Credit Curves die Ausfallwahrscheinlichkeiten geändert haben, sind auch die Faktorsensitivitäten gem. (3.41) anzupassen. Zur Berechnung werden wie zuvor die 1-jährigen, ratingabhängigen Ausfallwahrscheinlichkeiten herangezogen (vgl. Tab. 4-12).

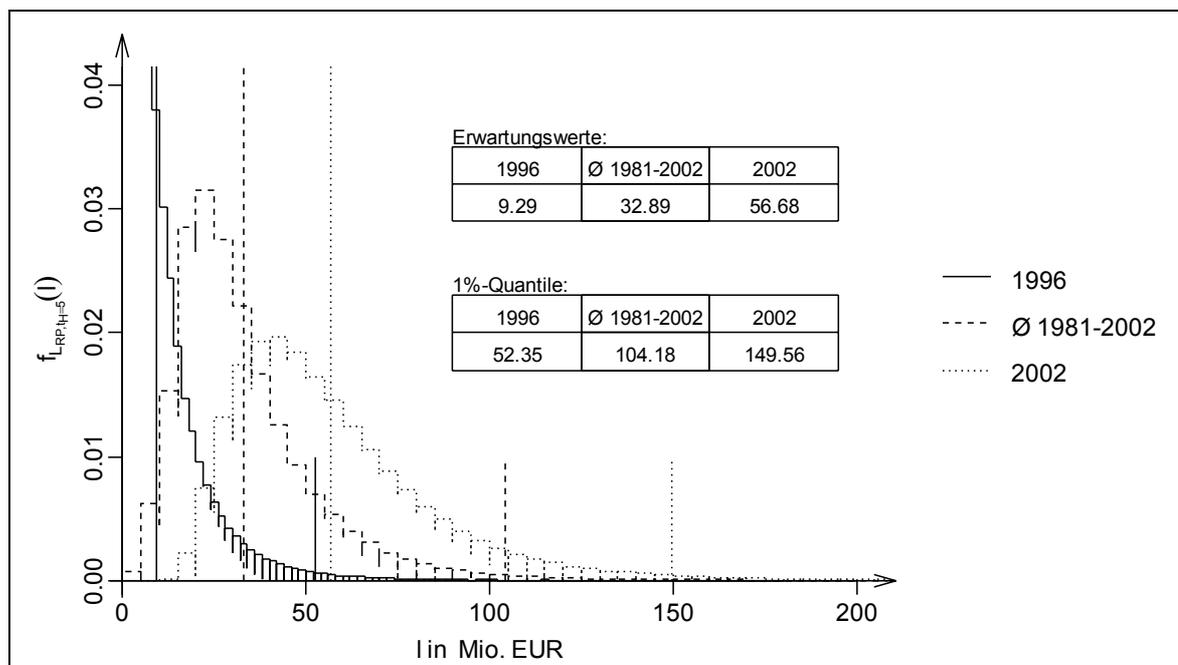
---

dazu den entsprechenden Abschnitt des Technical Documents: C. Finger (2002), CG™ Technical Document, S. 6-9.

<sup>802</sup> Vgl. Abschnitt 423.

<sup>803</sup> Vgl. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 13-15 (STANDARD & POOR'S Studie).

<sup>804</sup> Vgl. Abschnitt 322.



**Abb. 4-33: Verlustverteilung für Loans mit Replenishmentmaßnahmen und Replenishment-Trigger in der Szenarioanalyse**

Vergleich der Verlustverteilungen des Referenzportfolios für die Credit Curves auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S. Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Der Replenishment-Trigger beträgt 12 Mio. EUR.

Die Sensitivitäts- und Szenarioanalyse soll an dieser Stelle auf Verlustverteilungen für Kredite mit Amortisationszahlungen (Loans) unter Berücksichtigung von Replenishmentmaßnahmen und einem Replenishment-Trigger begrenzt werden. Der verwendete Replenishment-Trigger beträgt 12 Mio. EUR.<sup>805</sup> Die Abb. 4-33 zeigt die resultierenden Häufigkeitsverteilungen (angedeutete Histogramme) im Vergleich zu derjenigen unter Verwendung der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (gestrichelte Linie) basierend auf Simulationen mit 250.000 Simulationsläufen. Recoveries wurden zunächst nicht zugelassen.<sup>806</sup>

Die Verteilung des Best-Case (durchgezogene Linie) ist erwartungsgemäß schmäler und konzentriert einen erheblichen Teil der Wahrscheinlichkeitsmasse auf geringe Verlusthöhen. Die Verteilung des Worst-Case (gepunktete Linie) fällt deutlich breiter aus. Trotz der Diversifikationseffekte aus der Portfoliobildung, ist bei einer Verschlechterung der konjunkturellen Lage mit erheblich höheren Verlusten zu rechnen. Insbesondere die Replenishmentmaßnahmen verstärken die Auswirkungen überdurchschnittlich hoher Ausfallwahrscheinlichkeiten, da die gestiegenen Ausfallwahrscheinlichkeiten sich nicht nur auf das ursprüngliche Kreditportfolio, sondern auch auf die im Rahmen der Replenishment-

<sup>805</sup> Zum Einfluss des Replenishment-Triggers auf die Verlustverteilung siehe Abschnitt 4323.

<sup>806</sup> Abb. 4-21 zeigt die entsprechenden Ereignisverteilungen.

maßnahmen neu hinzugefügten Kredite auswirken. Der Replenishment-Trigger wirkt hingegen verlustbegrenzend. Die dadurch eingeführte kritische Verlustgrenze wird im Falle einer gesamtwirtschaftlich bedingten, allgemeinen Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeiten, zeitlich betrachtet, tendenziell früher erreicht. Die Replenishmentmaßnahmen wären damit einzustellen, wodurch die Aufnahme neuer Kreditrisiken in das Referenzportfolio unterbleibt.

Horizont	5 Jahre								
	1996			Ø 1981-2002			2002		
	$\delta=0\%$	$\delta=30\%$	$\delta=54\%$	$\delta=0\%$	$\delta=30\%$	$\delta=54\%$	$\delta=0\%$	$\delta=30\%$	$\delta=54\%$
EW	9,29	6,54	4,30	32,89	24,52	17,23	56,68	43,33	32,08
Q=5 %	29,69	21,03	13,87	70,14	50,85	35,33	108,58	79,44	55,52
Q=1 %	52,35	36,44	24,26	104,18	74,03	50,25	149,56	107,44	72,88

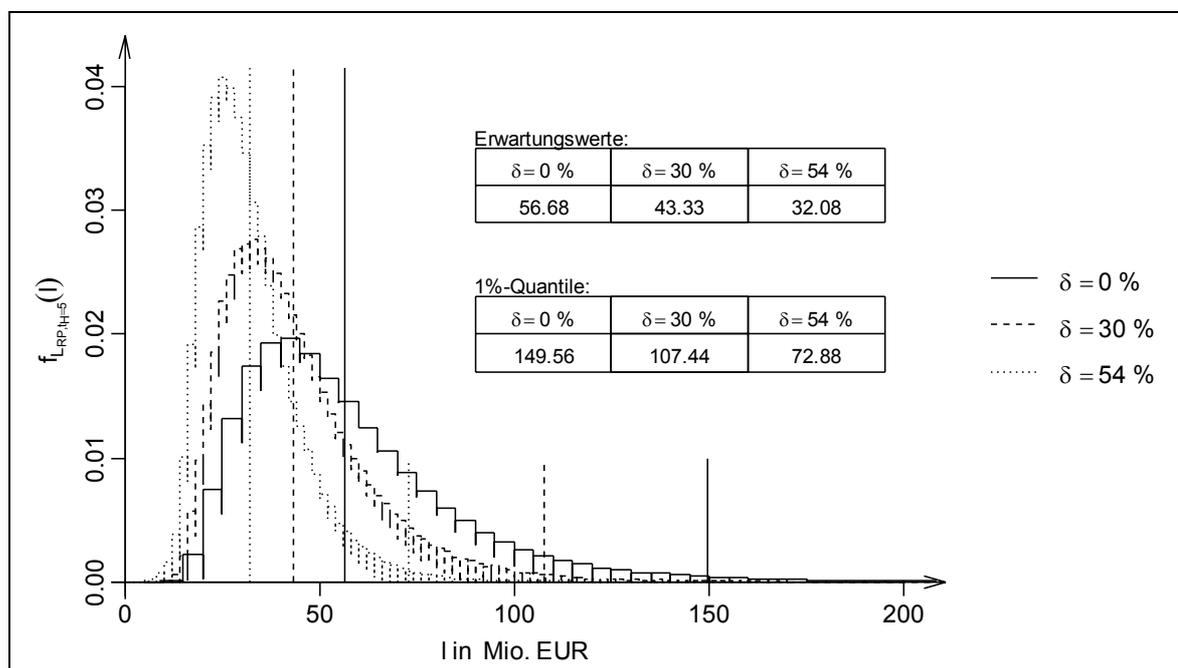
**Tab. 4-17: Erwartungswerte und Quantile der Verlustverteilung von Loans mit Replenishments und Replenishment-Trigger in der Szenarioanalyse**

Erwartungswerte und Quantile der Verlustverteilung auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S für unterschiedliche Recovery Rates. Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Der Trigger beträgt 12 Mio. EUR.

Das Ausmaß der Unterschiede in den einzelnen Verlustverteilungen wird anhand der Entwicklung der Erwartungswerte sowie der Quantile ersichtlich (Tab. 4-17). Vom „Normalfall“ ausgehend, kommt es beim Übergang zum Worst-Case über alle Recovery Rates hinweg zu einer annähernden Verdoppelung des erwarteten Portfolioverlusts. Dabei steigt der Erwartungswert relativ betrachtet umso stärker, je höher der Wert der Recovery Rate ist. Anhand des Referenzportfolios steigt der Erwartungswert im Falle von  $\delta=0\%$  um den Faktor 1,72, während im Falle von  $\delta=30\%$  ein Anstieg um den Faktor 1,77 zu verzeichnen ist. Für eine Recovery Rate von  $\delta=54\%$  nimmt der Faktor sogar einen Wert von 1,86 an. Die Ursache besteht in der Auffüllung wiedergewonnener Kreditanteile im Falle von Kreditausfällen durch zusätzliche Kreditrisiken. Je höher der wiedergewonnene Kreditanteil ist, je mehr Kreditrisiken können dem Portfolio neu hinzugefügt werden. In der Konsequenz steigt tendenziell die Anzahl der ausgefallenen Kredite mit wachsender Recovery Rate.<sup>807</sup> Dieser, der positiven Wirkung von wachsenden Recovery Rates entgegengesetzte gerichtete Effekt, führt zur Erhöhung des Erwartungswertwachstumsfaktors. Dennoch führt insgesamt eine Erhöhung der Recovery Rate – auch, aber nicht nur, im Falle des Worst-Case – zu einer tendenziellen Verringerung der Verluste. In Abb. 4-34 sind die Worst-Case-Verlustverteilungen für verschiedene Recovery Rates abgetragen. Ein Vergleich mit Abb. 4-22 (Worst-Case-Ereignisverteilungen für verschiedene Recovery Rates) zeigt, dass

<sup>807</sup> Vgl. auch Tab. 4-14 und Abb. 4-22.

eine Erhöhung der Recovery Rate zwar zu einer Veränderung der Ereignisverteilung mit tendenziell höheren Kreditausfallzahlen führt, die Verlustverteilung jedoch deutlich eine Verlagerung der Wahrscheinlichkeitsmasse hin zu geringeren Portfolioverlusten anzeigt.



**Abb. 4-34: Worst-Case-Verlustverteilungen für Loans mit Replenishments und Replenishment-Trigger**

Vergleich der Verlustverteilungen des Referenzportfolios für die Credit Curves auf der Basis der historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten sowie der 1-Jahres-Migrationsraten für die Jahre 1996 (Best-Case) und 2002 (Worst-Case) (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR's. Der Analysezeitpunkt entspricht dem Risikohorizont von 5 Jahren. Der Replenishment-Trigger beträgt 12 Mio. EUR.

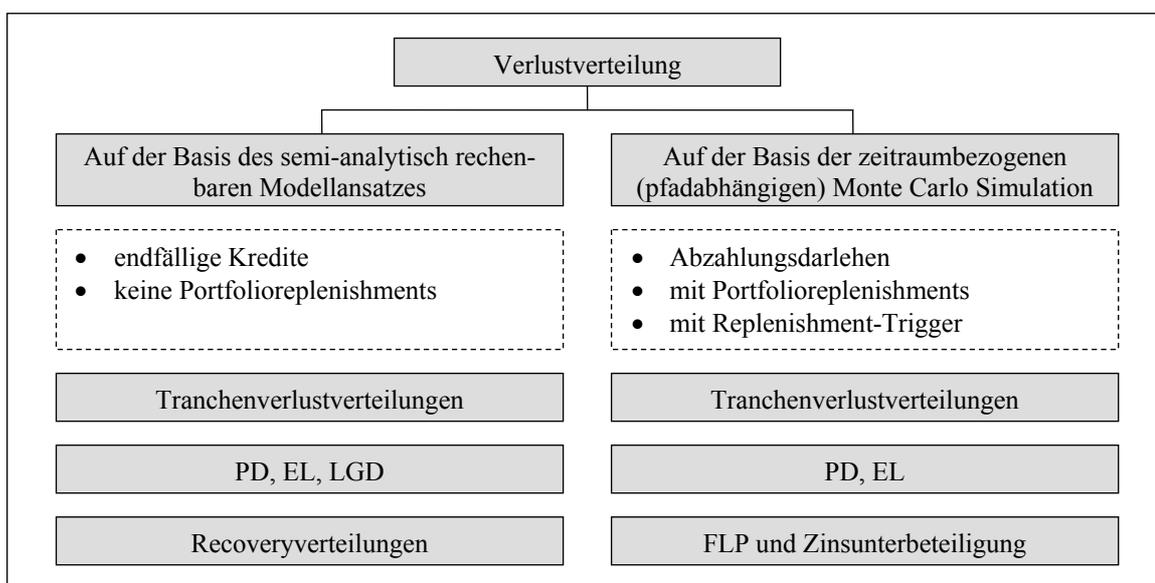
Die vergleichende Betrachtung der Erwartungswerte des Best-Case zeigt, dass die Werte ca. um den Faktor drei bis vier sinken. Auch hier gilt, dass die relative Änderung umso stärker ausfällt, je höher die Recovery Rate ist.<sup>808</sup>

Die Informationen über die Sensitivität der Quantilswerte bezüglich der Lage- und Formänderung der Credit Curves sind hilfreich, wenn eine Entscheidung hinsichtlich der Tranchierung des Referenzportfolios im Rahmen einer CDO-Transaktion erfolgen soll. Insbesondere für die Wahl der Wertuntergrenze einer Super-Senior-Tranche unter Berücksichtigung von Stress-Szenarios sind derartige Sensitivitätsüberlegungen von Interesse. Die Ergebnisse legen zwar nahe, dass, relativ betrachtet, die Quantile gegenüber den Erwartungswerten einen höheren Grad an Wertstabilität aufweisen. Dennoch wird deutlich, dass bei einer gegebenen Zielausfallwahrscheinlichkeit der Super-Senior-Tranche ihre Wertuntergrenze gegenüber der des gesamtwirtschaftlichen „Normalfalles“ um ca. 25 bis 30 % nach oben verschoben werden muss, soll die Tranche gestressten Szenarios standhalten.

<sup>808</sup> Für  $\delta=0 \%$ ,  $\delta=30 \%$  und  $\delta=54 \%$  betragen die Faktoren 3.54, 3.75 und 4.00.

## 5 Transaktionsbezogene Modellanwendung zur Kreditrisikomessung und Bewertung von synthetischen CDOs

In diesem Abschnitt soll das Kreditrisiko von CDO-Tranchen auf der Basis der Verlustverteilungen des Referenzportfolios der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion der KfW betrachtet werden. Zugrunde gelegt werden dazu die Tranchengrenzen gemäß dem INFORMATION MEMORANDUM der DRESDNER BANK.<sup>809</sup> Ausgewertet werden die Verlustverteilungen der Tranchen sowie die zugehörigen Kennzahlen PD (Probability of Default), EL (Expected Loss) und LGD (Loss Given Default). Da die Verlustverteilungen der Tranchen auf der Basis des semi-analytisch rechenbaren Modellansatzes frei von Simulationsfehlern ermittelt werden können, sollen die Analysen zunächst vorwiegend und exemplarisch unter Verwendung der Verlustverteilung des Referenzportfolios aus Abschnitt 431 vorgenommen werden. Annahmegemäß besteht das Referenzportfolio dabei aus endfälligen Krediten, wobei keinerlei Portfolioreplenishments Berücksichtigung finden:



**Abb. 5-1: Vorgehensweise zur Ermittlung des Kreditrisikos von CDO-Tranchen**

Gegenüberstellend erfolgt im Anschluss eine knappe Darstellung der Verlustverteilungen der Tranchen zusammen mit den zugehörigen Kennzahlen PD und EL unter Berücksichtigung von Tilgungszahlungen sowie Portfolioreplenishments. Dazu wird auf die simulativ ermittelte Verlustverteilung des Referenzportfolios aus Abschnitt 4323 zurückgegriffen. Da die Simulation die Auswertung der zeitlichen Struktur der Ausfallereignisse erlaubt, soll in ausführlicherer Form das Instrument der begrenzten Zinsunterbeteiligung quantitativ analysiert werden. Der verbleibende Teil des Abschnitts befasst sich eingehend mit Fragen der Duplikation und der arbitragefreien Bewertung von CDOs.

<sup>809</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 21, Abschnitt 1.1. Siehe auch Tab. 5-1.

**51 Kreditrisikomessung einzelner Tranchen synthetischer CDO-Strukturen**  
**511 Tranchenverlustverteilungen und tranchenverlustverteilungsbasierte Kennzahlen auf der Basis des semi-analytischen Modells**  
**5111 Tranchenausfallwahrscheinlichkeiten**

Das Referenzportfolio, bestehend aus  $N$  Krediten mit den Nominalwerten  $D_i$  für  $i=1, \dots, N$ , wird in  $J$  Tranchen mit den Schwellenwerten  $0=v_1 < v_2 < \dots < v_{J+1} = \sum_{i=1}^N D_i$  aufgeteilt:<sup>810</sup>

$$Tr_j = (v_j, v_{j+1}] \quad \text{mit} \quad j=1, \dots, J; 0 = v_1 < v_2 < \dots < v_{J+1} = \sum_{i=1}^N D_i. \quad (5.1)$$

Der untere Schwellenwert wird gelegentlich als Credit Enhancement Level und die Differenz zum oberen Schwellenwert als Tranchenstärke bezeichnet.<sup>811</sup> Ggf. können das Credit Enhancement Level und die Tranchenstärke auf das Intervall  $[0, 1]$  normiert werden.<sup>812</sup> Dem Prinzip der Subordination folgend, können die Verluste der einzelnen Tranchen  $L_{Tr,j}$  als Funktion der Portfolioverluste  $L_{RP}$  formuliert werden:<sup>813</sup>

$$L_{Tr,j} = \min\left(\max\left(0, L_{RP} - v_j\right), v_{j+1} - v_j\right) \quad \forall \quad j=1, \dots, J. \quad (5.2)$$

Das Maximum in (5.2) stellt sicher, dass ausschließlich Verluste zugeordnet werden, die oberhalb des Schwellenwertes  $v_j$  liegen. Das Minimum bewirkt, dass die allokierten Verluste maximal der Tranchenstärke  $(v_{j+1}-v_j)$  entsprechen.

Im Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC Transaktion wurde das Referenzportfolio in  $J=7$  Tranchen mit den Schwellenwerten

Schwelle	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$
Wert	0	47,50	57,50	84,00	95,00	105,00	105,25	1.000,00

**Tab. 5-1: Schwellenwerte der PROMISE-K 2001-1 Plc-Transaktion in Mio. EUR**

eingeteilt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer Tranche  $j$  ein Verlust  $L_{Tr,j} > 0$  zuzuordnen ist, wird als *Tranchenausfallwahrscheinlichkeit* bezeichnet und beträgt:

$$p_{TR,j} = 1 - \Pr[L_{RP} \leq v_j] = PD_{TR,j} \quad \forall \quad j=1, \dots, J. \quad (5.3)$$

Auf der Basis der (wahrscheinlichkeits)erzeugenden Funktion  $G_{L_{RP}}(z)$  lässt sich die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[L_{RP} \leq v_j]$  durch Addition der entsprechenden Koeffizienten ermitteln:

<sup>810</sup> Vgl. J. Gregory und J.-P. Laurent (2004), Beste Überlebenschancen, S. 35 f.

<sup>811</sup> Vgl. BCBS (2002), 2<sup>nd</sup> Working paper on securitisation, S. 4, Abs. 12.

<sup>812</sup> Vgl. hierzu und zum Folgenden C. Bluhm (2003), CDO modeling, S. 25.

<sup>813</sup> Zur Vereinfachung der Notation wird zunächst auf einen Zeitindex verzichtet.

<sup>814</sup> Einer alternativen Formulierung unter Berücksichtigung von Indikatoren bedienen sich J. Gregory und J.-P. Laurent (2004), Beste Überlebenschancen, S. 36.

$$\Pr[L_{RP} \leq v_j] = \sum_{l=0}^{v_j} \frac{1}{l!} \frac{d^l G_{L_{RP}}(z)}{dz^l} \Big|_{z=0} = \sum_{l=0}^{v_j} c_{L_{RP}, l+1} \cdot^{815} \quad (5.4)$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gesamte Tranche  $j$  ausfällt, d. h.  $L_{Tr,j} = v_{j+1} - v_j$ , sei als *totale Ausfallwahrscheinlichkeit* bezeichnet:

$$\Pr[L_{RP} \geq v_{j+1}] = \sum_{l=v_{j+1}}^{v_{J+1}} \frac{1}{l!} \frac{d^l G_{L_{RP}}(z)}{dz^l} \Big|_{z=0} = \sum_{l=v_{j+1}}^{v_{J+1}} c_{L_{RP}, l+1} \cdot \quad (5.5)$$

	Tranche	47,50	10,00	26,50	11,00	10,00	0,25	895,75
$\delta$		Risikohorizont: 1 Jahr						
0 %	PD	99,61 %	3,49 %	2,02 %	0,55 %	0,33 %	0,22 %	0,21 %
	EL	26,28 %	2,68 %	1,11 %	0,43 %	0,27 %	0,21 %	0,01 %
	LGD	26,38 %	76,80 %	55,05 %	78,79 %	81,04 %	99,47 %	2,79 %
30 %	PD	99,61 %	1,18 %	0,60 %	0,12 %	0,06 %	0,04 %	0,04 %
	EL	19,03 %	0,85 %	0,29 %	0,09 %	0,05 %	0,04 %	0 %
	LGD	19,10 %	72,05 %	48,29 %	74,08 %	76,70 %	99,19 %	2,14 %
54 %	PD	99,61 %	0,23 %	0,09 %	0,01 %	0 %	0 %	0 %
	EL	12,70 %	0,15 %	0,04 %	0,01 %	0 %	0 %	0 %
	LGD	12,75 %	65,58 %	39,88 %	66,90 %	69,20 %	96,44 %	1,42 %
		Risikohorizont: 5 Jahre						
0 %	PD	99,99 %	36,11 %	25,42 %	9,54 %	6,28 %	4,29 %	4,25 %
	EL	72,55 %	30,50 %	16,27 %	7,80 %	5,23 %	4,27 %	0,12 %
	LGD	72,55 %	84,47 %	64,02 %	81,80 %	83,16 %	99,54 %	2,89 %
30 %	PD	99,99%	17,44 %	10,23 %	2,41 %	1,31 %	0,75 %	0,74 %
	EL	58,52 %	13,52 %	5,43 %	1,81 %	1,01 %	0,75 %	0,01 %
	LGD	58,52 %	77,60 %	53,03 %	74,98 %	76,78 %	99,33 %	1,99 %
54 %	PD	99,99 %	4,58 %	1,99 %	0,21 %	0,08 %	0,03 %	0,03 %
	EL	41,77 %	3,11 %	0,79 %	0,14 %	0,05 %	0,03 %	0 %
	LGD	41,77 %	67,84 %	39,97 %	64,72 %	66,78 %	98,77 %	1,24 %

**Tab. 5-2: Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD), Erwartete Verluste (EL) und Erwartete Verluste im Falle eines Ausfalles (LGD) der PROMISE-K 2001-1 PLC-Tranchen ohne Replenishments auf der Basis des semi-analytischen Modells**

Ausfallwahrscheinlichkeiten und erwartete Verluste der einzelnen Tranchen der PROMISE-K 2001-1 Plc-Transaktion für die Risikohorizonte von 1 und 5 Jahren sowie die Recovery Rates von 0 %, 30 % und 54 %. Die Kredite sind endfällig (Bonds). Die Rechnungen basieren auf den semi-analytisch ermittelten Verlustverteilungen des Referenzportfolios.

Die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Tranchen sind für die Risikohorizonte  $t_H=1$  und  $t_H=5$  sowie für die Recovery Rates  $\delta=0\%$ ,  $30\%$  und  $54\%$  in Tab. 5-2 eingetragen. Da

$$\Pr[L_{RP} \geq v_{j+1}] = 1 - \Pr[L_{RP} < v_{j+1}] \approx 1 - \Pr[L_{RP} \leq v_{j+1}] \quad \forall j = 1, \dots, J-1, \quad (5.6)$$

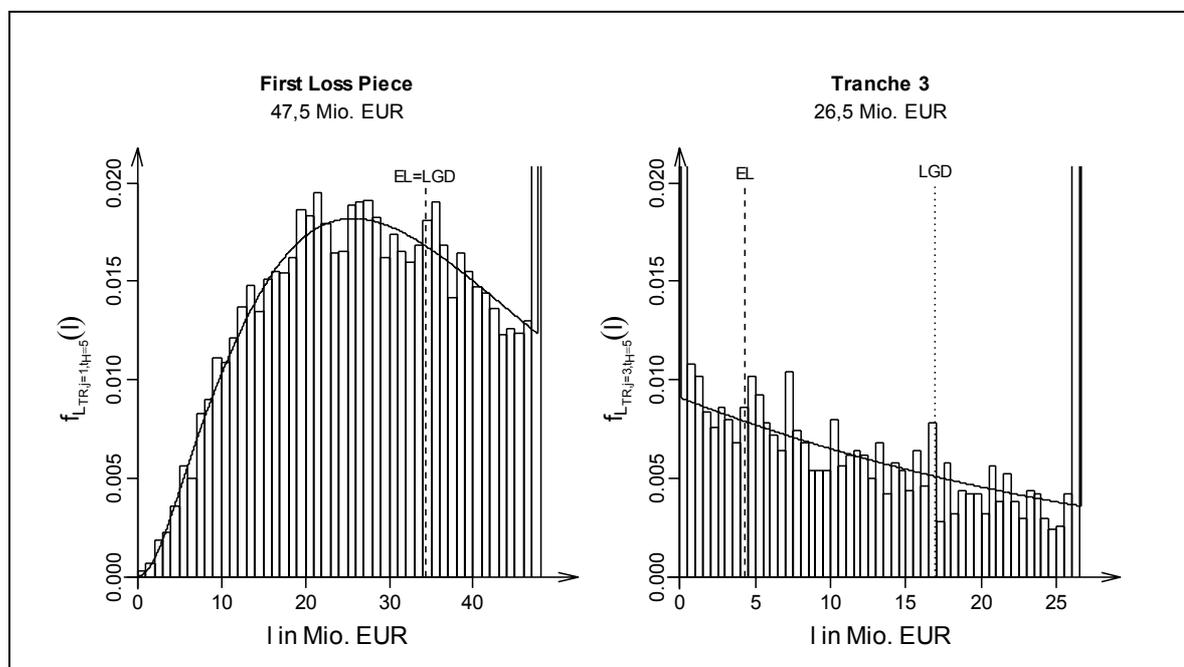
<sup>815</sup> Annahmegemäß sei  $v_j \in \mathbb{N}$ .

sind die totalen Ausfallwahrscheinlichkeiten nicht separat erfasst, sondern können durch die Ausfallwahrscheinlichkeiten der jeweils nachfolgenden Tranche approximiert werden.

### 5112 Erwartete Tranchenverluste

Für die Zufallsvariablen  $L_{Tr,j}$  lassen sich eine Wahrscheinlichkeitsfunktion und eine Verteilungsfunktion angeben. Bei der Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsfunktion ist zu beachten, dass – insbesondere bei den Mezzanine-Tranchen – eine erhebliche Wahrscheinlichkeitsmasse auf den Rändern  $L_{Tr,j}=0$  und  $L_{Tr,j}=v_{j+1}-v_j$  (100 %) liegt:

$$\Pr[L_{Tr,j} = l] = \begin{cases} \Pr[L_{RP} \leq v_j] & \text{für } l = 0, \\ \Pr[L_{RP} = v_j + l] & \text{für } l = 1, \dots, v_{j+1} - v_j - 1, \\ \Pr[L_{RP} \geq v_{j+1}] & \text{für } l = v_{j+1} - v_j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (5.7)$$



**Abb. 5-2: Verlustverteilungen einzelner Tranchen ohne Replenishments**

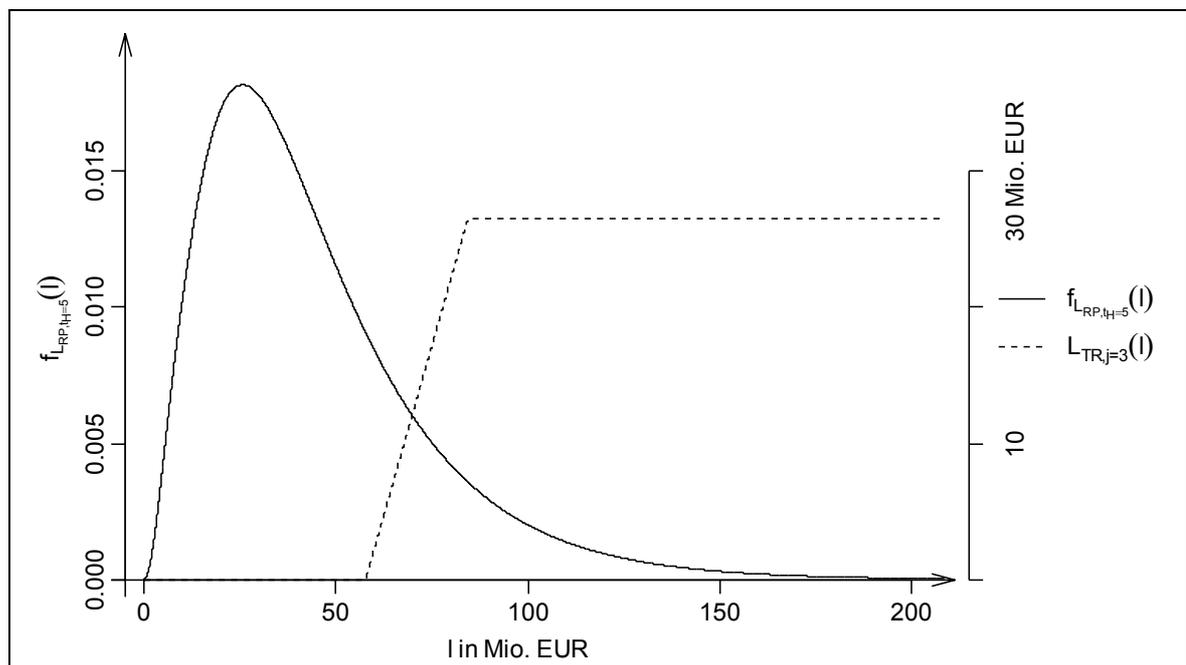
Verlustverteilungen des First Loss Piece (0;47,5 Mio. EUR] und der dritten Tranche (57,5;84 Mio. EUR]. Die Recovery Rate beträgt 0 %. Die Rechnungen basieren auf der semi-analytisch ermittelten Verlustverteilung des Referenzportfolios für den Risikohorizont von  $t_H=5$ .

Abb. 5-2 zeigt die relativen Verlusthäufigkeiten für das First Loss Piece (FLP) und der dritten Tranche auf der Basis einer Punktsimulation mit 10.000 Versuchen sowie die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsfunktionen<sup>816</sup> auf der Basis der erzeugenden Funktion zusammen mit den erwarteten Verlusten (EL) und den auf das Ausfallereignis bedingten erwarteten Verlusten (LGD). Auffällig sind die Wahrscheinlichkeitskonzentrationen an

<sup>816</sup> Obwohl die Verlustverteilung diskret ist und eine Wahrscheinlichkeitsfunktion besitzt, wurde im Diagramm wegen der hohen Kreditanzahl die Wahrscheinlichkeitsfunktion graphisch durch eine Dichtefunktion approximiert. Alternativ wäre von einer verstetigten Wahrscheinlichkeitsfunktion zu sprechen.

den Tranchenschwellen. Sie beeinflussen maßgeblich die Lage des EL. Zur Ermittlung des erwarteten Verlustes kann auf das Verlustprofil (5.2) zurückgegriffen werden. In Abb. 5-3 sind zur Veranschaulichung die Verlustverteilung des Referenzportfolios zusammen mit dem Verlustprofil der interessierenden Tranche in ein Diagramm eingezeichnet. Man erhält den erwarteten Tranchenverlust durch die Summe der Verlustausprägungen, gewichtet mit den Werten der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Verlustverteilung respektive den Koeffizienten der (wahrscheinlichkeits)erzeugenden Funktion des Referenzportfolios:

$$E(L_{Tr,j}) = \sum_{l=0}^{v_j} \frac{1}{l!} \frac{d^l G_{L_{RP}}(z)}{dz^l} \Big|_{z=0} \cdot L_{Tr,j}(l) = \sum_{l=0}^{v_j} c_{L_{RP},l+1} \cdot L_{Tr,j}(l) = EL_{Tr,j} \quad (5.8)$$

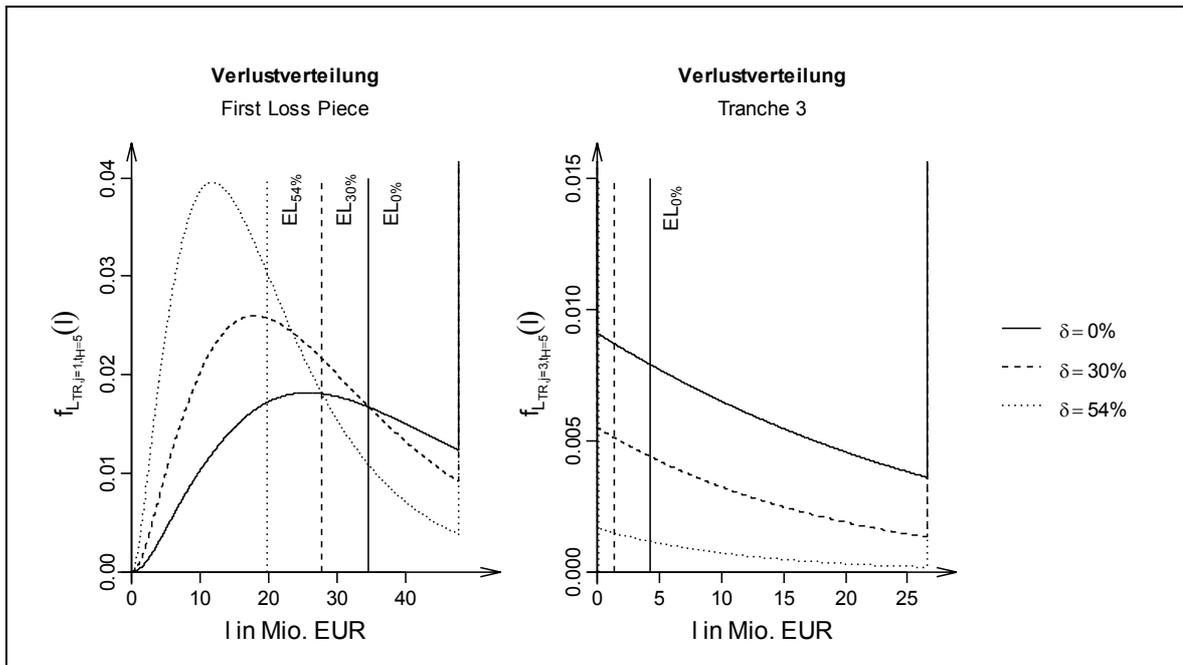


**Abb. 5-3: Verlustprofil und erwarteter Verlust einer Tranche**<sup>817</sup>

Verlustverteilungen des Referenzportfolios (verstetigt) für eine Recovery Rate von 0 % sowie das Verlustprofil der dritten Tranche (57,5;84 Mio. EUR]. Die Rechnungen basieren auf der semi-analytisch ermittelten Verlustverteilung des Referenzportfolios für den Risikohorizont  $t_H=5$ .

Die erwarteten Verluste aller Tranchen für die Risikohorizonte  $t_H=1$  und  $t_H=5$  sowie den Recovery Rates  $\delta=0, 30, 54 \%$  enthält Tab. 5-2. Wenig überraschend ist, dass in der Erwartung große Teile des FLPs über den Zeitraum der Transaktion hinweg ausfallen. Selbst bei optimistischen Recovery-Annahmen von  $\delta=54 \%$  liegt der EL bei 41,77 %. Durch das Prinzip der Subordination fallen die erwarteten Verluste der Mezzanine-Tranchen deutlich geringer aus. Sie reagieren jedoch höchst sensitiv auf Änderungen der Recovery Rate. Bei Tranche 3 schwankt der erwartete Verlust für  $t_H=5$  zwischen 0,79 % ( $\delta=54 \%$ ) und 16,27 % ( $\delta=0 \%$ ). Ursache ist die Verschiebung von Wahrscheinlichkeitsmasse auf das linke Verteilungsende (vgl. Abb. 5-4) mit zunehmenden Wiedergewinnungsraten:

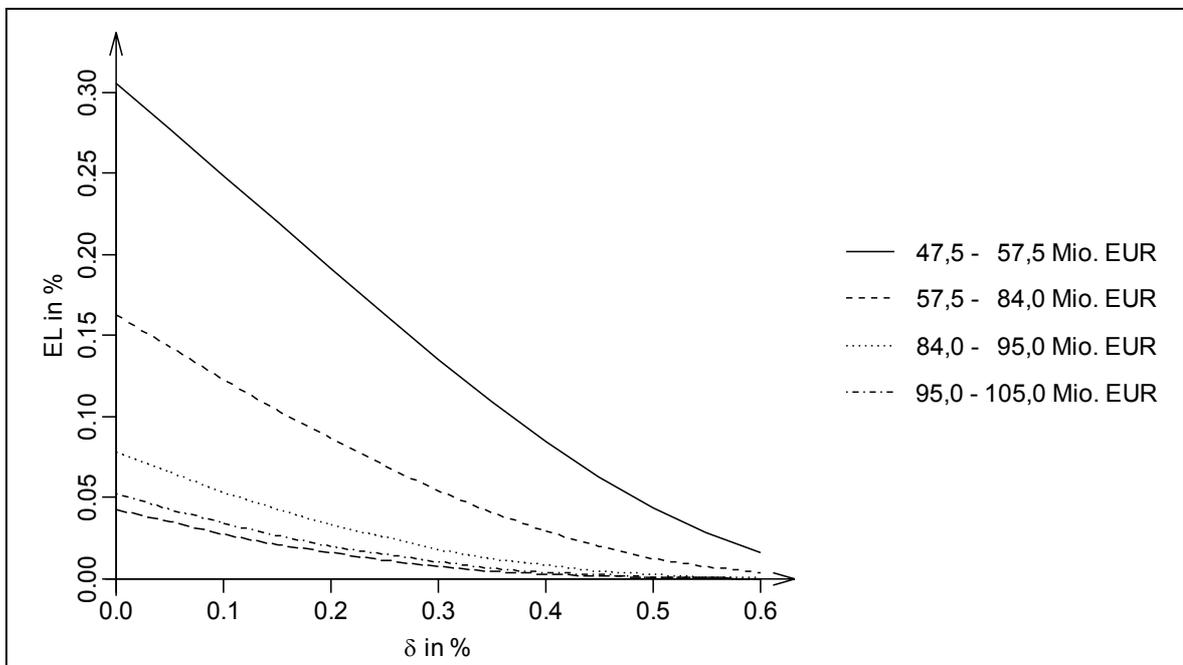
<sup>817</sup> Die Darstellung ist entworfen nach C. Bluhm (2003), CDO modeling, S. 26, Figure 10.



**Abb. 5-4: Verlustverteilungen einzelner Tranchen für verschiedene Recovery Rates ohne Replenishments**

Verlustverteilungen des FLPs (0;47,5 Mio. EUR] und der dritten Tranche (57,5;84 Mio. EUR]. Die Recovery Rates betragen 0 %, 30 % und 54 %. Die Kredite sind endfällig (Bonds). Die Rechnungen basieren auf der semi-analytisch ermittelten Verlustverteilung des Referenzportfolios für den Risikohorizont  $t_H=5$ .

Graphisches Abtragen der erwarteten Verlustraten gegen die Recovery Rate  $\delta$  belegt, dass den Schätzungen der Wiedergewinnung eine hohe Bedeutung bei der Quantifizierung des Kreditrisikogehaltes der Mezzanine-Tranchen (gemessen per EL) zukommt:



**Abb. 5-5: Erwartete Verlustraten der Mezzanine-Tranchen in Abhängigkeit von der Recovery Rate**

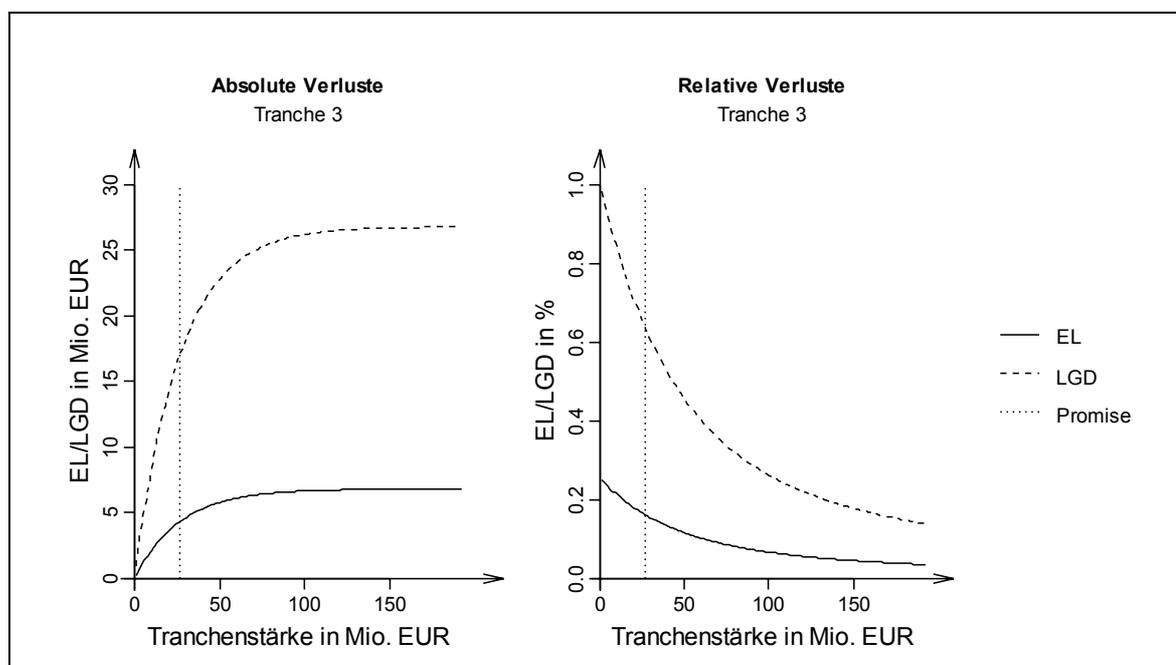
Erwartete Verluste der Mezzanine-Tranchen für Recovery Rates zwischen 0 % und 60 %. Die Rechnungen basieren auf der semi-analytisch ermittelten Verlustverteilung des Referenzportfolios für den Risikohorizont  $t_H=5$ .

### 5113 Erwartete Tranchenverluste im Falle eines Tranchenausfalls

Bei Kenntnis des erwarteten Tranchenverlustes (5.8) und der Tranchenausfallwahrscheinlichkeit (5.3) kann auf den Erwarteten Verlust, bedingt auf das Ausfallereignis, d. h. den Loss Given Default (LGD), geschlossen werden:

$$LGD_{Tr,j} = \frac{EL_{Tr,j}}{PD_{Tr,j}} = \frac{E(L_{Tr,j})}{p_{TR,j}} \quad \forall \quad j = 1, \dots, J. \quad (5.9)$$

Für das FLP sind der EL und der LGD aufgrund des nahezu sicheren Ausfallereignisses näherungsweise identisch. Für die übrigen Tranchen fallen diese beiden Größen jedoch auseinander (Abb. 5-2). Insbesondere wird – wie Tab. 5-2 zeigt – deutlich, dass tendenziell der LGD (in %) mit abnehmender Tranchenstärke steigt. Im Extremfall wäre eine Tranche lediglich eine einzige Währungseinheit breit. Käme es zum Ausfallereignis, wäre sofort die gesamte Tranche betroffen. Der LGD betrüge 100 %.<sup>818</sup>



**Abb. 5-6: Abhängigkeit des EL und des LGD von der Tranchenstärke**

Abhängigkeit des erwarteten Verlustes (EL) und des auf das Ausfallereignis bedingten erwarteten Verlustes (LGD) von der Tranchenstärke am Beispiel der dritten Tranche (57,5;84 Mio. EUR]. Das Credit Enhancement Level ist mit 57,5 Mio. EUR konstant. Die Tranchenstärke wird sukzessiv von 1 Mio. EUR auf 192 Mio. EUR erhöht. Die Recovery Rate beträgt 0 %. Die Rechnungen basieren auf der semi-analytisch ermittelten Verlustverteilung des Referenzportfolios für den Risikohorizont  $t_H=5$ .

Wird ceteris paribus die Tranchenstärke erhöht, nimmt der LGD (in %) kontinuierlich ab. Dies wird deutlich, wenn man berücksichtigt, dass bei unverändertem Credit Enhancement Level und folglich unveränderter Tranchenausfallwahrscheinlichkeit mit zunehmender Tranchenstärke gem. (5.7) immer weniger Wahrscheinlichkeitsmasse auf der rechten Tran-

<sup>818</sup> Vgl. auch C. Bluhm (2003), CDO modeling, S. 27.

chenschwelle (resp. Totalverlust) liegt. Die abnehmende Wahrscheinlichkeitskonzentration auf der rechten Tranchenschwelle führt – relativ betrachtet (in %) – zu einer Verlagerung des ELs und somit des LGDs hin zur linken Tranchenschwelle (resp. Verlustfreiheit).

In Abb. 5-6 ist dies anhand der dritten Tranche  $Tr_3=(57,5; 84,0 \text{ Mio. EUR}]$  für eine Recovery Rate von  $\delta=0\%$  verdeutlicht. Das Credit Enhancement Level wird mit  $57,5 \text{ Mio. EUR}$  konstant gehalten. Die Tranchenstärke wird zwischen  $1$  und  $192 \text{ Mio. EUR}$  variiert. Bei geringen Tranchenstärken streben der EL und der LGD absolut betrachtet gegen null. Da im Falle des Ausfallereignisses die gesamte Tranche betroffen wäre, liegt der LGD relativ betrachtet jedoch bei  $100\%$ . Der EL (in %) nimmt für diesen Fall den Wert der Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{Tr,3}=25,42\%$  an (vgl. Tab. 5-2). Absolut (in EUR) steigen mit zunehmender Tranchenstärke sowohl der EL als auch der LGD kontinuierlich an. Da stets  $p_{Tr} \leq 1$  gilt, liegt der EL stets unterhalb des LGD. Für den maximalen rechten Schwellenwert von  $1 \text{ Mrd. EUR}$  nehmen der EL bzw. der LGD die Maximalwerte von  $6,8 \text{ Mio. EUR}$  bzw.  $26,8 \text{ Mio. EUR}$  an. Relativ betrachtet (in %) fallen jedoch EL und LGD. Für den maximalen Schwellenwert nehmen die beiden Größen schließlich die Werte  $0,07\%$  und  $2,8\%$  an.

Die eingezeichneten Senkrechten markieren die Tranchengröße mit den zugehörigen (bedingten) erwarteten Verlusten im Rahmen der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion.

Aus der Sicht eines Investors hängt folglich das Risiko der Investition in eine Tranche nicht nur vom Subordination Level, respektive dem Credit Enhancement Level, und somit der Ausfallwahrscheinlichkeit ab, sondern in wesentlichem Maße von der Tranchenstärke. Bei geringen Tranchenstärken verliert der Investor im Falle eines Ausfalls mit hoher Sicherheit einen Großteil seines investierten Kapitals. Würde der Investor in eine stärkere Tranche – ggf. mit näherungsweise identischer Ausfallwahrscheinlichkeit – investieren, könnte der Investor dagegen immer noch mit einer teilweisen Rückzahlung des eingesetzten Kapitals rechnen.

Die Aufsichtsbehörden haben die Problematik erkannt und werden im Rahmen der NEUEN BASLER EIGENKAPITALVERORDNUNG (Basel II) im Rahmen des sog. Supervisory Formula Approaches (SFA) die Unterlegung von kreditrisikobehafteten ABS-Investitionen in Abhängigkeit von der Tranchenstärke gestalten.<sup>819</sup>

---

<sup>819</sup> Vgl. allgemein zur Unterlegung von ABS-Investitionen S. Jortzik und B. Müller (2002), Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate, S. 41-43 u. 65. Für die Supervisory Formula siehe BCBS (2002), 2<sup>nd</sup> Working paper on securitisation, S. 7-9, Abs. 36-40 u. S. 34-36, Abs. 573-581.

## 5114 Tranchenrecovery Rates und Tranchenrecoveryverteilungen

Der LGD der einzelnen Tranchen gem. (5.9) kann alternativ aus den zugehörigen Recoveryverteilungen ermittelt werden. Die Recoveryverteilungen vermitteln einem ABS-Investor ein aufschlussreiches und – gegenüber der komprimierten Kennzahl des LGD – detaillierteres Bild über seine finanzielle Position im unwahrscheinlichen Fall eines Tranchenausfalls. Dabei wird unter der Recovery Rate einer Tranche der Anteil des zurückgezahlten Nominalwertes im Falle eines Defaults verstanden:

$$\delta_{Tr,j} = \frac{(\nu_{j+1} - \nu_j) - L_{Tr,j}}{\nu_{j+1} - \nu_j} \quad \forall \quad j = 1, \dots, J \quad \text{mit} \quad L_{Tr,j} > 0. \quad (5.10)$$

Während bei Krediten die Recovery Rates i. d. R. vom Ausgang der Insolvenzverfahren abhängen, sind diese im Falle von ABS-Tranchen gem. (5.10) als Funktion in Abhängigkeit der Tranchenverluste  $L_{Tr,j}$  und somit als Funktion der Verluste des Referenzportfolios  $L_{RP}$  zu verstehen. Da die Tranchenverluste aus der Sicht des Modellierungszeitpunkts  $t_0$  (diskrete) Zufallsvariablen darstellen, gilt dies auch für die Recovery Rates. Die Verteilung der Recovery Rate einer Tranche  $j$  sei als Recoveryverteilung dieser Tranche bezeichnet:

$$\Pr[\delta_{Tr,j} = r] = \begin{cases} \Pr[L_{RP} \geq \nu_{j+1}] / \Pr[L_{RP} > \nu_j] & \text{für } r = 0, \\ \Pr[L_{RP} = \nu_j + l] / \Pr[L_{RP} > \nu_j] & \text{für } r = \frac{(\nu_{j+1} - \nu_j) - l}{\nu_{j+1} - \nu_j}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.11)$$

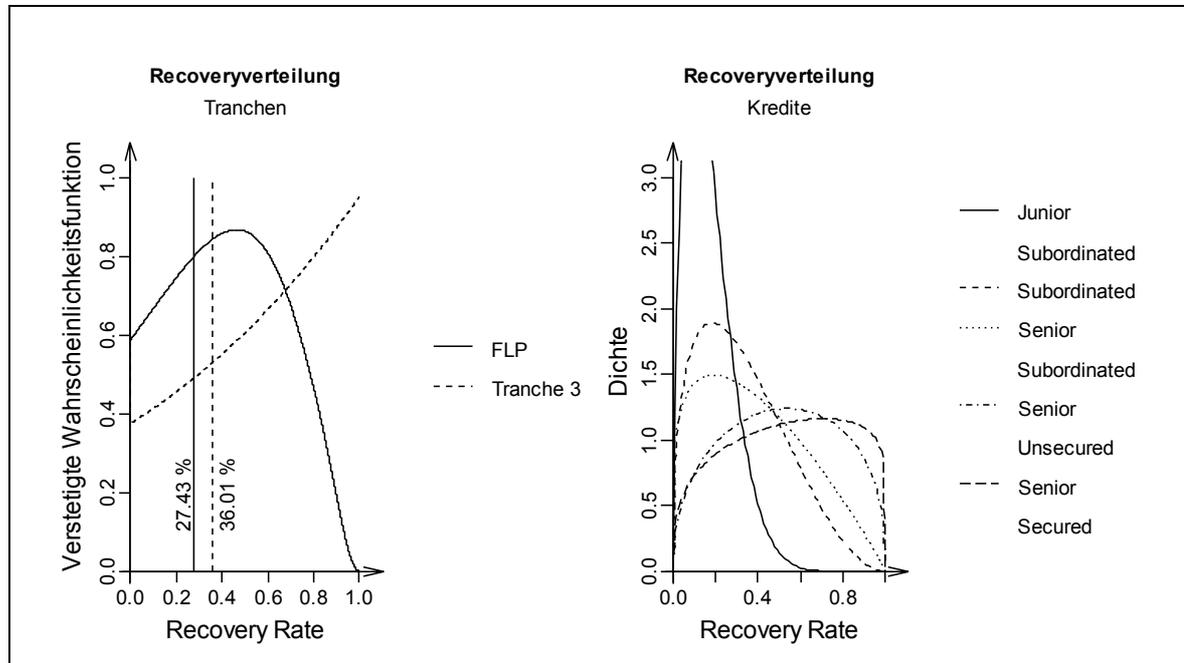
mit :

$$l = 1, \dots, \nu_{j+1} - \nu_j - 1.$$

Die Recoveryverteilungen sind bedingte Verteilungen. Anders als bei Recoveryverteilungen von Krediten (vgl. Abb. 5-7), liegt hier ein erheblicher Teil der Wahrscheinlichkeitsmasse auf der Recovery Rate von null. Die fragliche Wahrscheinlichkeitsmasse ergibt sich dabei aus dem Quotienten der totalen Tranchenausfallwahrscheinlichkeit<sup>820</sup>, d. h. der Fläche unterhalb der Verlustverteilung des Referenzportfolios und rechts von der rechten Tranchengrenze  $\nu_{j+1}$ , und der Tranchenausfallwahrscheinlichkeit, d. h. der Fläche unterhalb der Verlustverteilung des Referenzportfolios und rechts von der linken Tranchengrenze  $\nu_j$ . Lediglich wenn die Lage und/oder Stärke einer Tranche zu einer totalen Ausfallwahrscheinlichkeit von null führt, d. h.  $\Pr[L_{RP} \geq \nu_{j+1}] = 0$ , verschwindet auch die Wahrscheinlichkeit für eine Recovery Rate von null. Dadurch können Investments in ABS-Tranchen ge-

<sup>820</sup> Vgl. Abschnitt 5111, Gleichung (5.5).

genüber Investments in einzelne Kredite trotz identischer Ausfallwahrscheinlichkeit einen höheren Risikogehalt aufweisen. Selbst bei ähnlichen LGDs und folglich ähnlichen ELs sollte sich der Investor darüber bewusst sein, dass die Wahrscheinlichkeitsmasse in unterschiedlicher Weise auf den Definitionsbereich der Recovery Rates verteilt ist:



**Abb. 5-7: Recoveryverteilungen von ABS-Tranchen und Krediten im Vergleich**

Recoveryverteilung des FLPs und der dritten Tranche (57,5;84 Mio. EUR] sowie die Erwartungswerte (links). Die Rechnungen basieren auf der semi-analytisch ermittelten Verlustverteilung des Referenzportfolios für den Risikohorizont  $t_H=5$ . Die Recovery Rate der Kredite beträgt dabei 0 %. Die Recoveryverteilungen für Kredite (rechts) sind entworfen nach JPMorgan (1997), CM™ Technical Document, S. 78 u. 80. Dabei wurden Betaverteilungen an Erwartungswerte und Varianzen angepasst.

In Abb. 5-7 links sind die Recoveryverteilungen für das First Loss Piece und die dritte Tranche (57,5;84 Mio. EUR] abgetragen. Während die Recoveryverteilung des FLPs eine Hügelform aufweist und wegen der Pufferfunktion für die Mezzanine- und Senior-Tranchen dem Wert  $\delta_{Tr,FLP}=100\%$  keinerlei Wahrscheinlichkeitsmasse zuweist, zeigt die Recoveryverteilung der Mezzanine-Tranche einen leicht progressiv steigenden Verlauf. Diese Form ist typisch für alle Mezzanine-Tranchen. Ursache ist der leicht degressiv fallende Verlauf der Verlustverteilung des Referenzportfolios in diesem Bereich (vgl. Abb. 5-3). Rechts sind vergleichsweise Recoveryverteilungen von Krediten verschiedener Vor- und Nachrangigkeit zu sehen. Dazu wurden an empirisch ermittelte Erwartungswerte und Varianzen von Recovery Rates<sup>821</sup> entsprechende Beta-Verteilungen<sup>822</sup> angepasst. Anders

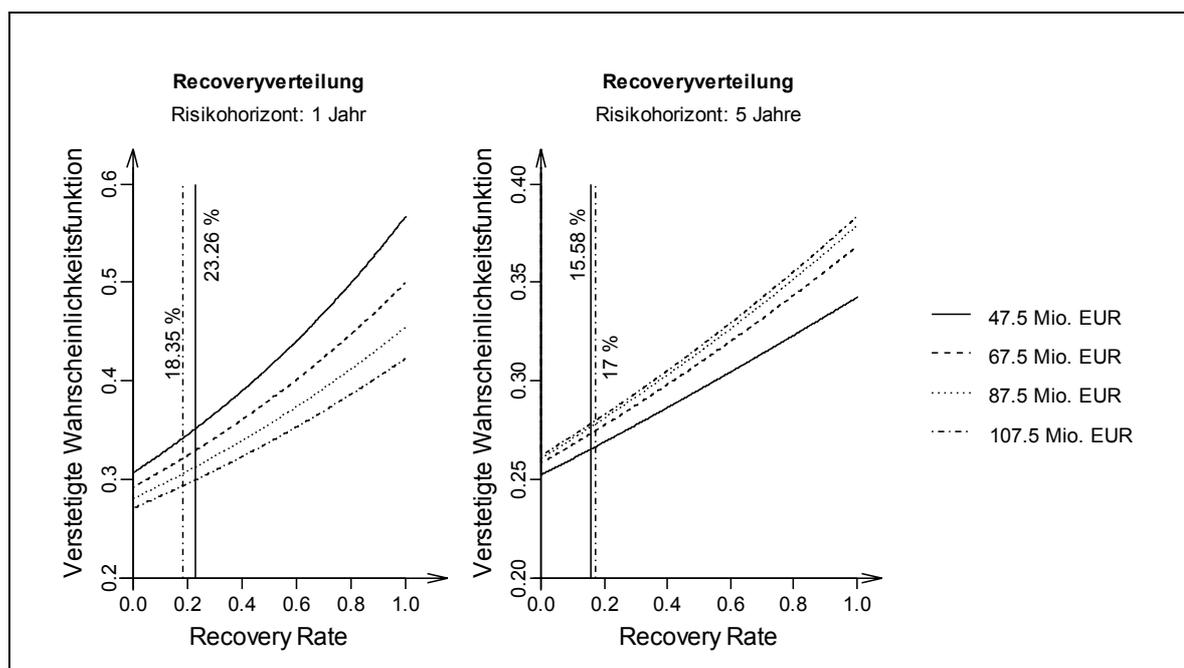
<sup>821</sup> Vgl. JPMorgan (1997), CM™ Technical Document, S. 78.

<sup>822</sup> Ein großer Vorteil der Beta-Verteilung ist die flexible Form und vollständige Charakterisierung durch den Erwartungswert und die Varianz. Vgl. G. Lehmann (2002), Statistik, S. 155-160. Der Vorteil der Flexibilität der Beta-Verteilung erweist sich jedoch als nachteilig, wenn alternatives Datenmaterial anderer empirischer Studien herangezogen wird. Geringfügige Änderungen des Erwartungswertes und der Varianz können für dieselben Kreditarten vollkommen verschiedene Dichteformen ergeben. Siehe bspw. die empirischen Untersuchungen von K. VandeCastle, D. Keisman und R. Yang (2001), Insights into re-

als bei den Recoveryverteilungen der ABS-Tranchen befindet sich keine Wahrscheinlichkeitsmasse auf der Stelle  $\delta_i=0\%$ . Es ist vielmehr wahrscheinlicher, dass im Rahmen der Kreditabwicklung zumindest ein Teil der ausgefallenen Schuld wiedergewonnen werden kann. Neben der fehlenden Punktmasse ist insbesondere die abweichende Form der Dichten im Vergleich zu denen der Mezzanine-Tranchen auffallend. Die Dichtefunktionen wachsen nicht monoton in Abhängigkeit der Recovery Rate wie diejenigen der Mezzanine-Tranchen. Vielmehr befindet sich ein Großteil der Wahrscheinlichkeitsmasse im mittleren Abschnitt des Definitionsbereichs  $[0,1]$ . Bei den Mezzanine-Tranchen liegt hingegen unter Berücksichtigung der Punktmasse eine Konzentration in den Randbereichen vor.

In Abb. 5-7 links sind ebenfalls die Erwartungswerte der Recoveryverteilungen abgetragen. Sie korrespondieren mit den LGDs in Tab. 5-2. Es gilt:

$$LGD_{Tr,j} = 1 - E(\delta_{Tr,j}). \quad (5.12)$$



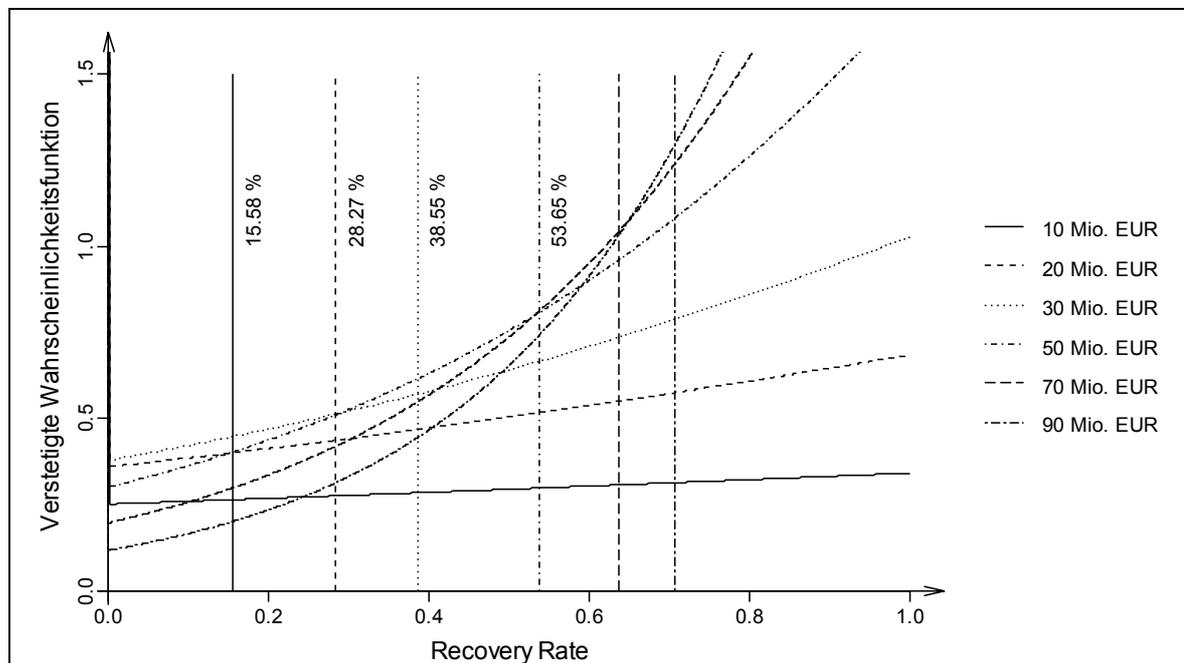
**Abb. 5-8: Einfluss des Credit Enhancement Levels auf die Recoveryverteilung**

Recoveryverteilung einer Tranche mit einer Stärke von 10 Mio. EUR für verschiedene Credit Enhancement Level. Die Rechnungen basieren auf den semi-analytisch ermittelten Verlustverteilungen des Referenzportfolios für die Risikohorizonte von  $t_H=1$  (links) und  $t_H=5$  (rechts). Die Recovery Rate beträgt 0%. Eingezeichnet sind ebenfalls die Erwartungswerte für die Credit Enhancement Level von 47,5 und 107,5 Mio. EUR.

Schließlich soll die Wirkung einzelner Einflussfaktoren auf die Form der Recoveryverteilungen der CDO-Tranchen analysiert werden. Zu untersuchen sind insbesondere Auswirkungen bzgl. der Höhe des Credit Enhancement Levels sowie der Tranchenstärke. In Abb. 5-8 sind die Recoveryverteilungen für eine Tranche mit einer Tranchenstärke von 10 Mio.

coveries, S. 81-86; R. Bos (2003), Initial trading price: Poor recovery indicator, S. 63-66 (STANDARD & POOR'S Studien).

EUR (1 %) für alternative Credit Enhancement Level zu sehen. Dabei wurde links die Verlustverteilung des Referenzportfolios für den Risikohorizont von  $t_H=1$  und rechts diejenige für den Risikohorizont von  $t_H=5$  zugrunde gelegt. Während sich die Recoveryverteilung links für wachsende Credit Enhancement Level nach unten verschiebt und die Punktmasse auf  $\delta_{Tr}=0\%$  zunimmt, ist rechts das Gegenteil zu beobachten. Der Erwartungswert im linken Diagramm fällt, während derjenige im rechten Diagramm steigt.<sup>823</sup> Der gegenläufige Effekt ist möglich, weil die Recoveryverteilung eine bedingte Verteilung ist. Ihre Wahrscheinlichkeitswerte ergeben sich gem. (5.11) stets als Quotient zweier Wahrscheinlichkeiten. Mit wachsendem Credit Enhancement Level sinken zwar sowohl der Nenner als auch der Zähler, der Bruch selbst kann jedoch in Abhängigkeit der relativen Entwicklung des Zählers und des Nenners zueinander fallen als auch steigen.



**Abb. 5-9: Einfluss der Tranchenstärke auf die Recoveryverteilung**

Recoveryverteilung einer Tranche mit einem Credit Enhancement Level von 47,5 Mio. EUR für verschiedene Tranchenstärken. Die Rechnungen basieren auf der semi-analytisch ermittelten Verlustverteilung des Referenzportfolios für den Risikohorizont von  $t_H=5$ . Die Recovery Rate beträgt 0 %. Eingezeichnet sind ebenfalls die Erwartungswerte für die Tranchenstärken 10, 20, 30 und 50 Mio. EUR.

Ein eindeutiges Bild ergibt sich hingegen bei der Betrachtung alternativer Tranchenstärken. In Abb. 5-9 sind die Recoveryverteilungen für eine Tranche mit einem Credit Enhancement Level von 47,5 Mio. EUR für alternative Tranchenstärken für den Risikohorizont  $t_H=5$  zu sehen. Mit zunehmender Tranchenstärke verringert sich kontinuierlich die Punkt-

<sup>823</sup> Entgegengesetzt verhalten sich die LGDs. Zu sehen ist dies anhand der LGDs der Tranchen 2 und 5 in Tab. 5-2. Beide Tranchen weisen eine Tranchenstärke von 10 Mio. EUR auf. Das Credit Enhancement Level der zweiten Tranche beträgt 47,5 Mio. EUR während das Credit Enhancement Level der fünften Tranche 96 Mio. EUR beträgt. Für den Risikohorizont von einem Jahr fällt der LGD der Tranche 5 in entgegengesetzter Richtung zur Entwicklung der Erwartungswerte der Recovery Rates höher aus als derjenige der Tranche 2. Für den Risikohorizont von fünf Jahren ergibt sich das umgekehrte Bild.

masse auf  $\delta_{Tr}=0$  %. Gleichzeitig verschiebt sich die verstetigte Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichtefunktion) für  $\delta_{Tr}>0$  % zunächst nach oben. Mit weiter zunehmender Tranchenstärke gleicht die Veränderung zunehmend einer Drehung. Stieg der Ordinatenabschnitt anfangs, beginnt dieser nun zu fallen. Da die Ausfallwahrscheinlichkeit und somit der Nenner in (5.11) wegen des unveränderten Credit Enhancement Levels diesmal unverändert bleibt, ist die Ursache alleine im Zähler zu suchen. Mit zunehmender Tranchenstärke fällt kontinuierlich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die schlagend werdenden Verluste die betrachtete Tranche vollständig durchschlagen. Tendenziell sinken die Wahrscheinlichkeiten für geringe Recovery Rates. Insbesondere sinkt jedoch die Punktmasse auf  $\delta_{Tr}=0$  % und verteilt sich auf den übrigen Wertebereich. Dadurch steigen zunächst alle Wahrscheinlichkeiten für  $\delta_{Tr}>0$  % an. Die Kurve verschiebt sich nach oben. Mit zunehmender Tranchenstärke fällt jedoch die Abnahme der Punktmasse geringer aus. Eine Überkompensation der Abnahme der Wahrscheinlichkeiten für geringe Recovery Rates findet nicht mehr statt. Die Kurve dreht sich.

In Abb. 5-9 sind ebenfalls die Erwartungswerte der Recoveryverteilungen eingezeichnet. Mit zunehmender Tranchenstärke steigen die Erwartungswerte an. Diametral dazu sinken die LGDs (siehe auch Abb. 5-6 rechts).

Eine Besonderheit stellt die Recoveryverteilung der vorletzten Tranche dar, sofern ein spezifisches Element der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion Berücksichtigung findet. Da die Tranche mit einer Tranchenstärke von gerade 250.000 EUR (0,025 %) ausgesprochen schmal ausfällt, fällt der LGD zunächst entsprechend hoch aus (vgl. Tab. 5-2). Das INFORMATION MEMORANDUM sieht jedoch eine *pari passu* Verteilung der realisierten Verluste zwischen der vorletzten und der letzten Tranche vor.<sup>824</sup> Wenn die Verluste des Referenzportfolios die vorletzte Tranche erreichen, werden die Verluste auf beide Tranchen im Verhältnis ihrer Tranchenstärken aufgeteilt.<sup>825</sup> Damit wird effektiv die rechte Schranke der vorletzten Tranche aufgehoben und die linke Schranke der letzten Tranche auf diejenige der vorletzten Tranche vorverlegt. Beide Tranchen weisen damit eine identische Ausfallwahrscheinlichkeit im Sinne von (5.3) auf. Die totale Ausfallwahrscheinlichkeit ist in beiden Fällen null. Die Recoveryverteilung weist nun analog zur letzten Tranche auch im Falle der vorletzten Tranche dem Punkt  $\delta_{Tr}=0$  % keinerlei Wahrscheinlichkeitsmasse zu. Vielmehr wird der Erwartungswert in die Nähe von  $\delta_{Tr}=100$  % verschoben. Respektive fällt der LGD von zuvor 99,54 % (Recovery Rate von 0 %) auf annähernd null.

<sup>824</sup> Vgl. R. Schoder und M.-J. Kerschkamp (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 2 f. (MOODY'S Report).

<sup>825</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 26, Abschnitt 8.1.

## 512 Tranchenverlustverteilungen und tranchenverlustverteilungsbasierte Kennzahlen auf der Basis der Simulation

Der Modellierung durch das semi-analytische Modell entziehen sich insbesondere die regelmäßigen Tilgungszahlungen, die Replenishments sowie die Replenishment-Trigger. Ihre Erfassung bedarf der Pfadsimulation.<sup>826</sup> Da bereits im Rahmen der Analysen zur Verlustverteilung des Referenzportfolios ausführlich die Einflüsse dieser drei Elemente einzeln voneinander untersucht wurden, soll hier ausschließlich ihre Kombination betrachtet werden.<sup>827</sup>

	Tranche	47,50	10,00	26,50	11,00	10,00	0,25	895,75
$\delta$		Risikohorizont: 5 Jahre						
0 %	PD	99,99 %	16,90 %	9,80 %	2,51 %	1,50 %	0,94 %	0,92 %
	EL	62,36 %	13,01 %	5,30 %	1,97 %	1,20 %	0,93 %	0,02 %
30 %	PD	99,99 %	6,50 %	3,15 %	0,54 %	0,30 %	0,17 %	0,17 %
	EL	49,71 %	4,59 %	1,54 %	0,41 %	0,23 %	0,17 %	0,00 %
54 %	PD	99,99 %	1,32 %	0,50 %	0,05 %	0,03 %	0,01 %	0,01 %
	EL	36,03 %	0,83 %	0,19 %	0,04 %	0,02 %	0,01 %	0,00 %

**Tab. 5-3: Ausfallwahrscheinlichkeiten (PD) und Erwartete Verluste (EL) der PROMISE-K 2001-1 PLC-Tranchen mit Replenishments und Replenishment-Trigger**

Ausfallwahrscheinlichkeiten und erwartete Verluste der einzelnen Tranchen der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion für den Risikohorizont von 5 Jahren sowie die Recovery Rates von 0 %, 30 % und 54 %. Die Kredite stellen Abzahlungsdarlehen (Loans) dar. Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S.

Die Tab. 5-3 zeigt die Ausfallwahrscheinlichkeiten sowie die erwarteten Verluste v. H. der CDO-Tranchen der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion für den Risikohorizont von  $t_H=5$  Jahren sowie für alternative Recovery Rates unter Berücksichtigung der regelmäßigen Tilgungszahlungen, der Replenishmentmaßnahmen sowie eines Replenishment-Triggers i. H. v. 12 Mio. EUR. Ein Vergleich mit Tab. 5-2 macht deutlich, dass die PDs und ELs der Tranchen unter Berücksichtigung der Tilgungszahlungen und Replenishments niedriger ausfallen. Ursache ist die kreditrisikomindernde Wirkung der Tilgungszahlungen (Tilgungseffekt in Abb. 4-28).<sup>828</sup> Zwar wird der Tilgungseffekt durch das Auffüllen des Portfolios um den amortisierten Kreditanteil abgeschwächt (Replenimenteffekt in Abb. 4-30), jedoch nicht vollständig konterkariert.<sup>829</sup> Zudem werden die Replenishmentmaßnahmen durch den Replenishment-Trigger i. H. v. 12 Mio. EUR begrenzt.<sup>830</sup>

<sup>826</sup> Vgl. Abb. 4-1.

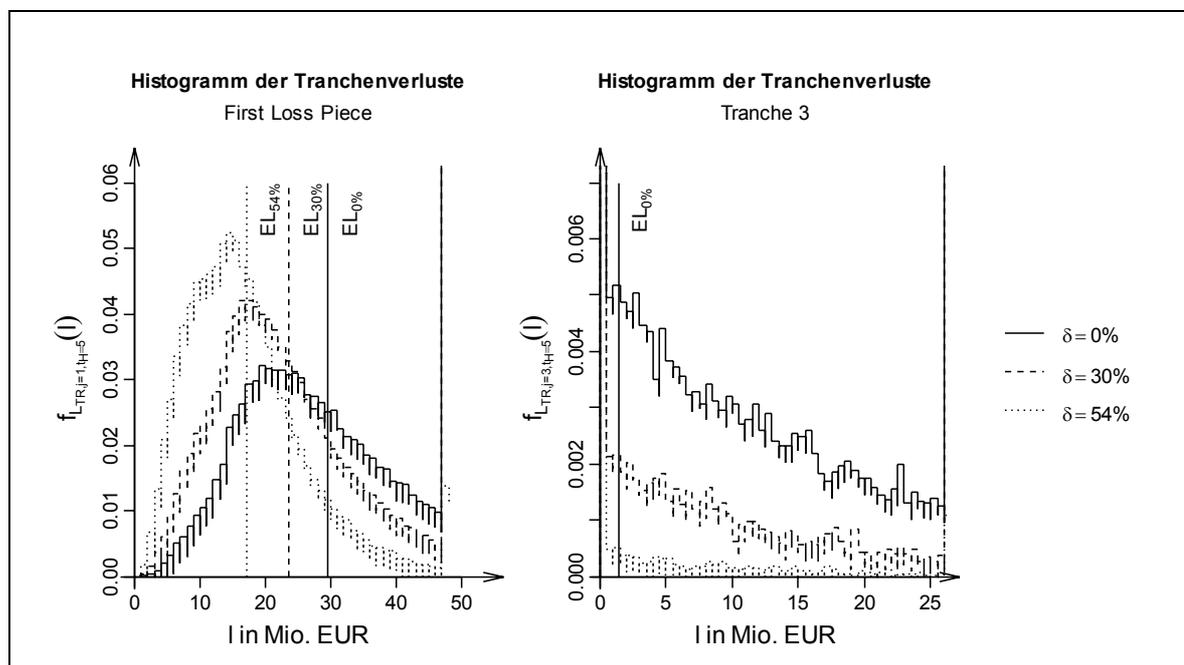
<sup>827</sup> Siehe zum Replenishment-, Recovery- und Trigger-Effekt die Abschnitte 432 bis 4323.

<sup>828</sup> Die Ausfallwahrscheinlichkeiten und erwarteten Verluste im Rahmen der Simulation erhält man wie bei der historischen Value-at-Risk-Simulation durch Auszählen und Auswerten der Simulationsergebnisse.

<sup>829</sup> Vgl. dazu Abschnitt 4322.

<sup>830</sup> Vgl. Abschnitt 4323.

Die Abb. 5-10 zeigt die relativen Verlusthäufigkeiten (Histogramme) für das First Loss Piece (FLP) und für die dritte Tranche auf der Basis der Pfadsimulationen mit 250.000 Versuchen. Für verschiedene Recovery Rates wurden zudem die erwarteten Verluste abgetragen. Ein Vergleich mit Abb. 5-4 zeigt, dass durch die kreditrisikomindernde Wirkung der Tilgungszahlungen für alle Recovery Rates im Falle der Loans trotz der Replenishments deutlich mehr Wahrscheinlichkeitsmasse im linken Verteilungsbereich bzw. im Falle der dritten Tranche auf dem linken Verteilungsende zu finden ist als im Falle der Bonds. Die Wahrscheinlichkeitsmasse auf dem linken Verteilungsende führt dazu, dass die erwarteten Verluste für die dritte Tranche, insbesondere für die Recovery-Werte von 30 % und 54 %, verhältnismäßig niedrig sind.



**Abb. 5-10: Verlustverteilungen einzelner Tranchen für verschiedene Recovery Rates mit Replenishments und Replenishment-Trigger**

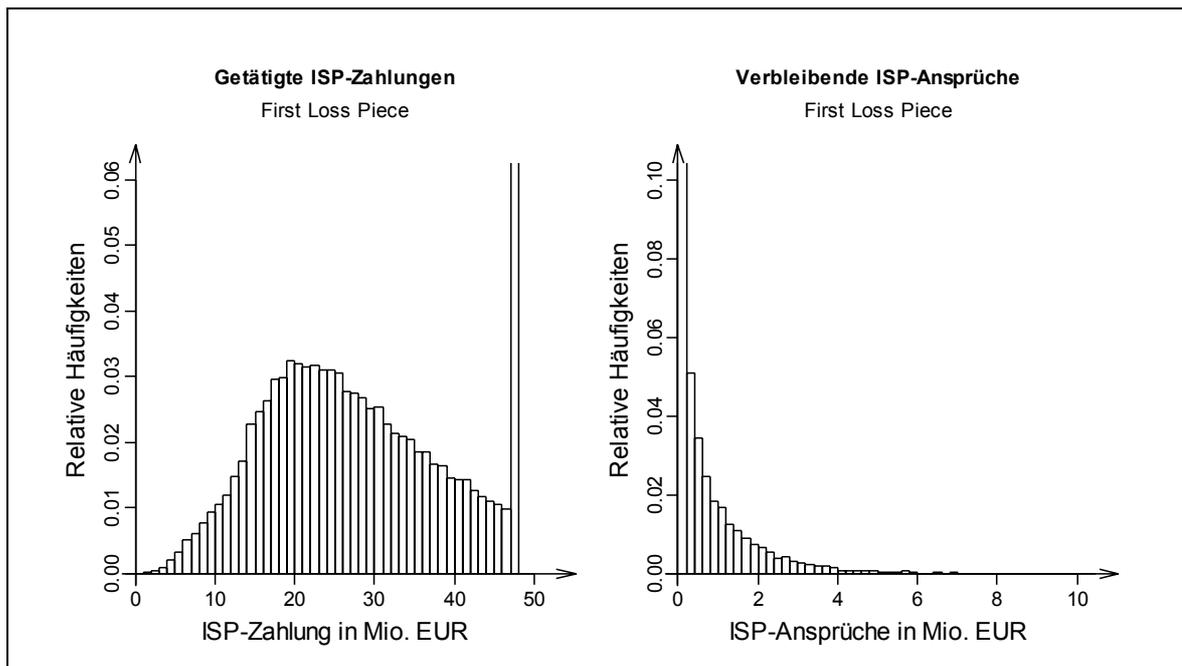
Verlustverteilungen des First Loss Piece (0;47,5 Mio. EUR] und der dritten Tranche (57,5;84 Mio. EUR] für den Risikohorizont von 5 Jahren. Die Recovery Rates betragen 0 %, 30 %, 54 %. Die Kredite stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S.

Ebenfalls deutlich wird der oben bereits angesprochene Simulationsfehler, der sich trotz der hohen Versuchszahl in den Histogrammen durch die unebenen Histogrammkonturen bemerkbar macht.

### 513 Berücksichtigung begrenzter Zinsunterbeteiligungen bei der Kreditrisikomessung des First Loss Piece

Obgleich die Monte Carlo Simulation einen erheblichen Rechenaufwand bedeutet und trotz einer Vielzahl von Simulationsszenarien Simulationsfehler birgt, ist sie doch die einzige Möglichkeit, um ausgewählte Spezifika von CDOs zu erfassen. Verdeutlicht wird das an-

hand der begrenzten Zinsunterbeteiligung der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion. Zinsunterbeteiligungen (Interest Sub-Participation, ISP)<sup>831</sup> sind Instrumente, mit der die ansonsten nur teuer zu veräußernden First Loss Tranchen mit einer geringen Prämie verkauft werden können.<sup>832</sup> Sie sichern den Investoren eine Beteiligung an Zinseinnahmen aus dem Referenzportfolio im Falle schlagend werdender Kreditrisiken zu.<sup>833</sup> Die Beschränkung auf zukünftige, d. h. nach dem Zeitpunkt des Kreditausfalls anfallende Zinseinnahmen ist wesensbestimmendes Merkmal einer *begrenzten* Zinsunterbeteiligung.



**Abb. 5-11: Zahlungen und übrige Ansprüche aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung**

Getätigte Zahlungen und verbleibende Ansprüche aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung (Interest Sub-Participation, ISP) des First Loss Piece (0;47,5 Mio. EUR] für den Risikohorizont von 5 Jahren. Die Recovery Rate beträgt 0 %. Die Kredite des Referenzportfolios stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S und beinhalten Replenishments mit Replenishment-Trigger.

Durch den (synthetischen) Verkauf des FLPs wird zwar das Ausfallrisiko dieser Tranche an eine dritte Partei weitertransferiert, jedoch erhält der Investor durch die begrenzte Zinsunterbeteiligung einen Anspruch auf vollständige Kompensation etwaiger ausfallbedingter Verluste, soweit aus den Zinseinnahmen ausreichende Zahlungsmittel zur Verfügung stehen. Dadurch wird modelltheoretisch gesehen, die Verlustverteilung des FLPs durch die

<sup>831</sup> Die Zinsunterbeteiligung hat nach Kenntnis des Verfassers bisher noch keinen Eingang in die betriebswirtschaftliche Literatur gefunden. Sie wurde jedoch bereits in einem vorläufigen Entwurf des (ehemaligen) BaKred zur Umsetzung der Basler Neuregelung bezüglich der aufsichtsrechtlichen Behandlung von Risikoaktiva, die durch synthetische Verbriefungen besichert werden, erwähnt. Vgl. BaKred: Synthetische Verbriefungen, Entwurf vom 12.03.2002, S. 1 u. 7 f. Vgl. ausführlich Abschnitt 234.

<sup>832</sup> Das First Loss Piece im Rahmen der PROMISE-K 2001 PLC-Transaktion wurde über einen Credit Default Swap mit einer begrenzten Zinsunterbeteiligung an eine OECD-Bank verkauft.

<sup>833</sup> Die Zinsunterbeteiligung ist aufsichtsrechtlich motiviert und erlaubte der DRESNER BANK die notwendigen Eigenmittel für das Referenzportfolio merklich zu verringern. Für eine Diskussion siehe S. Jortzik und B. Müller (2002), Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate, S. 21-24.

Verteilung der verbleibenden, nicht bedienten Ansprüche aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung ersetzt. Abb. 5-11 zeigt links die Verteilung der erfolgten Kompensationszahlungen aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung für den Risikohorizont  $t_H=5$  bei einer Recovery Rate von 0 %. Ein Vergleich mit Abb. 5-10 zeigt, dass eine große Ähnlichkeit mit der Verlustverteilung des FLPs besteht. Nahezu alle realisierten Verluste werden durch Kompensationszahlungen abgedeckt. Ermöglicht wird dies durch den Zugriff auf die gesamten Bruttozinszahlungen. Alternativ wäre – zumindest theoretisch – ein begrenzter Zugriff auf die einkalkulierten Risikoprämien für Kapitalverluste denkbar. Mit dem zusätzlichen Zugriff auf die Prämien für die Kapitalüberlassung und die Kosten des operativen Bereiches führen lediglich Ausfälle von extrem unwahrscheinlichen Ausmaßen<sup>834</sup>, so dass die Zinseinnahmen der verbleibenden Kredite nicht mehr ausreichen, um eine vollständige Kompensationen der Verluste des FLPs zu leisten, sowie Ausfälle zu Zeitpunkten kurz vor dem Verfallszeitpunkt der CDO-Transaktion<sup>835</sup>, so dass die Zinseinnahmen der verbleibenden Monate die entstandenen Ansprüche nicht mehr befriedigen können, dazu, dass im Verfallszeitpunkt der CDO-Transaktion noch verbleibende Ansprüche aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung bestehen. Abb. 5-11 zeigt rechts die Verteilung der verbliebenen ISP-Ansprüche. Es wird deutlich, dass i. d. R. kaum Ansprüche verbleiben. Der Erwartungswert der verbleibenden ISP-Ansprüche beträgt gerade 56.778,87 EUR (vgl. Tab. 5-4). Mit zunehmender Recovery Rate sinkt der Erwartungswert der verbleibenden ISP-Ansprüche auf nicht einmal 3.467,01 EUR für  $\delta=54$  %. Da die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Verlustes annähernd 100 % beträgt, sind diese Werte zugleich als Loss Given Default zu betrachten:

Recovery Rate	0 %	30 %	54 %
Ø verbleibende ISP-Ansprüche	56.778,87 EUR	19.727,36 EUR	3.467,01 EUR

**Tab. 5-4: Durchschnittliche verbleibende Ansprüche aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung für verschiedene Recovery Rates**

Durchschnittliche verbleibende Ansprüche aus der begrenzten Zinsunterbeteiligung (Interest Sub-Participation, ISP) des First Loss Piece [0;47,5 Mio. EUR) für den Risikohorizont von 5 Jahren. Die Kredite des Referenzportfolios stellen Abzahlungsdarlehen dar (Loans). Die Rechnungen basieren auf den historischen, durchschnittlichen 1-Jahres-Migrationsraten (Credit Curves vom Typ B) nach STANDARD & POOR'S und beinhalten Replenishments mit Replenishment-Trigger.

Aus der Sicht des Originators wird deutlich, dass die begrenzte Zinsunterbeteiligung dazu führt, dass das Ausfallrisiko des FLPs trotz der Platzierung am Finanzmarkt letztlich doch bei ihm verbleibt. Es ist lediglich in ein Liquiditätsrisiko umgewandelt worden.

<sup>834</sup> Bspw. würde ein sofortiger Ausfall des gesamten Portfolios dazu führen, dass es zu keinerlei zukünftigen Zinseinnahmen käme. Der Originator hätte die Verluste trotz Zinsunterbeteiligung nicht zu tragen.

<sup>835</sup> Für den Fall des Aufbaus eines zeitlich nachgelagerten „Extended Reference Pools“ dürften auch noch die verbliebenen Ansprüche befriedigt werden.

## 52 Kapitalmarktorientierte Bewertung synthetischer CDOs

### 521 Einordnung der semi-analytischen Modellierung sowie der Simulation in die Welt der risikoneutralen Bewertung

#### 5211 Arbitragefreie Modellierung des Marktes für ausfallrisikofreie Zahlungsansprüche

Annahmegemäß sei ein friktionsloser Kapitalmarkt unterstellt, an dem zu jedem Zeitpunkt  $t$  Handel möglich ist. Insbesondere wird das Fehlen von Transaktionskosten und Steuern unterstellt.<sup>836</sup> Es existiere ein risikoloses Geldmarktkonto  $B(t)$ , d. h. eine revolvingende, kurzfristige Geldanlage zum jeweils aktuell gültigen stetigen Zinssatz  $r_f(t)$ . Dann gilt:

$$B(t) = e^{\int_0^t r_f(u) du} \quad 837 \quad (5.13)$$

Folgt der Zinssatz einer deterministischen, nicht-negativen Funktion, dann ergibt sich der Wert eines ausfallrisikofreien Anspruchs  $i$  auf eine Zahlungseinheit im Zeitpunkt  $T$  bezüglich des Zeitpunktes  $t \leq T$  wie folgt:

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r_f(u) du} = \frac{B(t)}{B(T)} \quad (5.14)$$

Ist der risikofreie Zinssatz stochastisch, stellt  $B_t = B(t)$  eine Zufallsvariable dar und die Entwicklung des Geldmarktkontos kann durch einen stochastischen Prozess  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  beschrieben werden.

Die damit einhergehende Unsicherheit findet ihren mathematischen Niederschlag im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Die Grundgesamtheit  $\Omega$  enthält alle<sup>838</sup> denkbaren Umweltzustände  $w$  und spiegelt demzufolge, mit Blick auf den stochastischen Zinssatz<sup>839</sup>, alle denkbaren Pfadausprägungen von  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  wider.<sup>840</sup>

<sup>836</sup> Z. T. wird von einzelnen Autoren in einer ausfallrisikobehafteten Welt von einem vollkommenen Kapitalmarkt gesprochen. Vgl. bspw. P. Grundke (2000), Bewertung von Kreditderivaten, S. 6. Da jedoch ein Kapitalmarkt als vollkommen bezeichnet wird, wenn der Preis, zu dem ein Zahlungsstrom zu einem bestimmten Zeitpunkt gehandelt wird, für jeden Kapitalmarktteilnehmer, unabhängig davon, ob er als Käufer oder Verkäufer auftritt, gleich und gegeben ist, impliziert dies auch die Kapitalaufnahme zu identischen Konditionen unabhängig von der Bonität des Kunden und steht im Widerspruch zu einer ausfallrisikobehafteten Welt, in welcher der Sollzinssatz insbesondere vom Kapitalstrukturrisiko abhängig ist. Vgl. L. Perridon und M. Steiner (2004), Finanzwirtschaft, S. 20, S. 84 u. S. 496.

<sup>837</sup> Vgl. bspw. M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2000), Default risk: Mathematical tools, S. 14 u. S. 42. Häufig wird die Investition einer einzelnen Geldeinheit betrachtet, so dass  $B(0)=1$  und  $B(t) \geq 1$  für  $t > 0$ , sofern der risikofreie Zinssatz  $r_f(t)$  keine negativen Werte annimmt. Vgl. S. Pliska (2002), Mathematical finance: Diskrete time models, S. 1 f.

<sup>838</sup> Die Grundgesamtheit  $\Omega$  ist mit den obigen Annahmen eine unendliche Menge von Umweltzuständen.

<sup>839</sup> Der Wahrscheinlichkeitsraum kann so ausgestaltet sein, dass auch andere stochastische Prozesse auf diesem definiert sind. Dazu können insbesondere die Prozesse der Unternehmenswerte  $\{A_{i,t}\}_{t \geq 0}$ , der Schranken  $\{K_{i,t}\}_{t \geq 0}$  und der derivativen Strukturen  $\{X_{i,t}\}_{t \geq 0}$ , insbesondere die der schuldrechtlichen Ansprüche  $\{D_{i,t}\}_{t \geq 0}$  gegenüber der Unternehmung  $i$  als derivative Strukturen auf den Unternehmenswert  $A_{i,t}$ ,

Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}$  ist eine Menge von Teilmengen von  $\Omega$  und beschreibt die Fähigkeit des Investors, zwischen verschiedenen Umweltzuständen  $w \in \Omega$  zu unterscheiden.<sup>841</sup> Im Falle der trivialen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$  ist der Investor unfähig, zwischen verschiedenen Umweltzuständen zu differenzieren.<sup>842</sup> Je mehr Teilmengen die  $\sigma$ -Algebra enthält, je besser kann der Investor verschiedene Umweltzustände voneinander trennen. Der Umfang der Information, die einem Investor zur Verfügung steht, ist demnach wahrscheinlichkeitstheoretisch als Fähigkeit des Investors zu verstehen, einen spezifischen Umweltzustand  $w \in \Omega$  zu identifizieren. Der Informationsfluss wird als Folge von  $\sigma$ -Unteralgebren  $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  mit  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$  für  $s \leq t$  modelliert. Dabei enthält  $\mathcal{F}_t$  alle aus Sicht des Investors differenzierbaren Ereignisse zum Zeitpunkt  $t$ . Mit dem Verstreichen der Zeit  $t$  wächst der Umfang der Information des Investors<sup>843</sup>, so dass  $\mathcal{F}_s$  stets eine Teilmenge von  $\mathcal{F}_t$  darstellt.  $\mathcal{F}_\infty$  ist die terminale  $\sigma$ -Algebra. Eine in dieser Form definierte Folge von  $\sigma$ -Unteralgebren  $\mathbb{F}$  wird als Filtration bezeichnet.<sup>844</sup> Um die Konsistenz zwischen dem Preisprozess und der Informationsstruktur zu gewährleisten und insbesondere sicherzustellen, dass Informationen über vergangene und gegenwärtige Zinssätze in den Preisbildungsprozess für  $B_t$  einfließen bzw. eingeflossen sind, wird i. d. R. gefordert, dass für jeden Zeitpunkt  $t$  die Informationen in  $\mathcal{F}_t$  ausreichend sind, um den Wert für  $B_t$  zu bestimmen.<sup>845</sup> Man sagt, dass  $B_t$  bezüglich  $\mathcal{F}_t$  messbar ist. Der stochastische Prozess  $\{B_t\}_{t \geq 0}$  heißt dann zu  $\mathbb{F}$  adaptiert.

In den meisten Kreditrisikomodellen mit stochastischen Zinssätzen wird die Filtration  $\mathbb{F}$  durch eine BROWNSche Bewegung  $W_t$  erzeugt, d. h.  $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$  wobei  $\mathbb{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$  mit

---

zählen. Vgl. auch T. Bielecki, M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2004), Modeling and valuation of credit risk, S. 7 f.

<sup>840</sup> Für jedes  $w$  ist die Funktion  $t \rightarrow B(t, w)$  eine Pfadausprägung. Vgl. S. Pliska (2002), Mathematical finance: Diskrete time models, S. 77.

<sup>841</sup> Anschauliche Erläuterungen zur  $\sigma$ -Algebra finden sich in S. Pliska (2002), Mathematical finance: Diskrete time models, S. 73-76. Spezielle Ausführungen zur Definition der  $\sigma$ -Algebra in einer Welt mit einer unendlichen Menge an Umweltzuständen finden sich in S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 2 f. Eine mathematisch rigorose Betrachtung liefert H. Bauer (1992), Maß- und Integrationstheorie, S. 2-7.

<sup>842</sup> Für den Bondmarkt scheint ein in dieser Weise modellierter Wahrscheinlichkeitsraum wenig plausibel. Wird dagegen der Markt von Beteiligungen an Unternehmen in Familienbesitz betrachtet, ist eine derartige Informationsstruktur aufgrund der hier vorherrschenden restriktiven Handhabung der Öffentlichkeitsarbeit durchaus zu rechtfertigen. Vgl. auch K. Giesecke (2003), Default and information, S. 12.

<sup>843</sup> Der Informationsstand verschlechtert sich zumindest nicht.

<sup>844</sup> Vgl. R. Elliot (1982), Stochastic calculus, S. 10. Anschauliche Kommentare und Beispiele finden sich in S. Pliska (2002), Mathematical finance: Diskrete time models, S. 73-76 und S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 49-81.

<sup>845</sup> Mathematisch wird gefordert, dass für alle  $t$  jedes Ereignis in dem durch  $B_t$  erzeugten  $\sigma$ -Feld  $\sigma(B_t)$  auch in  $\mathcal{F}_t$  enthalten ist. Vgl. S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 53, Definition 2.1.5 und Definition 2.1.6. Dabei ist  $\sigma(B_t)$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra über dem Zustandsraum  $\Omega$ , so dass auf sie bezogen die Abbildung  $B_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  messbar ist. D. h.  $\sigma(B_t) = B_t^{-1}(\mathcal{B}) = \{B_t^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ , wobei  $\mathcal{B}$  die BOREL- $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}$  darstellt. Zur Problematik der Erzeugung von  $\sigma$ -Feldern vgl. ebenda, S. 49-53 u. S. 530 f. Siehe zum Thema der messbaren Abbildungen W. König (2003), Stochastik I (Skriptum), S. 35.

$\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s : s \leq t)$ .<sup>846</sup> Vereinfacht gesprochen enthält die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_t^W$  die Historie der BROWNSchen Bewegung  $W_s$  bis zum und einschließlich des Zeitpunktes  $t$ . In einem derartigen Modellumfeld kann entweder der (Spot-)Zinssatz  $r_t$  direkt oder indirekt mit Hilfe des (instantanen) Forward-Zinssatzes  $r_{t,T}$  als Diffusionsprozess modelliert werden:<sup>847</sup>

$$dr_t = a(r_t, t)dt + b(r_t, t)dW_t, \quad (5.15)$$

$$dr_{t,T} = \hat{a}(r_{t,T}, t)dt + \hat{b}(r_{t,T}, t)dW_t. \quad (5.16)$$

In Gleichung (5.16) wurde vereinfachend unterstellt, dass alle Forward-Rates, unabhängig von ihrem Verfallszeitpunkt  $T$  von ein- und derselben BROWNSchen Bewegung  $W_t$  getrieben werden (Ein-Faktor-Modell). Eine Erweiterung auf einen Raum mit mehreren BROWNSchen Bewegungen ist jederzeit möglich (Multi-Faktor-Modell). Mit der Gleichung (5.16) als Beispiel fortfahrend, überträgt sich unter Berücksichtigung der Identität<sup>848</sup>

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T r_{t,u} du} \quad (5.17)$$

der Risikofaktor  $W_t$  auf den stochastischen Prozess des ausfallrisikofreien Anspruchs  $i$  auf eine Zahlungseinheit im Zeitpunkt  $T$  bezüglich des Zeitpunktes  $t \leq T$ , wobei sich ein geometrischer Diffusionsprozess mit stochastischer Differentialgleichung der folgenden Form ergibt:

$$dB(t, T) = \tilde{a}(t, T)B(t, T)dt + \tilde{b}(t, T)B(t, T)dW_t. \quad (5.18)$$

Im Folgenden wird kein spezifischer stochastischer Prozess für den Zinssatz  $r_f$  angenommen. Es ist für die nachfolgenden Ergebnisse ausreichend, direkt mit der Preisstruktur des

<sup>846</sup> Vgl. zur Erzeugung von  $\sigma$ -Feldern durch Zufallsvariablen auch die Fn. 845.

<sup>847</sup> In der Literatur wurden die Diffusionsprozesse verschiedenartig ausgestaltet. Als Beispiel für die direkte Modellierung der (Spot-)Zinssätze sind die Modelle nach O. Vasicek (1977), Term structure characterization, S. 177-188; J. Cox, J. Ingersoll und S. Ross (1985), Term structure of interest rates, S. 385-407; T. Ho und S. Lee (1986), Term structure movements, S. 1011-1029 zu nennen. Als einschlägiges Beispiel für die Modellierung der (instantanen) Forward-Zinssätze gilt das HJM-Modell nach D. Heath, R. Jarrow und A. Morton (1992), Term structure of interest rates, S. 77-105. Zusammenfassende Darstellungen, vergleichende Darstellungen und weitere Modellbeispiele finden sich in S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 426-450; J. Hull (2003), Options, futures and other derivatives, S. 535-549 u. S. 574-577.

<sup>848</sup> Ein Erwartungsoperator entfällt, da alle Forward-Rates  $r_{t,T}$  für alle  $T \geq t$  im Zeitpunkt  $t$  bereits bekannt sind. Vgl. auch die ausführlichen Analysen in S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 407-425.

<sup>849</sup> Für eine Herleitung der Gleichung (5.18) sowie die Bestimmung der Parameter  $\tilde{a}(t, T)$  und  $\tilde{b}(t, T)$  siehe S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 425 f. Häufig wird in umgekehrter Reihenfolge vorgefahren. Dabei wird ein Diffusionsprozess für die ausfallrisikofreien Ansprüche unterstellt, um anschließend auf die Form des stochastischen Prozesses der instantanen Forward-Rate zu schließen. Vgl. dazu S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 437-441.

Bondmarktes zu arbeiten. Es sei jedoch im Folgenden gefordert, dass der Bondmarkt arbitragefrei ist. Fehlende Arbitragefreiheit würde bedeuten, dass mindestens eine Handelsstrategie existiert, die mit einem Kapitaleinsatz in Höhe von null in einem zukünftigen Zeitpunkt mit einer positiven, von null verschiedenen Wahrscheinlichkeit zu einem Gewinn unter Ausschluss der Möglichkeit eines Verlustes führt.<sup>850</sup> In einem per Annahme postulierten friktionslosen Kapitalmarkt würden sich alle Marktteilnehmer sofort dieser Handelsstrategie bedienen, demzufolge die Preise der involvierten Finanztitel beeinflussen und den Kapitalmarkt zurück in den Zustand der Arbitragefreiheit führen.<sup>851</sup>

In einem Bondmarkt mit deterministischen Zinsen würde im Falle von  $\exp\left(-\int_t^T r_f(u) du\right) \neq B(t, T)$  der Leerverkauf des Bonds und die Anlage der liquiden Mittel in das Geldmarktkonto (risikofreie Geldleihe) bzw. der Kauf des Bonds und die Aufnahme der notwendigen liquiden Mittel zum risikofreien Zinssatz (risikofreie Geldaufnahme) eine Arbitragestrategie darstellen. Liquider Handel führte daraufhin zur Identität (5.14).<sup>852</sup> In einem Bondmarkt mit stochastischen Zinsen kann man sich des (ersten) *Fundamental Theorems of Asset Pricing* bedienen. Danach sichert die Existenz eines zu  $P$  äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q$ , unter dem die mit dem risikolosen Zinssatz deflationierten Preise Martingale folgen, ein arbitragefreies Preissystem.<sup>853</sup>

Die Wahrscheinlichkeitsmaße  $P$  und  $Q$  sind insofern äquivalent, als dass sie den selben Ereignissen  $A \in \mathcal{F}$  den Wert null zuordnen.<sup>854</sup> Damit sind mit Blick auf den risikolosen Zinssatz all diejenigen Pfadausprägungen, die mögliche bzw. unmögliche Ereignisse unter  $P$  darstellen, auch unter  $Q$  mögliche bzw. unmögliche Ereignisse. Für Bewertungsfragen maßgebliche Duplikations- bzw. Hedgingstrategien bleiben demzufolge mit Blick auf deren Durchführbarkeit von der Änderung des Wahrscheinlichkeitsmaßes unberührt.

<sup>850</sup> Für eine beispielhafte Betrachtung vgl. [S. Pliska \(2002\)](#), *Mathematical finance: Diskrete time models*, S. 4-10. Eine formale Definition in einer zeit-kontinuierlichen Modellwelt findet sich in [S. Shreve \(2004\)](#), *Continuous-time models*, S. 230.

<sup>851</sup> In einem zeitkontinuierlichen Modell sind Restriktionen notwendig (engl.: admissability), um offensichtliche Arbitragestrategien auszuschließen. Zumeist wird gefordert, dass das Vermögen des Investors zur Vermeidung von sog. „Doubling Strategies“ nicht unendlich klein werden darf. Ein Beispiel im Rahmen einer Diskussion des nachfolgend betrachteten Fundamental Theorems of Asset Pricing findet sich in [M. Davis \(2001\)](#), *Mathematics of financial markets*, S. 369 f.

<sup>852</sup> Vgl. dazu in ausführlicherer Form [S. Neftci \(2000\)](#), *Mathematics of financial derivatives*, S. 414 f.

<sup>853</sup> Vgl. [S. Shreve \(2004\)](#), *Continuous-time models*, S. 231, Theorem 5.4.7. Das Fundamental Theorem of Asset Pricing wurde erstmalig in [M. Harrison und D. Kreps \(1979\)](#), *Martingales und arbitrage*, S. 392 formuliert. Teilweise wird in der Literatur auch vom Fundamental Theorem of Finance gesprochen. Vgl. [S. Neftci \(2000\)](#), *Mathematics of financial derivatives*, S. 467. Die Umkehrung dieses Theorems gilt leider nur, solange kein zeit-kontinuierliches bzw. kein zeit-diskretes Modell mit unendlich vielen Handelszeitpunkten unterstellt wird. Ein Beispiel für einen arbitragefreien Preisprozess, der kein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  zulässt, findet sich in [S. Pliska \(2002\)](#), *Mathematical finance: Diskrete time models*, S. 246-248, Example 7.2.

<sup>854</sup> Vgl. [S. Shreve \(2004\)](#), *Continuous-time models*, S. 34, Definition 1.6.3.

Ein Prozess  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  folgt einem Martingal, wenn die erwartete Änderung in einem Zeitpunkt  $s$  bezüglich eines Zeitpunktes  $t$  mit  $s < t$  unter Berücksichtigung der im Zeitpunkt  $s$  zur Verfügung stehenden Informationen in  $\mathcal{F}_s$  null beträgt. Der aktuelle Wert  $X_s$  stellt damit unter  $Q$  die beste Prognose für  $X_t$  dar und eröffnet die Möglichkeit, in der Theorie der Finanztitelbewertung allein auf einen Erwartungswert abzustellen. Man schreibt formal<sup>855</sup>  $E^Q[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s$ , womit der Prozess  $X$  in  $s$  als „fair“<sup>856</sup> bewertet gilt. Im Fundamental Theorem of Asset Pricing führt der verwendete Deflator dazu, dass der zu deflationierende Prozess unter  $Q$  eine erwartete Rendite in Höhe des risikofreien Zinssatzes aufweist.<sup>857</sup> Damit ermitteln sich die Preise von Finanztiteln unter  $Q$  als Erwartungswert der risikolos diskontierten Payoffs.<sup>858</sup> Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  wird deshalb auch als risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß bezeichnet.<sup>859</sup> Für den Wert des ausfallrisikofreien Anspruchs  $i$  auf eine Zahlungseinheit im Zeitpunkt  $T$  bezüglich des Zeitpunktes  $t \leq T$  in einem arbitragefreien Preissystem mit risikoneutralem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  folgt:<sup>860</sup>

$$B(t, T) = E^Q \left( \exp \left( - \int_t^T r_f(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right) = B(t) E^Q \left( B(T)^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (5.19)$$

Die Maße  $P$  und  $Q$  sind über die RADON-NIKODYM-Dichte miteinander verbunden.<sup>861</sup> Sind  $P$  und  $Q$  zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf  $(\Omega, \mathcal{F})$ , dann heißt eine Zufallsvariable  $X : \Omega \rightarrow [0, \infty)$  die Dichte von  $Q$  bezüglich  $P$ , wenn für jedes Ereignis  $A \in \mathcal{F}$  gilt:<sup>862</sup>

$$Q(A) = \int_A X(w) dP(w). \quad (5.20)$$

<sup>855</sup> Tatsächlich wird der Begriff des Martingals häufig mit einem fairen Spiel in Verbindung gebracht. Die Namensgebung selbst geht ebenfalls auf das Glückspiel zurück. Vgl. H. Zimmermann (1998), State-Preference Theorie, S. 82, Fn. †.

<sup>856</sup> Vgl. I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 11.

<sup>857</sup> Nicht der originale Preisprozess, sondern der Quotient aus dem Preisprozess und dem Prozess des Geldmarktkontos weist unter dem Maß  $Q$  einen Drift in Höhe von null auf. Für eine beispielhafte Verdeutlichung vgl. S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 389-392.

<sup>858</sup> Die Diskontierung überführt – Existenz vorausgesetzt – ein arbitragefreies Preismaß in ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Siehe S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 17-26 u. 381-395.

<sup>859</sup> Man spricht auch von der Bewertung in einer „risikoneutralen Welt“. M. Wilkens, R. Baule und O. Entrop (2004), Reale und risikoneutrale Welten, S. 475-477 weisen zurecht darauf hin, dass dies häufig zu interpretatorischen Schwierigkeiten führt. Sie unterscheiden eine „reale Welt“, eine „realrisikoneutrale Welt“ und eine „bewertungsrelevante risikoneutrale Welt“. Die bewertungsrelevante risikoneutrale Welt verbinden sie mit folgender Fragestellung: „Wie wäre – bei gegebenem heutigem [Kurs des Finanztitels] – die Verteilung des zukünftigen Kurses, damit der heutige [Kurs] unter der Annahme der Risikoneutralität der Investoren erklärt wird?“. Ebenda, S. 475.

<sup>860</sup> Vgl. S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 415 f.

<sup>861</sup> Im State-Preference Kontext verbindet H. Zimmermann (1998), State-Preference Theorie, S. 66-69 das Wahrscheinlichkeitsmaß  $P$  mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  über den Grenznutzen einer Vermögenseinheit des Investors in den jeweiligen Umweltzuständen.

<sup>862</sup> Vgl. W. König (2003), Stochastik I (Skriptum), S. 35; S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 33.

<sup>863</sup> Da der Zustandsraum  $\Omega$  Element von  $\mathcal{F}$  ist, muss wegen  $P(\Omega) = Q(\Omega) = 1$  gelten:

$$Q(\Omega) = \int_{\Omega} X(w) dP(w) = E^P(X) = 1.$$

Besitzt  $Q$  eine Dichte bezüglich  $P$ , dann sind alle  $P$ -Nullmengen auch  $Q$ -Nullmengen und  $Q$  heißt absolutstetig bezüglich  $P$ . Der Satz von RADON-NIKODYM kehrt diese Aussage um und bestätigt die Existenz der Dichte bei Absolutstetigkeit von  $Q$  bezüglich  $P$ . Die Existenz eines zu  $P$  äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q$  ist folglich bedingt durch die Existenz einer RADON-NIKODYM-Dichte  $X$  so, dass  $X > 0$   $P$ -a.s. Die Absolutstetigkeit gilt dann in beide Richtungen.<sup>864</sup>

$$P(A) = \int_A X(w)^{-1} dQ(w). \quad (5.21)$$

Die RADON-NIKODYM-Dichten  $X$  und  $X^I$  korrigieren damit die Wahrscheinlichkeiten eines jeden Ereignisses  $A \in \mathcal{F}$  nach oben bzw. nach unten. Mit Blick auf die Filtration  $\mathbb{F}$  lässt sich ein RADON-NIKODYM-Prozess  $X_t$  definieren:

$$X_t = E(X|F_t) \quad \forall \quad t \geq 0. \quad (5.22)$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft<sup>865</sup> von  $X_t$  wird dadurch eine konsistente Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen  $\{Q_t\}_{t \geq 0}$  begründet.<sup>866</sup>

$$\begin{aligned} Q(A) &= \int_A X dP = \int_{\Omega} 1_A X dP = E^P(1_A X) \\ &= E^P(E^P(1_A X | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_0) = E^P(1_A E^P(X | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_0) = E^P(1_A X_t) \\ &= \int_A X_t dP =: Q_t(A) \quad \forall \quad A \in \mathcal{F}_t. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Insbesondere gilt  $X_0 = 1$  wegen  $X_0 = E(X|F_0) = E(X)$ .<sup>867</sup> Je nach Modellumfeld, ist die Existenz eines stets positiven RADON-NIKODYM-Prozesses  $X_t$  und damit eines äquivalenten Martingalmaßes zu klären. Beispielsweise kann sich dies bei einer BROWNSchen Filtration  $\mathbb{F} = \mathbb{F}^W$  für einen infiniten Zeithorizont als problematisch erweisen. In Anlehnung an das GIRSANOV-Theorem lässt sich für einen zu  $\mathbb{F}^W$  adaptierten Prozess  $\{\phi_t\}_{t \geq 0}$  definieren:

$$X_t = \exp\left(-\int_0^t \phi_u dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \phi_u^2 du\right) \quad \text{für} \quad 0 \leq t < \infty. \quad (5.24)$$

Mit den Eigenschaften der Exponentialfunktion ist  $X_t$  ein stets positiver Prozess. Wird ITO's Lemma<sup>868</sup> auf (5.24) angewendet, erhält man:

<sup>864</sup> Vgl. S. Shreve (1997), Stochastic calculus, S. 111 f.

<sup>865</sup> Unter Verwendung des Iterated Expectation Theorems gilt:

$$E(X_t | F_s) = E(E(X | F_t) | F_s) = E(X | F_s) = X_s.$$

<sup>866</sup> Die zweite Zeile in (5.23) ergibt sich insbesondere aufgrund der Messbarkeit von  $1_A$  bezüglich  $\mathcal{F}_t$ .

<sup>867</sup> Vgl. Fn. 863.

<sup>868</sup> Vgl. B. Øksendal (2003), Stochastic differential equations, S. 43-49.

$$X_t = 1 - \int_0^t \phi_u X_u dW_u . \quad (5.25)$$

Es wird ersichtlich, dass neben  $X_t > 0$  auch  $X_0 = 1$  gilt. Wenn zudem für einen finiten Zeitpunkt  $T^*$  mit  $0 \leq T^* < \infty$  der Prozess  $X_t$  den Erwartungswert  $E(X_{T^*}) = 1$  aufweist, dann wird – GIRSANOV folgend – in Analogie zu (5.20) ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q_{T^*}$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}_{T^*}^W)$  definiert.<sup>869</sup>

$$Q_{T^*}(A) = \int_A X_{T^*}(w) dP(w) \quad \forall \quad A \in \mathcal{F}_{T^*}^W . \quad (5.26)$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft von  $X_t$  gem. (5.24) gilt (5.23) analog. Das GIRSANOV-Theorem postuliert weiter, dass  $\left\{W_t + \int_0^t \phi_u du\right\}_{0 \leq t \leq T^*}$  einer BROWNSchen Bewegung auf  $(\Omega, \mathcal{F}_{T^*}^W, Q_{T^*})$  folgt. Damit erfolgt mit Blick auf stochastische Differentialgleichungen der Form (5.18) eine Driftänderung unter dem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß, wobei die Volatilitätsstruktur beibehalten wird. Risikoprämien können so eliminiert werden, womit eine risikoneutrale Bewertung ermöglicht wird.<sup>870</sup> Fraglich ist jedoch das Verhalten von  $X_t$  mit  $t \rightarrow \infty$ . In der Welt von BLACK & SCHOLES<sup>871</sup> mit  $\phi_t = \mu/\sigma = const$  folgt  $X_t = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma} W_t - 0,5 \frac{\mu^2}{\sigma^2} t\right) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .<sup>872</sup> Damit sind die Wahrscheinlichkeitsmaße  $P$  und  $Q$  nicht äquivalent auf  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^W)$ .

Sofern keine Finanztitel mit unendlicher Restlaufzeit bewertet werden, muss dies nicht als Problem betrachtet werden.<sup>873</sup> Darüber hinaus kann ausgehend von  $Q_T$  stets ein eindeutiges Maß  $Q$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^W)$  gefunden werden, so dass  $Q(A) = Q_{T^*}(A) \quad \forall \quad A \in \mathcal{F}_{T^*}^W$ . Es kann demnach ein Wahrscheinlichkeitsraum mit infinitem Zeithorizont so konstruiert werden, dass  $P$  und  $Q$  beidseitig absolutstetig sind, sofern  $P$  und  $Q$  auf  $(\Omega, \mathcal{F}_{T^*}^W)$  beschränkt werden.<sup>874</sup> Zudem ist, das obige Beispiel fortführend,  $\left\{W_t + \int_0^t \phi_u du\right\}_{0 \leq t < \infty}$  eine BROWNSche Bewegung auf  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty^W, Q)$ . Die Betrachtung eines infiniten Zeithorizontes wird nachfolgend die Definition von Prozessen für alle  $t \geq 0$  erlauben. Die Länge des finiten Zeitraums  $[0, T^*]$  mit  $T^* < \infty$  kann zweckmäßig in Abhängigkeit der Restlaufzeiten  $T_i$  der einzelnen Kredite des Referenzportfolios als auch der betrachteten CDO Struktur  $T_{CDO}$ , respektive der Laufzeiten der begebenen CDOs bzw. die zur Sicherung einer Junior- und einer Super-Senior-Tranche abgeschlossenen CDS, festgelegt werden:  $T^* \geq T_i, T_{CDO}$  für  $i = 1, \dots, N$ .

<sup>869</sup> Vgl. hierzu und zum Folgenden I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 191-193. Siehe insbesondere die Diskussion zu Theorem 5.1 sowie Corollary 5.2.

<sup>870</sup> Vgl. für den Bondmarkt ausführlich S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 423-435.

<sup>871</sup> Vgl. erläuternd S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 331-334.

<sup>872</sup> Siehe auch die Anmerkungen in I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 193 (Remark).

<sup>873</sup> Für ewig laufende Finanztitel vgl. z.B. I. Karatzas und S. Shreve (2001), Mathematical finance, S. 60-80.

<sup>874</sup> Vgl. detaillierter I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 192 f.

Die Eindeutigkeit des risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q$  und damit des arbitragefreien Preissystems ist nach dem (zweiten) *Fundamental Theorem of Asset Pricing* genau dann gegeben, wenn der Markt vollständig ist.<sup>875</sup> Dies ist der Fall, wenn zu jedem derivativen Finanztitel eine duplizierende Handelsstrategie gefunden werden kann. Ist die Eigenschaft der Vollständigkeit nicht gegeben, kann es verschiedene arbitragefreie Preissysteme geben. In diesem Fall kann ein arbitragefreies Preissystem modelliert und anschließend anhand von Marktdaten kalibriert werden.

## 5212 Erweiterung des Marktes für ausfallrisikofreie Zahlungsansprüche um ausfallrisikobehaftete Zahlungsansprüche

Der Markt für ausfallrisikofreie Zahlungsansprüche bedarf einer Ergänzung um ausfallrisikobehaftete Zahlungsansprüche. Damit einhergehend, ist der gefilterte Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  zu erweitern. Für Bewertungszwecke ist es wünschenswert, dass Martingale im ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraum ihre wesensbestimmenden Eigenschaften unter der Wahrscheinlichkeitsraumerweiterung nicht verlieren. Dazu seien Zufallsvariablen  $U_i$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{Q})$  so definiert, dass die einzelnen  $U_i$  der  $[0,1]$ -Gleichverteilung unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\hat{Q}$  folgen.<sup>876</sup> Das Produkt der Zustandsräume sei mit  $\Omega' = \Omega \times \hat{\Omega}$  bezeichnet. Auf der Produktmenge  $\Omega'$  soll eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}'$  so definiert werden, dass Abbildungen der Form  $\xi_1 : \Omega \times \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$  und  $\xi_2 : \Omega \times \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$  gerade noch messbar sind:

$$\mathcal{F}' = \sigma\left(\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty) \cup \xi_2^{-1}(\hat{\mathcal{F}})\right) = \sigma\left(\sigma(\xi_1) \cup \sigma(\xi_2)\right) =: \sigma(\xi_1) \vee \sigma(\xi_2). \quad (5.27)$$

Diese Forderung stellt sicher, dass Zufallsexperimente in den beiden (separaten) Wahrscheinlichkeitsräumen genauso gut, d. h. ohne Informationsverlust, im erweiterten (gemeinsamen) Wahrscheinlichkeitsraum beschrieben werden können. Zur Erzeugung der  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}'$  kann auf die Teilmengen

$$\xi_1^{-1}(A_1) = \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : w \in A_1\} \quad \text{mit } A_1 \in \mathcal{F}_\infty \quad \text{und} \quad (5.28)$$

$$\xi_2^{-1}(A_2) = \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : \hat{w} \in A_2\} \quad \text{mit } A_2 \in \hat{\mathcal{F}} \quad (5.29)$$

<sup>875</sup> Vgl. S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 231-234. Zur Verdeutlichung in einem zeit-diskreten Modell siehe S. Pliska (2002), Mathematical finance: Diskrete time models, S. 21-28.

<sup>876</sup> Für beispielhafte Wahrscheinlichkeitsraumkonstruktionen, so dass  $U_i$  der Gleichverteilung folgt vgl. S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 11 f.

<sup>877</sup> Eine Vereinigung von  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$  ergibt i. d. R. keine  $\sigma$ -Algebra. Die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die diese Vereinigung enthält, wird mathematisch mit  $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$  kodiert. Der  $\sigma$ -Operator, der sich im Gegensatz zu Fn. 845 nicht auf eine erzeugende Zufallsvariable, sondern auf ein erzeugendes Mengensystem bezieht, ist demnach wie folgt zu lesen:  $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) = \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra mit } (\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \subset \mathcal{A} \}$ . Vgl. W. König (2003), Stochastik I (Skriptum), S. 26.

zurückgegriffen werden. Diese Teilmengen, die so konstruiert sind, dass die erste (zweite) Komponente ihrer Elemente der Bedingung, Element von  $A_1$  ( $A_2$ ) zu sein, entspricht, bilden ein Erzeugendensystem. Mit Blick auf die Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist es wünschenswert, das Erzeugendensystem durchschnittsstabil zu gestalten.<sup>878</sup> Dazu werden Durchschnitte aus den Mengen (5.28) und (5.29) gebildet:

$$\xi_1^{-1}(A_1) \cap \xi_2^{-1}(A_2) = A_1 \times A_2. \quad 879 \quad (5.30)$$

Das Erzeugendensystem  $\mathcal{C}$ , bestehend aus den Mengen (5.30), ist durchschnittsstabil. Die damit erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C})$  heißt die Produkt- $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega' = \Omega \times \hat{\Omega}$ .<sup>880</sup>

**Definition 5-1 (Produktraum):** Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}'$  auf dem Produkt  $\Omega' = \Omega \times \hat{\Omega}$ , die von dem Erzeugendensystem  $\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_\infty, A_2 \in \hat{\mathcal{F}}\}$  erzeugt wird, heißt Produkt- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}_\infty \otimes \hat{\mathcal{F}}$  auf  $\Omega'$ . Der messbare Raum  $(\Omega \times \hat{\Omega}, \mathcal{F}_\infty \otimes \hat{\mathcal{F}})$  heißt Produktraum.

Um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega', \mathcal{F}')$  mit  $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{C})$  zu definieren, kann ein möglicher Kandidat zunächst auf dem einfacher zu handhabenden Erzeugendensystem  $\mathcal{C} = \{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{F}_\infty, A_2 \in \hat{\mathcal{F}}\}$  mit einer offensichtlichen Funktion festgelegt (Prämaß auf  $\mathcal{C}$ ) und anschließend auf  $\sigma(\mathcal{C})$  erweitert werden. Sofern das Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, ist es aufgrund der Durchschnittsstabilität von  $\mathcal{C}$  eindeutig. Eine nahe liegende Wahl stellt das Produktmaß dar:

**Satz 5-1 (Produktmaß):** Seien  $(\Omega, \mathbb{F}, Q)$  und  $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{Q})$  zwei Wahrscheinlichkeitsräume, dann gibt es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q'$  auf  $(\Omega \times \hat{\Omega}, \mathcal{F}_\infty \otimes \hat{\mathcal{F}})$ , so dass  $Q'(A_1 \times A_2) = Q(A_1) \cdot \hat{Q}(A_2) \quad \forall \quad A_1 \in \mathcal{F}_\infty, A_2 \in \hat{\mathcal{F}}$ . Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q'$  heißt das Produktmaß von  $Q$  und  $\hat{Q}$  und wird mit  $Q' = Q \otimes \hat{Q}$  bezeichnet.

Beweis:

*W. König (2003, S. 52 f.).*

Die Konstruktion des Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega', \mathcal{F}', Q') = (\Omega \times \hat{\Omega}, \mathcal{F}_\infty \otimes \hat{\mathcal{F}}, Q \otimes \hat{Q})$  wird in der Literatur<sup>881</sup> auch als *Kanonische Konstruktion* bezeichnet.<sup>882</sup> Mit  $A_2 = \hat{\Omega} \in \hat{\mathcal{F}}$

<sup>878</sup> Z. T. wird „ $\cap$ -stabil“ geschrieben. Vgl. H. Bauer (1992), Maß- und Integrationstheorie, S. 9.

<sup>879</sup> Für ein anschauliches Beispiel siehe Anlage 14.

<sup>880</sup> Vgl. W. König (2003), Stochastik I (Skriptum), S. 50. Vgl. auch I. Rana (2002), Measure and integration, S. 237-241.

<sup>881</sup> Vgl. stellvertretend T. Bielecki, M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2004), Modeling and valuation of credit risk, S. 51 f. u. S. 81.

<sup>882</sup> Alternativ findet auch die Schreibweise  $(\Omega', \mathcal{F}', Q') = (\Omega, \mathcal{F}_\infty, Q) \otimes (\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{Q})$  Anwendung. Vgl. H. Bauer (1978), Wahrscheinlichkeits- und Maßtheorie, S. 130 f.

in Satz 5-1 und  $\hat{Q}(\hat{\Omega})=1$  folgt  $Q'(A_1 \times \hat{\Omega})=Q(A_1)$  für jedes  $A_1 \in \mathcal{F}_\infty$ . Damit fällt die Beschränkung des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q'$  auf das  $\sigma$ -Feld  $\mathcal{F}_\infty$  mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  zusammen.<sup>883</sup> Dasselbe Argument gilt für die Beschränkung des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q$  auf das  $\sigma$ -Feld  $\hat{\mathcal{F}}$ . Damit können Zufallsexperimente in den beiden (separaten) Wahrscheinlichkeitsräumen nicht nur ohne Informationsverlust, sondern auch mit intuitiv sofort ersichtlichen Wahrscheinlichkeiten im erweiterten (gemeinsamen) Wahrscheinlichkeitsraum beschrieben werden. Diese Eigenschaft der kanonischen Konstruktion ist darüber hinaus maßgeblich dafür verantwortlich, dass – wie eingangs gefordert – Martingale im ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraum ihre wesensbestimmenden Eigenschaften unter der Wahrscheinlichkeitsraumerweiterung nicht verlieren:

**Satz 5-2 (Martingalinvarianz):** Seien  $(\Omega, \mathbb{F}, Q)$  und  $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{F}}, \hat{Q})$  zwei Wahrscheinlichkeitsräume. Sei weiterhin  $M_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ein Martingal auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{F}, Q)$ . Dann ist  $M'_t : \Omega \times \hat{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  mit dem Schnitt  $(M'_t(w, \hat{w}))_{\hat{w}}(w) = M_t(w)$  auch im Produktraum  $(\Omega', \mathcal{F}', Q') = (\Omega \times \hat{\Omega}, \mathcal{F}_\infty \otimes \hat{\mathcal{F}}, Q \otimes \hat{Q})$  ein Martingal.

Beweis:

*Als Voraussetzung lässt sich zunächst formulieren:*<sup>884</sup>

$$E^Q(M_t | \mathcal{F}_s) = M_s \quad \text{mit } s \leq t. \quad (5.31)$$

*Auf (5.31) ist das Partial Averaging Theorem<sup>885</sup> anzuwenden. Für alle  $A \in \mathcal{F}_s$  gilt:*

$$\begin{aligned} \int_A E^Q(M_t | \mathcal{F}_s)(w) dQ(w) &= \int_{\Omega} 1_{\{A\}} E^Q(M_t | \mathcal{F}_s)(w) dQ(w) \\ &= E^Q(1_{\{A\}} E^Q(M_t | \mathcal{F}_s)) \\ &= E^Q(E^Q(1_{\{A\}} M_t | \mathcal{F}_s)) \\ &= \int_{\Omega} 1_{\{A\}} M_t(w) dQ(w) \\ &= \int_A M_t(w) dQ(w). \end{aligned} \quad (5.32)$$

*In analoger Weise gilt das Partial Averaging Theorem bzgl. des bedingten Erwartungswertes im erweiterten Wahrscheinlichkeitsraum:*

<sup>883</sup> Vgl. T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 229.

<sup>884</sup> Vgl. zur Definition von (zeit-stetigen) Martingalen S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 120-122. Der vorliegende Beweis konzentriert sich insbesondere auf Punkt (3) der Definition auf S. 121.

<sup>885</sup> Vgl. S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 68, Definition 2.3.1.

$$\begin{aligned}
& \int_{A \times \hat{A}} E^{\mathcal{Q}'}(M'_t | \mathcal{F}_s \otimes \hat{\mathcal{F}})(w, \hat{w}) dQ'(w, \hat{w}) \\
&= \int_{\Omega \times \hat{\Omega}} 1_{\{A \times \hat{A}\}} E^{\mathcal{Q}'}(M'_t | \mathcal{F}_s \otimes \hat{\mathcal{F}})(w, \hat{w}) dQ'(w, \hat{w}) \\
&= E^{\mathcal{Q}'} \left( 1_{\{A \times \hat{A}\}} E^{\mathcal{Q}'}(M'_t | \mathcal{F}_s \otimes \hat{\mathcal{F}}) \right) = E^{\mathcal{Q}'} \left( E^{\mathcal{Q}'} \left( 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_t | \mathcal{F}_s \otimes \hat{\mathcal{F}} \right) \right) \\
&= \int_{\Omega \times \hat{\Omega}} 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_t(w, \hat{w}) dQ'(w, \hat{w}) = \int_{A \times \hat{A}} M'_t(w, \hat{w}) dQ'(w, \hat{w}).
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Mit dem Satz von FUBINI<sup>886</sup> kann für (5.33) geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega \times \hat{\Omega}} 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_t(w, \hat{w}) d(Q(w) \otimes \hat{Q}(w)) \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \left( \int_{\Omega} 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_t(w, \hat{w}) dQ(w) \right)_{\hat{w}} d\hat{Q}(\hat{w}).
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Der Schnitt der Indikatorfunktion ist:

$$\left( 1_{\{A \times \hat{A}\}} \right)_{\hat{w}}(w) = \begin{cases} 1_{\{A\}} & \forall \hat{w} \in \hat{A}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.35}$$

Damit erhält man für (5.34):

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega \times \hat{\Omega}} 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_t(w, \hat{w}) d(Q(w) \otimes \hat{Q}(w)) \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \left( \int_{\Omega} 1_{\{A\}} 1_{\{\hat{A}\}} M'_t(w) dQ(w) \right) d\hat{Q}(\hat{w}).
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Durch Vereinfachungen i. V. m. dem Partial Averaging gem. (5.32) folgt:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega \times \hat{\Omega}} 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_t(w, \hat{w}) d(Q(w) \otimes \hat{Q}(w)) \\
&= \int_{\hat{\Omega}} 1_{\{\hat{A}\}} \left( \int_{\Omega} 1_{\{A\}} M'_t(w) dQ(w) \right) d\hat{Q}(\hat{w}) = \int_{\hat{\Omega}} 1_{\{\hat{A}\}} \left( \int_A M'_t(w) dQ(w) \right) d\hat{Q}(\hat{w}) \\
&= \hat{Q}(\hat{A}) \int_A M'_t(w) dQ(w) = \hat{Q}(\hat{A}) \int_A E^{\mathcal{Q}}(M'_t | \mathcal{F}_s)(w) dQ(w).
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Durch Einsetzen der Voraussetzung (5.31) in (5.37) ergibt sich:

$$\int_{\Omega \times \hat{\Omega}} 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_t(w, \hat{w}) d(Q(w) \otimes \hat{Q}(w)) = \hat{Q}(\hat{A}) \int_A M_s(w) dQ(w). \tag{5.38}$$

<sup>886</sup> Vgl. G. Fubini (1958), Sugli integrali multipli, S. 243-249; I. Rana (2002), Measure and integration, S. 239 f., Theorem 7.5.5.

Auf (5.38) ist erneut das Theorem von FUBINI, jedoch in umgekehrter Vorgehensweise, anzuwenden:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}(\hat{A}) \int_A M_s(w) dQ(w) &= \int_{\hat{\Omega}} \left( \int_{\Omega} 1_{\{\hat{A}\}} 1_{\{A\}} M_s(w) dQ(w) \right) d\hat{Q}(\hat{w}) \\
&= \int_{\hat{\Omega}} \left( \int_{\Omega} \left( 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_s(w, \hat{w}) \right)_{\hat{w}}(w) dQ(w) \right) d\hat{Q}(\hat{w}) \\
&= \int_{\Omega \times \hat{\Omega}} 1_{\{A \times \hat{A}\}} M'_s(w, \hat{w}) d(Q(w) \otimes \hat{Q}(\hat{w})) \\
&= \int_{A \times \hat{A}} M'_s(w, \hat{w}) d(Q(w) \otimes \hat{Q}(\hat{w})).
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Aus (5.33), (5.38) und (5.39) folgt abschließend die Behauptung:

$$E^Q \left( M'_t | \mathcal{F}_s \otimes \hat{\mathcal{F}} \right) = M'_s. \tag{5.40}$$

Auf dem Produktraum  $(\Omega', \mathcal{F}', Q')$  lassen sich nun zufällige, kreditbezogene Ereigniszeiten definieren. Dazu unterstütze der Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{F}, Q)$  kreditweise die Prozesse  $\Gamma_{i,t}$  für alle  $t \geq 0$  so, dass diese für zu  $\mathbb{F}$  adaptierte, stets positive Prozesse  $\gamma_{i,t}$  durch das Integral

$$\Gamma_{i,t} = \int_0^t \gamma_i(u) du \quad \forall \quad t \geq 0 \tag{5.41}$$

beschrieben werden können. Für  $t=0$  gilt  $\Gamma_{i,0} = 0$ . Darüber hinaus sei  $\Gamma_{i,\infty}$  durch  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Gamma_i(t) = \infty$  definiert. Wegen  $\gamma_{i,t} > 0$  ist  $\Gamma_{i,t}$  streng monoton wachsend.

Wird  $\mathbb{F}$  durch eine BROWNSche Bewegung erzeugt, kann  $\gamma_{i,t}$  als ITÔ-Prozess modelliert werden.<sup>887</sup> In den weiteren Abschnitten wird jedoch  $\gamma_{i,t}$  und demzufolge auch  $\Gamma_{i,t}$  in Abhängigkeit eines Parameters  $\Psi$  in deterministischer Beziehung zur Zeit stehen.

Zur modelltheoretischen Betrachtung von Kreditereignissen und Ereigniszeiten werden – in allgemeiner Weise fortfahrend – Zufallsvariablen  $\tau_i$  auf dem Produktraum  $(\Omega', \mathcal{F}', Q')$  wie folgt definiert:

**Definition 5-2 (Ereigniszeit):**

$$\tau_i(w, \hat{w}) = \inf \{ t \geq 0 : \Gamma_{i,t}(w) \geq -\ln U_i(\hat{w}) \}. \tag{5.42}$$

<sup>887</sup> Vgl. bspw. T. Bielecki, M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2004), Modeling and valuation of credit risk, S. 55-58.

Gleichung (5.42) erlaubt eine einfache Interpretation. Unter Verwendung der Exponentialfunktion kann  $\exp(-\Gamma_{i,t})$  als Countdown-Prozess<sup>888</sup> betrachtet werden. Das Ereignis tritt ein, wenn der Countdown-Prozess – beginnend mit dem Wert eins in  $t_0$  – die Ausprägung der Zufallsvariablen  $U_i$  trifft. Damit fungiert  $U_i$  als zufällige Schranke. Der Wert von  $U_i$  bleibt den Investoren verborgen und wird erst im Moment des Ereigniseintritts offenbart.<sup>889</sup> Mit (5.41) wird die Geschwindigkeit des Countdown-Prozesses und somit die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens von  $\exp(-\Gamma_{i,t})$  mit  $U_i$  durch die Funktion  $\gamma_{i,t}$  gesteuert.

Der Prozess  $\Gamma_{i,t}$  ist damit wesensbestimmend für die Verteilung der Ereigniszeit  $\tau_i$ . Bedingt auf das  $\sigma$ -Feld  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \subset \mathcal{F}'$  sei die folgende Verteilungsfunktion betrachtet:

$$F_{\tau_i}(t) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} = Q'(\tau_i \leq t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)}) \quad \forall \quad t \geq 0. \quad (5.43)$$

Mit dem Ziel, die (bedingte) Verteilungsfunktion (5.43) mit Hilfe des Prozesses  $\Gamma_{i,t}$  auszudrücken, lässt sich zunächst schreiben:

$$1 - F_{\tau_i}(t) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} = Q'(\tau_i > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)}) = E_{Q'}(1_{\{\tau_i > t\}} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)}). \quad (5.44)$$

Unter Verwendung des Gesetzes des iterierten Erwartungswertes<sup>891</sup> gilt:

$$\begin{aligned} E_{Q'}(1_{\{\tau_i > t\}} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)}) &= E_{Q'}(E_{Q'}(1_{\{\tau_i > t\}} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)}) \\ &= E_{Q'}(Q'(\tau_i > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)}). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Berücksichtigt man, dass

$$\{(w, \hat{w}) : \tau_i(w, \hat{w}) > t\} = \{(w, \hat{w}) : U_i(\hat{w}) < e^{-\Gamma_{i,t}(w)}\}, \quad (5.46)$$

erhält man:

$$Q'(\tau_i > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)}) = Q'(U_i < e^{-\Gamma_{i,t}} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)}). \quad (5.47)$$

<sup>888</sup> Zum Begriff des Countdown-Prozesses siehe P. Schönbucher und D. Schubert (2001), Copula-dependent default risk, S. 13.

<sup>889</sup> Simulationstechnisch lässt sich die Ereigniszeit bestimmen, indem eine Ausprägung der Zufallsvariablen  $U_i$  gezogen, der Countdownprozess  $\exp(-\Gamma_{i,t}^\Psi)$  simuliert und der Zeitpunkt des Zusammentreffens  $\tau_{FP,i}^\Psi$  bestimmt wird. Vgl. ebenda, S. 13.

<sup>890</sup> Alternativ bedingen T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 228 f. auf das  $\sigma$ -Feld  $\mathcal{F}_t$  anstelle des  $\sigma$ -Feldes  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$ . Nachteilig an dieser Vorgehensweise ist, dass  $\mathcal{F}_t$  keine Teilmenge des erweiterten  $\sigma$ -Feldes  $\mathcal{F}'$  ist. Letztlich ist jedoch mit Blick auf die Definition des bedingten Erwartungswertes die Zufallsvariable  $E_{Q'}(1_{\{\tau_i > t\}} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)})$  (vgl. (5.44)) sowohl bezüglich  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$  als auch bezüglich  $\mathcal{F}_t$  messbar. Für eine Illustration vgl. Anlage 14. Zur Definition des bedingten Erwartungswertes siehe S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 68, Definition 2.3.1.

<sup>891</sup> Vgl. Fn. 865.

Da der Prozess  $\Gamma_{i,t}$  bezüglich des  $\sigma$ -Feldes  $\mathcal{F}_\infty$  und dementsprechend bezüglich des  $\sigma$ -Feldes  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)$  messbar ist, kann das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q'$  auf das  $\sigma$ -Feld  $\hat{\mathcal{F}}$  beschränkt werden. Gemäß den obigen Ausführungen, ist das auf  $\hat{\mathcal{F}}$  beschränkte Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q'$  identisch mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\hat{Q}$ . Mit der Gleichverteilung von  $U_i$  unter  $\hat{Q}$  gilt:

$$Q'(U_i < e^{-\Gamma_{i,t}} | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)) = \hat{Q}(U_i < e^{-\Gamma_{i,t}}) = e^{-\Gamma_{i,t}}. \quad (5.48)$$

Setzt man sukzessive die Gleichungen (5.48) in (5.47), (5.47) in (5.45) und (5.45) in (5.44) ein, folgt:

$$F_{\tau_i}(t) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) = 1 - e^{-\Gamma_{i,t}}. \quad (5.49)$$

Stochastische Prozesse, die zur (bedingten) Verteilungsfunktion (5.43) in definitorischer Beziehung gem. (5.49) stehen, sind in der Literatur einschlägig bekannt:<sup>893</sup>

**Definition 5-3 (Hazard-Prozess):** Ein Prozess  $\Gamma_{i,t}$ , welcher definiert ist durch  $\Gamma_{i,t} = -\ln(1 - F_{\tau_i}(t) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t))$  mit  $F_{\tau_i}(t) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) = Q'(\tau_i \leq t | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)) < 1$ , heißt  $\xi_1^{-1}(\mathbb{F})$ -Hazard-Prozess von  $\tau_i$ .

Für den Zeitpunkt  $t_0=0$  folgt wegen  $\Gamma_{i,t_0=0} = 0$  sofort  $F_{\tau_i}(0) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_0) = 0$ . Zudem ist die bedingte Verteilungsfunktion  $F_{\tau_i}(t) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$  streng monoton wachsend, da der Countdown-Prozess  $\exp(-\Gamma_{i,t})$  mit (5.41) wegen  $\gamma_{i,t} > 0$  streng monoton fällt.<sup>894</sup>

### 5213 Konkretisierung des um ausfallrisikobehaftete Zahlungsansprüche erweiterten Marktes durch das semi-analytische Modell

Betrachtet wird ein Risikohorizont  $t_H$  mit  $t_H=T^*$ . Für einen Kredit  $i$  mit einer Restlaufzeit  $T_i$  sei zunächst willkürlich eine stetige, streng monoton wachsende Zeittransformation  $g_i(t)$  mit  $g_i(0)=0$  und eine Ausfallschranke  $K_i < 0$  gegeben. Der Einfachheit halber sei sichergestellt, dass der Risikohorizont  $t_H$  von der Zeittransformation unberührt bleibt.<sup>895</sup> Formal soll also  $g_i(t_H)=t_H$  gelten. Betrachtet sei ein beliebiger Zeitpunkt  $t_A$  mit  $t_A \in (0, t_H]$ . In Abhängigkeit des Parameters  $\Psi$  sei in Anlehnung an (3.106) unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t)$  die – durch Grenzwertbetrachtung in Analogie zu (3.102) verstetigte – Ereignisdichte für alle  $t \in (0, t_A]$  mit  $\rho_i \neq 1$  und  $t_A \leq T_i$  auf  $(\Omega', \mathcal{F}', Q')$  wie folgt gegeben:

<sup>892</sup> Vgl. T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 228.

<sup>893</sup> Vgl. M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2000), Default risk: Mathematical tools, S. 18.

<sup>894</sup> Damit ist auch  $F_{\tau_{FP,i}}(t)$  streng monoton wachsend und mit Blick auf die Zeittransformation ist die Gleichung (3.26) umkehrbar. Vgl. zu dieser Problematik auch die Fn. 505.

<sup>895</sup> Vgl. Gleichung (3.32) sowie die damit in Verbindung stehenden Ausführungen.

$$Q'(\tau_{FP,i}^\Psi \in dt | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)) = \quad (5.50)$$

$$\begin{cases} \frac{-K_i \sqrt{g_{i,t_A}}}{\sqrt{2\pi g_{i,t}^3 (g_{i,t_A} - g_{i,t} \rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i g_{i,t_A} \psi})^2}{(g_{i,t_A} - g_{i,t})} - \frac{K_i^2}{g_{i,t}} + \frac{(g_{i,t} \sqrt{\rho_i (1-\rho_i)} \psi - K_i \sqrt{g_{i,t_A} (1-\rho_i)})^2}{(g_{i,t_A} - g_{i,t})(g_{i,t_A} - g_{i,t} \rho_i)} \right)} dg_i(t) & \text{für } 0 < t < t_A, \\ \frac{-K_i}{\sqrt{2\pi g_{i,t_A}^3 (1-\rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i g_{i,t_A} \psi})^2}{g_{i,t_A} (\rho_i - 1)} \right)} dg_i(t) & \text{für } t = t_A. \end{cases}$$

Analog zu den Gleichungen (3.103) und (3.111) ist die Ereignisdichte (5.50) über  $t$  zu integrieren, um die Ereigniswahrscheinlichkeit  $Q'(\tau_{FP,i}^\Psi \leq t | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t))$  für den Zeitraum  $(0, t]$  mit  $t \in (0, t_A]$  zu erhalten.

Betrachtet man für den Kredit  $i$  in Abhängigkeit des Parameters  $\Psi$  die zur Ereigniszeit  $\tau_{FP,i}^\Psi$  gehörige bedingte Verteilungsfunktion  $F_{\tau_{FP,i}^\Psi, i}^\Psi(t) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$  und setzt:

$$F_{\tau_{FP,i}^\Psi, i}^\Psi(t) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) = Q'(\tau_{FP,i}^\Psi \leq t | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)) = 1 - e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi}, \quad (5.51)$$

dann wird dadurch zur Ereigniszeit  $\tau_{FP,i}^\Psi$  ein  $\Psi$ -spezifischer  $\xi_1^{-1}(\mathbb{F})$ -Hazard-Prozess  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  definiert. Durch Umkehrung von (5.51) konkretisiert sich  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  auf  $(0, t_A]$  wie folgt:

$$\Gamma_{i,t}^\Psi = -\ln \left( 1 - \int_0^{g_{i,t}} \frac{-K_i \sqrt{g_{i,t_A}}}{\sqrt{2\pi s^3 (g_{i,t_A} - s \rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i g_{i,t_A} \psi})^2}{(g_{i,t_A} - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s \sqrt{\rho_i (1-\rho_i)} \psi - K_i \sqrt{g_{i,t_A} (1-\rho_i)})^2}{(g_{i,t_A} - s)(g_{i,t_A} - s \rho_i)} \right)} \cdot ds \right). \quad (5.52)$$

Für  $t_A$  ist über die verstetigte Ereignisdichte (5.50) zu integrieren.<sup>896</sup> Alternativ lässt sich  $\Gamma_{i,t_A}^\Psi$  mit Hilfe von  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  nach (5.52) in Form eines Grenzwertes schreiben:

$$\Gamma_{i,t_A}^\Psi = \lim_{t \rightarrow t_A} \Gamma_{i,t}^\Psi. \quad (5.53)$$

Da  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  deterministisch definiert wurde, fällt  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  mit der Hazard-Funktion  $-\ln(1 - F_{\tau_{FP,i}^\Psi, i}^\Psi(t))$  zusammen. Unter Berücksichtigung der Zeittransformation  $g_i(t)$  lässt sich durch Ableitung der  $\Psi$ -spezifischen Hazard-Funktion  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  die  $\Psi$ -spezifische Hazard Rate-Funktion  $\gamma_{i,t}^\Psi$  auf  $(0, t_A]$  wie folgt schreiben.<sup>897</sup>

$$\gamma_{i,t}^\Psi(t) = \frac{f_{W_i|\Psi}(g_{i,t})}{1 - \int_0^{g_{i,t}} f_{W_i|\Psi}(s) \cdot ds} \cdot \frac{dg_{i,t}}{dt}. \quad (5.54)$$

<sup>896</sup> Über den Analysezeitpunkt  $t_A$  hinaus lassen sich alle Prozesse  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  in konstanter Form fortführen.

<sup>897</sup> Vgl. dabei zur Problematik von variablen Integrationsgrenzen H. Heuser (2003), Analysis, S. 479.

Die Definition der  $\Psi$ -spezifischen Hazard-Funktion  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  bzw. der  $\Psi$ -spezifischen Hazard Rate-Funktion  $\gamma_{i,t}^\Psi$  ist an die obige Betrachtung zeittransformierter Prozesse  $Y_{i,t}$  bei zeitkonstanten Ausfallsschranken  $K_i$  zu verknüpfen, wobei die zeittransformierten Prozesse mit Hilfe des einfachen Faktoransatzes modelliert werden. Sämtliche Überlegungen sind jedoch in die risikoneutrale Welt zu übertragen. Die Ereigniszeiten  $\tau_{FP,i}^\Psi$  können – bereits an der gewählten Notation zu erkennen – intuitiv als Passagezeiten der zeittransformierten Prozesse  $Y_{i,t}$  verstanden werden. Der hier verwendete Parameter  $\Psi$  ist in der obigen Betrachtung in der Form eines Endpunktes der BROWNSchen Faktorbrücke  $X_{\psi,t}$  wieder zu finden. Den dortigen Analysen folgend, sind die Ereignis-Zeiten  $\tau_{FP,i}^\Psi$  approximativ unabhängig voneinander. Deshalb kann mit Blick auf die Definition der Ereignis-Zeiten  $\tau_{FP,i}^\Psi$  gem. Definition 5-2 approximativ ein Wahrscheinlichkeitsmaß  $\hat{Q}$  verwendet werden, unter dem die gleichverteilten Zufallsvariablen  $U_i$  unabhängig<sup>898</sup> voneinander sind:

$$\hat{Q}(U_1 \leq u_1, \dots, U_N \leq u_N) = \hat{Q}(U_1 \leq u_1) \cdot \dots \cdot \hat{Q}(U_N \leq u_N). \quad (5.55)$$

Die gemeinsame faktorbedingte Überlebenswahrscheinlichkeit für den Zeitraum  $(0, t]$  mit  $t \in (0, t_A]$  lässt sich in diesem Fall als Summe der Hazard-Funktionswerte  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  bestimmen:<sup>900</sup>

$$\begin{aligned} Q'(\tau_{FP,1}^\Psi > t, \dots, \tau_{FP,N}^\Psi > t | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)) &= E_{Q'}\left(1_{\{\tau_{FP,1}^\Psi > t, \dots, \tau_{FP,N}^\Psi > t\}} | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)\right) \quad (5.56) \\ &= E_{Q'}\left(E_{Q'}\left(1_{\{\tau_{FP,1}^\Psi > t, \dots, \tau_{FP,N}^\Psi > t\}} | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)\right) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)\right) \\ &= E_{Q'}\left(Q'(\tau_{FP,1}^\Psi > t, \dots, \tau_{FP,N}^\Psi > t | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)\right) \\ &= E_{Q'}\left(Q'(U_1 < e^{-\Gamma_{1,t}^\Psi}, \dots, U_N < e^{-\Gamma_{N,t}^\Psi} | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty)) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)\right) \\ &= E_{Q'}\left(\hat{Q}(U_1 < e^{-\Gamma_{1,t}^\Psi}, \dots, U_N < e^{-\Gamma_{N,t}^\Psi}) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)\right) \\ &= E_{Q'}\left(\prod_{i=1}^N \hat{Q}(U_i < e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi}) | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)\right) \\ &= E_{Q'}\left(\prod_{i=1}^N e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi} | \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)\right) \\ &= e^{-\sum_{i=1}^N \Gamma_{i,t}^\Psi}. \end{aligned}$$

<sup>898</sup> Die gleichverteilten Zufallsvariablen  $U_i$  können grundsätzlich abhängig gestaltet werden. Vgl. dazu im Rahmen von intensitätsratenbasierten Kreditrisikomodellen P. Schönbucher und D. Schubert (2001), Copula-dependent default risk, S. 17-22.

<sup>899</sup> Multivariate Verteilungen mit uniformen Rändern werden in der Literatur als Copulas bezeichnet. Die Zufallsvariablen  $U_i$  folgen im hier verwendeten Modellsetup der sog. Produktcopula *II*. Vgl. einführend R. Nelson (1999), Copulas, S. 5-44. Siehe auch B. Schweizer und A. Sklar (1983), Probabilistic Metric Spaces, S. 78-95.

<sup>900</sup> Alle Hazard-Funktionen sind aufgrund ihrer deterministischen Definition bezüglich des trivialen  $\sigma$ -Feldes  $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \Omega)$  und somit bezüglich des  $\sigma$ -Feldes  $\mathcal{F}_t$  messbar. Das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q'$  kann folglich auf das  $\sigma$ -Feld  $\hat{\mathcal{F}}$  beschränkt werden.

Wird der Parameter  $\Psi$  als latenter Faktor, d. h. nicht als Parameter oder  $\mathcal{F}_\infty$ -messbare Zufallsvariable verstanden, ist technisch gesehen der Produktraum  $(\Omega', \mathcal{F}', Q')$  zunächst zu erweitern. Sei  $\Psi$  auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{Q})$  mit  $\tilde{\mathcal{F}} = \sigma(\Psi)$  so definiert, dass  $\Psi$  der Standardnormalverteilung unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\tilde{Q}$  folgt. Dann kann zur Erweiterung von  $(\Omega', \mathcal{F}', Q')$  abermals auf die kanonische Konstruktion zurückgegriffen und  $(\Omega'', \mathcal{F}'', Q'')$  als  $(\Omega \times \hat{\Omega} \times \tilde{\Omega}, \mathcal{F}_\infty \otimes \hat{\mathcal{F}} \otimes \tilde{\mathcal{F}}, Q \otimes \hat{Q} \otimes \tilde{Q})$  definiert werden. In Analogie zu (5.27) seien die folgenden Abbildungen definiert:

$$\begin{aligned}\xi_1 &: \Omega \times \hat{\Omega} \times \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega, \\ \xi_2 &: \Omega \times \hat{\Omega} \times \tilde{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}, \\ \xi_3 &: \Omega \times \hat{\Omega} \times \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega}.\end{aligned}\tag{5.57}$$

Martingale im ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathbb{F}, Q)$  behalten ihre wesensbestimmenden Eigenschaften unter der Wahrscheinlichkeitsraumerweiterung. Darüber hinaus ist  $\Psi$  mit den besonderen Eigenschaften des Produktraums auch unter  $Q''$  standardnormalverteilt.

Auf dem Produktraum  $(\Omega'', \mathcal{F}'', Q'')$  lassen sich ganz analog zu Definition 5-2 Ereigniszeiten  $\tau_{FP,i}$  definieren:

$$\{(w, \hat{w}, \tilde{w}) : \tau_{FP,i}(w, \hat{w}, \tilde{w}) > t\} = \{(w, \hat{w}, \tilde{w}) : U_i(\hat{w}) < e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi(w, \tilde{w})}\}.\tag{5.58}$$

Der  $\Psi$ -spezifische Hazard-Prozess  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  ist demgemäß auf der Basis der erweiterten Filtration  $\xi_1^{-1}(\mathbb{F}) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))$  zu definieren. Bedingt auf das  $\sigma$ -Feld  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))$  sei dazu die folgende Verteilungsfunktion betrachtet:

$$F_{\tau_{FP,i}}(t) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} = Q''(\tau_{FP,i} \leq t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))}).\tag{5.59}$$

Analog zur obigen Vorgehensweise kann über die Indikatorfunktion  $1_{\{\tau_{FP,i} \leq t\}}$  mit Hilfe des Gesetzes des iterierten Erwartungswertes die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $\{\tau_{FP,i} > t\}$ , respektive des Ereignisses  $\{U_i < e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi}\}$ , bedingt auf das  $\sigma$ -Feld  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))$  bestimmt werden. Da der Hazard-Prozess  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  bezüglich des  $\sigma$ -Feldes  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))$  messbar ist, kann das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q''$  auf das  $\sigma$ -Feld  $\hat{\mathcal{F}}$  beschränkt werden. Analog zu den obigen Ausführungen, ist das auf  $\hat{\mathcal{F}}$  beschränkte Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q''$  identisch mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\hat{Q}$ . Mit der Gleichverteilung von  $U_i$  unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\hat{Q}$  gilt:

$$\begin{aligned}
& 1 - F_{\tau_{FP,i}}(t) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \\
&= Q''(\tau_{FP,i} > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))}) \\
&= E_{Q''} \left( Q''(\tau_{FP,i} > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \right) \\
&= E_{Q''} \left( Q''(U_i < e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \right) \\
&= E_{Q''} \left( \hat{Q}(U_i < e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \right) \\
&= e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi}.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Auch für die Unabhängigkeit der Ereigniszeiten ist auf die erweiterte Filtration  $\xi_1^{-1}(\mathbb{F}) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))$  als Bedingung abzustellen:<sup>901</sup>

$$\begin{aligned}
& Q''(\tau_{FP,1} > t, \dots, \tau_{FP,N} > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))}) \\
&= E_{Q''} \left( Q''(\tau_{FP,1} > t, \dots, \tau_{FP,N} > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \right) \\
&= E_{Q''} \left( Q''(U_1 < e^{-\Gamma_{1,t}^\Psi}, \dots, U_N < e^{-\Gamma_{N,t}^\Psi} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_\infty) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \right) \\
&= E_{Q''} \left( \hat{Q}(U_1 < e^{-\Gamma_{1,t}^\Psi}, \dots, U_N < e^{-\Gamma_{N,t}^\Psi}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \right) \\
&= E_{Q''} \left( \prod_{i=1}^N \hat{Q}(U_i < e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \right) \\
&= E_{Q''} \left( \prod_{i=1}^N e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))} \right) \\
&= e^{-\sum_{i=1}^N \Gamma_{i,t}^\Psi}.
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Wird die Stochastik des latenten Faktors  $\Psi$  explizit berücksichtigt, lässt sich, bedingt auf das  $\sigma$ -Feld  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$ , die folgende Verteilungsfunktion betrachten und mit dem Gesetz des iterierten Erwartungswertes wegen  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \subset \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))$  schreiben:

$$\begin{aligned}
1 - F_{\tau_{FP,i}}(t) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} &= Q''(\tau_{FP,i} > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)}) \\
&= E_{Q''} \left( Q''(\tau_{FP,i} > t \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \vee \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))}) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} \right) \\
&= E_{Q''} \left( e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi} \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} \right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Gamma_{i,t}^\Psi} \cdot f_{SN}(u) \cdot du.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

<sup>901</sup> Die Unabhängigkeit von Ausfallereignissen unter der Bedingung einer erweiterten Referenzfiltration  $\mathbb{F}$  findet sich auch im Modellansatz von J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 3 f. Die dort verwendeten Ausfallwahrscheinlichkeiten basieren jedoch auf dem einfachen Unternehmenswertmodell nach MERTON.

Das dritte Gleichheitszeichen folgt aus (5.60). Da der latente Faktor  $\Psi$  in (5.60) nicht bezüglich des  $\sigma$ -Feldes  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$  messbar und unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  standardnormalverteilt ist, folgt die entsprechende Integration. Setzt man in Analogie zu Definition 5-3:

$$1 - F_{\tau_{FP,i}}(t) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} = e^{-H_{i,t}}, \quad (5.63)$$

dann wird dadurch zur Ereigniszeit  $\tau_{FP,i}$  der Hazard-Prozess  $H_{i,t}$  bezüglich der Filtration  $\xi_1^{-1}(\mathbb{F})$  definiert. Durch Gleichsetzen von (5.62) und (5.63) stehen  $H_{i,t}$  und  $\Gamma_{i,t_A}^\Psi$  wie folgt zueinander in Beziehung:

$$e^{-H_{i,t}} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Gamma_{i,t}^u} \cdot f_{SN}(u) \cdot du. \quad (5.64)$$

Im vorliegenden Modellumfeld ist mit  $\Gamma_{i,t_A}^\Psi$  auch  $H_{i,t}$  deterministisch. Damit fällt auch  $H_{i,t}$  in Analogie zu  $\Gamma_{i,t_A}^\Psi$  mit der entsprechenden Hazard-Funktion zusammen. Mit (5.54) lässt sich darüber hinaus die  $\Psi$ -spezifische Hazard Rate-Funktion  $\gamma_{i,t}^\Psi$  in Beziehung zur Hazard Rate-Funktion  $h_{i,t} = dH_{i,t}/dt$  setzen. Der Begriff der Hazard Rate-Funktion ist dabei im Gegensatz zum Kapitel 3 im Rahmen der risikoneutralen Welt zur Finanztitelbewertung zu sehen und folglich von den zuvor verwendeten Credit Curves abzugrenzen.<sup>902</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ e^{-H_{i,t}} \right] &= \frac{d}{dt} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Gamma_{i,t}^u} \cdot f_{SN}(u) \cdot du \right] \\ \Leftrightarrow -e^{-H_{i,t}} \cdot \frac{dH_{i,t}}{dt} &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\Gamma_{i,t}^u} \cdot \frac{d\Gamma_{i,t}^u}{dt} \cdot f_{SN}(u) \cdot du \\ \Leftrightarrow -e^{-H_{i,t}} \cdot h_{i,t} &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\Gamma_{i,t}^u} \cdot \gamma_{i,t}^u \cdot f_{SN}(u) \cdot du. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Im weiteren Verlauf wird die Hazard Rate-Funktion  $h_{i,t}$  unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  anhand von Marktdaten zu kalibrieren sein. Dann lässt sich mit Hilfe von (3.26) die Zeittransformation  $g_i(t)$  unter  $Q$  bestimmen. Damit ist jederzeit die  $\Psi$ -spezifische Hazard-Funktion  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  mit (5.52) und (5.53) in Abhängigkeit des Analysezeitpunktes  $t_A$  definiert. Unabhängig vom gewählten Analysezeitpunkt stehen die  $\Psi$ -spezifische Hazard-Funktion  $\Gamma_{i,t}^\Psi$  und die Hazard-Funktion  $H_{i,t}$  stets über (5.64) miteinander in Beziehung. Mit (5.54) und (5.65) gilt dies ebenso für die Hazard Rate-Funktionen  $\gamma_{i,t}^\Psi$  und  $h_{i,t}$ .

<sup>902</sup> Die Tatsache, dass  $H_{i,t}$  und  $h_{i,t}$  deterministisch sind, überrascht kaum. Schließlich wurde bereits im Rahmen der Modellentwicklung in Kapitel 3 – dort jedoch unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß – auf deterministische Hazard Rate-Funktionen, d. h. ratingabhängige Credit Curves vom Typ A, B und C, abgestellt.

Die Kalibrierung der Hazard Rate Funktion  $h_{i,t}$  kann anhand von ausfallrisikobehafteten Zahlungsansprüchen oder anhand von Derivaten auf ausfallrisikobehaftete Zahlungsansprüche vorgenommen werden. Ist die Kalibrierung erfolgt, können sämtliche Aussagen aus Kapitel 3 auf das Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q''$  übertragen werden. Insbesondere ist die Ereigniszeit  $\tau_{FP,i}$  mit der First-Passage-Time aus Definition 3-1 zu verbinden.<sup>903</sup>

Bevor die Einordnung des semi-analytischen Modells in die kapitalmarktorientierte Bewertung durch eine kurze Betrachtung der Vorgehensweise zur Bewertung ausfallrisikobehafteter Zahlungsansprüche des CDO-Referenzportfolios abgeschlossen wird, sollen im Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega'', \mathcal{F}'', Q'')$  verschiedene Filtrationen definiert werden. Die Definition der Filtrationen wird die Untersuchung der Bewertung der ausfallrisikobehafteten Zahlungsansprüche insofern erleichtern, dass auf bereits bekannte Ergebnisse aus der Modellwelt der Hazard- und Hazard Rate-Modelle zurückgegriffen werden kann.

Sei  $\mathbb{I}_i$  mit  $\mathbb{I}_i = \{\mathcal{I}_{i,t}\}_{t \geq 0}$  die durch den Ausfallindikator  $I_i(t) = 1_{\{\tau_i \leq t\}}$  erzeugte Filtration mit  $\mathcal{I}_{i,t} = \sigma(I_{i,s} : s \leq t)$ . Dann enthält  $\mathbb{I}_i$  Informationen über den Ausfall bzw. das Überleben des Kredits  $i$ . Die  $\sigma$ -Felder  $\mathcal{I}_{i,t}$  lassen sich, rückgreifend auf die kanonischen Konstruktion von  $(\Omega'', \mathcal{F}'', Q'')$ , zugleich durch die folgenden Mengensysteme erzeugen.<sup>904</sup>

$$\mathcal{I}_{i,t} = \sigma\left(\{(w, \hat{w}, \tilde{w}) \in \Omega'' : \tau_{FP,i}(w, \hat{w}, \tilde{w}) \leq s\} : s \leq t\right) \text{ mit} \quad (5.66)$$

$$\{(w, \hat{w}, \tilde{w}) \in \Omega'' : \tau_{FP,i}(w, \hat{w}, \tilde{w}) \leq s\} = \{(w, \hat{w}, \tilde{w}) \in \Omega'' : U_i(w) \geq \Gamma_{i,s}^\Psi(\hat{w}, \tilde{w})\}. \quad (5.67)$$

Informationen über Ausfallereignisse im gesamten Referenzportfolio enthält die Filtration  $\mathbb{I}$  mit  $\mathbb{I} = \{\mathcal{I}_t\}_{t \geq 0}$ , wobei gilt:<sup>905</sup>

$$\mathcal{I}_t = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{I}_{i,t}\right). \quad (5.68)$$

Informationen aus  $\mathbb{F}$  zusätzlich zu den Informationen über Kreditausfälle enthalten die Filtrationen  $\mathbb{G}_i$  mit  $\mathbb{G}_i = \{\mathcal{G}_{i,t}\}_{t \geq 0}$  und  $\mathbb{G}$  mit  $\mathbb{G} = \{\mathcal{G}_t\}_{t \geq 0}$ , wobei gilt:

$$\mathcal{G}_{i,t} = \sigma\left(\mathcal{I}_{i,t} \cup \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)\right), \quad (5.69)$$

$$\mathcal{G}_t = \sigma\left(\bigcup_{i=1}^N \mathcal{G}_{i,t}\right). \quad (5.70)$$

<sup>903</sup> Demzufolge sind beide Notationen identisch.

<sup>904</sup> Siehe auch M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2000), Default risk: Mathematical tools, S. 3 f.

<sup>905</sup> Ähnlich gehen P. Schönbucher und D. Schubert (2001), Copula-dependent default risk, S. 14 vor.

**5214 Bewertung ausfallrisikobehafteter Zahlungsansprüche des CDO-Referenzportfolios im erweiterten Markt unter Berücksichtigung der Konkretisierung durch das semi-analytische Modell**

Zahlungsansprüche lassen sich im Rahmen einer barwertigen Betrachtung in einzelne, potentielle Zahlungsströme zerlegen. Die Zahlung des Nominalwertes erfolgt unter der Voraussetzung, dass bis zum Ende der Kontraktlaufzeit kein Ausfallereignis eingetreten ist. Kuponzahlungen sind nur bis zum Eintritt eines Ausfallereignisses zu modellieren. Tritt das Ausfallereignis ein, wird der Zahlungsstrom, bestehend aus noch nicht getätigten Kuponzahlungen und der Nominalwertzahlung, substituiert durch einen Zahlungsstrom von Recovery-Zahlungen. Alle potentiellen Zahlungsströme werden separat einer Barwertbetrachtung innerhalb des Wahrscheinlichkeitsraumes  $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$  bezüglich eines Zeitpunktes  $t$  mit  $0 \leq t \leq T_i$ , bedingt auf die in  $t$  verfügbaren Informationen, respektive das  $\sigma$ -Feld  $\mathcal{G}_{i,t}$ , ermittelt. Entsprechend den obigen Ausführungen gilt  $\mathcal{G}_{i,t} = \mathcal{I}_{i,t} \vee \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$  für alle  $t \geq 0$ .<sup>906</sup> Weiterhin gilt  $1 - F_{\tau_{FP,i}}(t) \Big|_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} = e^{-H_{i,t}}$  gem. (5.63). Der Barwert eines Zahlungsanspruchs ergibt sich als Summe der Barwerte der einzelnen potentiellen Zahlungsströme.

**52141 Bewertung potentieller Nominalwertzahlungen**

Der Barwert der potentiellen Nominalwertzahlung bezüglich eines Zeitpunktes  $t$  mit  $0 \leq t \leq T_i$  entspricht dem Barwert eines Zerobonds ohne Recovery-Zahlungen. Normiert man den Nominalwert  $D_i$  auf eins, lässt sich für den Erwartungswert des Barwertes schreiben:

$$E_{Q^*} \left( \frac{B_t}{B_{T_i}} 1_{\{\tau_{FP,i} > T_i\}} \Big| \mathcal{G}_{i,t} \right). \quad (5.71)$$

Sollte der Ausfall unmittelbar im Zeitpunkt  $T_i$  erfolgen, unterbleibt gem. (5.71) die Nominalwertzahlung. Zur Ermittlung des Erwartungswertes kann auf ein Ergebnis von DELLACHERIE, aufbereitet von JEANBLANC & RUTKOWSKI, zurückgegriffen werden:

**Satz 5-3 (Nominalwert):** Sei  $X$  eine  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_{T_i})$ -messbare Zufallsvariable, dann gilt für  $T_i \geq t$ :

$$E_{Q^*} \left( X 1_{\{\tau_{FP,i} > T_i\}} \Big| \mathcal{G}_{i,t} \right) = 1_{\{\tau_{FP,i} > t\}} e^{H_{i,t}} E_{Q^*} \left( e^{-H_{i,T}} X \Big| \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_T) \right). \quad (5.72)$$

Beweis:

*M. Jeanblanc & M. Rutkowski (2000, S. 19 f.).<sup>907</sup>*

<sup>906</sup> In T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 141 wird dieses Modellelement als „Condition (G.1)“ bezeichnet. Im Unterschied zu den dortigen Ausführungen und Notationen wird hier auf die Umkehrabbildung  $\xi_1^{-1}(\cdot)$  zurückgegriffen, da das  $\sigma$ -Feld  $\mathcal{F}_t$  selbst keine Unterálgebra von  $\mathcal{F}$  darstellt.

<sup>907</sup> Der Beweis findet sich auch in T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 145.

Für einen Kredit  $i$  mit einer Nominalwertzahlung i. H. v. eins kann die Zufallsvariable  $X$  in (5.72) unter Berücksichtigung der Eigenschaft der Messbarkeit von  $B_{T_i}$  bezüglich des  $\sigma$ -Feldes  $\lim_{s \searrow T_i} \mathcal{F}_s$  mit  $s > T_i$  und somit der  $\sigma$ -Felder  $\mathcal{F}_{T_i}$  und  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_{T_i})$  substituiert werden durch:

$$X = \frac{B_t}{B_{T_i}}. \quad (5.73)$$

Ist darüber hinaus  $H_{i,t}$  eine Funktion der Hazard-Rate  $h_{i,t}$ , dann lässt sich (5.72) i. V. m. (5.73) wie folgt schreiben:

$$E_{Q^*} \left( \frac{B_t}{B_{T_i}} 1_{\{\tau_{FP,i} > T_i\}} \middle| \mathcal{G}_{i,t} \right) = 1_{\{\tau_{FP,i} > t\}} E_{Q^*} \left( e^{-\int_t^{T_i} (r_f(u) + h_i(u)) du} \middle| \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_i) \right). \quad (5.74)$$

Mit Gleichung (5.74) kann  $h_{i,t}$  als Risikoaufschlag auf den risikofreien Zinssatz interpretiert werden. In der Literatur<sup>908</sup> wird in diesem Zusammenhang des Öfteren vom instantanen Credit-Spread gesprochen.<sup>909</sup>

Da  $H_{i,t}$  und  $h_{i,t}$  im vorliegenden Fall deterministisch sind, kann der Erwartungswertoperator direkt auf  $\exp\left(-\int_t^{T_i} r_f(u) du\right)$  angewendet<sup>910</sup> und mit (5.19) i. V. m. der Beschränkung des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q^*$  auf das  $\sigma$ -Feld  $\mathcal{F}_\infty$  durch den Wert  $B(t, T_i)$  des ausfallrisikofreien Anspruchs auf eine Zahlungseinheit im Zeitpunkt  $T_i$  bezüglich des Zeitpunktes  $t \leq T_i$  ersetzt werden:

$$E_{Q^*} \left( \frac{B_t}{B_{T_i}} 1_{\{\tau_{FP,i} > T_i\}} \middle| \mathcal{G}_{i,t} \right) = 1_{\{\tau_{FP,i} > t\}} \cdot B(t, T_i) \cdot e^{-\int_t^{T_i} h_i(s) ds}. \quad (5.75)$$

Ist der Barwert des Zerobonds ohne Recovery-Zahlungen für die Gegenwart gesucht, erhält man schließlich:

$$E_{Q^*} \left( \frac{1}{B_{T_i}} 1_{\{\tau_{FP,i} > T_i\}} \right) = B(0, T_i) \cdot e^{-\int_0^{T_i} h_i(s) ds}. \quad (5.76)$$

<sup>908</sup> Vgl. P. Khuong-Huu (1999), The price of credit, S. 69.

<sup>909</sup> Zu einem ähnlichen Ergebnis gelangen D. Duffie und K. Singleton (1999), Term structures of defaultable bonds, S. 687 f. Dabei beziehen sie zusätzlich eine Recovery Rate in Höhe eines Bruchteils des Marktwertes des ausfallrisikobehafteten Kredits unmittelbar vor dem Ausfallereignis (Fractional Recovery of Market Value) in ihre Überlegungen mit ein. Setzt man diesen Bruchteil null, erhält man (5.74). Eine Übersicht über weitere Modellansätze findet sich in S. Sundaresan (2000), Continuous-time methods in finance, S. 1591-1595.

<sup>910</sup> Im Falle eines stochastischen Hazard-Prozesses wäre dieselbe Vorgehensweise unter der Annahme der Unabhängigkeit des Zinsprozesses vom Hazard-Prozess möglich.

## 52142 Bewertung potentieller Recovery-Zahlungen

Modelltheoretisch kann die Höhe einer potentiellen Recovery-Zahlung zeitpunktabhängig in Form eines stochastischen Prozesses  $\{Z_t\}_{t \geq 0}$  erfasst werden.<sup>911</sup> Der Betrag einer Recovery-Zahlung wird danach durch die Ausprägung des Recovery-Prozesses  $\{Z_t\}_{t \geq 0}$  im Zeitpunkt des Kreditausfalles  $\tau_{FP,i}$  definiert. Ungeachtet möglicher Verzögerungen durch langwierige Insolvenzverhandlungen erfolge die Zahlung mit sofortiger Wirkung. Die genaue Ausgestaltung des Recovery-Prozesses kann in verschiedenartiger Weise geschehen und sollte konsistent mit dem verfügbaren Datenmaterial sein.<sup>912</sup>

Im einfachsten Fall könnte  $Z_t = 0$  gesetzt werden. Recovery-Zahlungen würden entfallen. Im Rahmen der Arbeit wurde zumeist eine konstante Teilbefriedigung durch den Emittenten in Höhe von  $Z_{i,t} = \delta \cdot D_i$  angenommen (Fractional Recovery of Par Value).<sup>913</sup> Verwendet wurden konstante (durchschnittliche) Recovery Rates i. H. v. 30 % und 54 %, bezogen auf den Nominalwert  $D_i$ .<sup>914</sup> Empirische Studien am US-amerikanischen Bondmarkt durch GUHA unterstützen den Fractional Recovery of Par Value-Ansatz.<sup>915</sup> Historisch ermittelte durchschnittliche Recovery Rates sollten allerdings nicht arglos zu Bewertungszwecken herangezogen werden. Vielmehr bedarf es einer risikoneutralen Schätzung. Berechnungen impliziter, risikoneutraler Recovery Rates durch BAKSHI, MADAN & ZHANG<sup>916</sup> weisen jedoch daraufhin, dass diese weitestgehend den empirischen Recovery Rates entsprechen.

Alternativ wird häufig modelltheoretisch angenommen, dass der Eigentümer des ausgefallenen Kredits einen konstanten Anteil an einem in Laufzeit und Nominalwert äquivalenten ausfallrisikofreien Zahlungsanspruch  $Z_{i,t} = \delta_i \cdot B(t, T_i)$  erhält (Fractional Recovery of Treasury Value).<sup>917</sup> Diese Interpretation der Recovery Rate wird gestützt durch empirische Untersuchungen anhand von BBB-gerateten Bonds durch BAKSHI, MADAN & ZHANG.<sup>918</sup> Insbesondere wenn der Kapitalmarkt nicht damit rechnet, dass Recovery-Zahlungen zeitnah erfolgen, scheint der Fractional Recovery of Treasury Value-Ansatz plausibel.

<sup>911</sup> Die Notation orientiert sich an T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 5 f.

<sup>912</sup> Auswirkungen verschiedener Modellansätze auf die Reichtumsposition von Risikokäufer und Risikoverkäufer im Rahmen von Kreditderivatgeschäften werden in P. Grundke (2000), Bewertung von Kreditderivaten, S. 20 f. diskutiert.

<sup>913</sup> HULL & WHITE beziehen durchschnittliche Recovery Rates nicht nur auf den Nominalwert, sondern darüber hinaus auch auf angesammelte Zinsansprüche. Vgl. J. Hull und A. White (2001), Valuing credit default swaps I, S. 31, Formel (1). Siehe auch J. Hull (2003), Options, futures and other derivatives, S. 614-617 u. S. 639, Fn. 1.

<sup>914</sup> Vgl. Abschnitt 415.

<sup>915</sup> Vgl. R. Guha (2002), Recovery of face value at default, S. 14-20.

<sup>916</sup> Vgl. G. Bakshi, D. Madan und F. Zhang (2001), Implied recovery rates, S. 25 f. Vgl. zu dieser Problematik auch die Argumentation von J. Hull und A. White (2001), Valuing credit default swaps I, S. 31 f.

<sup>917</sup> Vgl. T. Bielecki, M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2004), Modeling and valuation of credit risk, S. 43 f. Siehe auch P. Schönbucher (2000), Credit risk modelling, S. 82.

<sup>918</sup> Vgl. G. Bakshi, D. Madan und F. Zhang (2001), Implied recovery rates, S. 21-24.

Der Barwert der potentiellen Recovery-Zahlung bezüglich eines Zeitpunktes  $t$  mit  $0 \leq t \leq T_i$  stellt eine Zufallsvariable dar und bedarf der Erwartungswertbildung:

$$E_{Q^*} \left( \frac{B_t}{B_{\tau_{FP,i}}} Z_{i,\tau_{FP,i}} 1_{\{t < \tau_{FP,i} \leq T_i\}} \middle| \mathcal{G}_{i,t} \right). \quad (5.77)$$

Zur Ermittlung des Erwartungswertes (5.77) sei bemerkt, dass sowohl  $B_t$ ,  $B(t, T_i)$  als auch  $Z_t$  in allen oben diskutierten Ausführungen bezüglich des  $\sigma$ -Feldes  $\lim_{s \searrow t} \mathcal{F}_s$  mit  $s > t$  messbar und damit bezüglich der  $\sigma$ -Felder  $\mathcal{F}_t$  und  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$  vorhersagbar sind.<sup>919</sup> Im Falle des Geldmarktkontos ergibt sich die Vorhersagbarkeit aus der Kenntnis des instantanen Zinssatzes  $r_f$  im Zeitpunkt  $t$ . Dieselbe Argumentation gilt für den ausfallrisikofreien Zahlungsanspruch  $B(t, T)$ . Mit Blick auf den Recovery-Prozess lässt sich festhalten, dass zunächst jede konstante Funktion  $\delta$  bereits bezüglich des trivialen  $\sigma$ -Feldes  $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$  messbar ist.<sup>920</sup> Darüber hinaus erhält sich die Eigenschaft der Messbarkeit unter allen algebraischen Verknüpfungen, womit die Messbarkeit der verschiedenen Ausgestaltungen des Recovery-Prozesses bezüglich  $\lim_{s \searrow t} \mathcal{F}_s$  mit  $s > t$  und damit die Vorhersagbarkeit bezüglich  $\mathcal{F}_t$  und  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$  gewährleistet ist. Mit diesen Ausführungen lässt sich auf ein Ergebnis von BIELECKI & RUTKOWSKI zurückgreifen:

**Satz 5-4 (Recovery-Prozess):** Sei  $X_s$  ein beschränkter,  $\xi_1^{-1}(\mathbb{F})$ -vorhersagbarer Prozess, dann gilt für jedes  $t < T_i \leq \infty$ :

$$E_{Q^*} \left( 1_{\{t < \tau_{FP,i} \leq T_i\}} X_{\tau_{FP,i}} \middle| \mathcal{G}_{i,t} \right) = 1_{\{\tau_{FP,i} > t\}} e^{H_{i,t}} E_{Q^*} \left( \int_{]t, T_i]} X_u dF_u \middle| \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \right). \quad (5.78)$$

Beweis:

*T. Bielecki & M. Rutkowski (2004, S. 149).*<sup>921</sup>

Für einen Kredit  $i$  mit einem Recovery-Prozess  $Z_{i,t}$  kann  $X_{\tau_{FP,i}}$  in (5.78) mit Blick auf die obigen Überlegungen zur Vorhersagbarkeit von Prozessen wie folgt ersetzt werden:

$$X_{\tau_{FP,i}} = \frac{B_t}{B_{\tau_{FP,i}}} Z_{i,\tau_{FP,i}}. \quad (5.79)$$

<sup>919</sup> Zur mathematischen Definition des Konzeptes der Vorhersagbarkeit siehe C. Dellacherie und P.-A. Meyer (1978), Probabilities and potential, S. 121 f. (IV.61). Eine intuitive Interpretation ist im Umfeld zeit-diskreter stochastischer Prozesse möglich. Vgl. C. Dellacherie und P.-A. Meyer (1982), Probabilities and potential B, S. 6 f. (V.8); S. Pliska (2002), Mathematical finance: Diskrete time models, S. 80.

<sup>920</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden W. König (2003), Stochastik I (Skriptum), S. 37.

<sup>921</sup> Der Beweis findet sich ebenfalls in M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2000), Default risk: Mathematical tools, S. 19, Proposition 3.1 (ii).

Kann zudem  $dF_u |_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)}$  in (5.78) durch  $e^{-H_{i,u}} dH_{i,u}$  substituiert werden, erhält man:

$$E_{Q^r} \left( \mathbf{1}_{\{t < \tau_{FP,j} \leq T_i\}} \frac{B_t}{B_{\tau_{FP,j}}} Z_{i,\tau_{FP,j}} | \mathcal{G}_{i,t} \right) = \mathbf{1}_{\{\tau_{FP,j} > t\}} E_{Q^r} \left( \int_{]t, T_i]} \frac{B_t}{B_u} Z_{i,u} e^{H_{i,t} - H_{i,u}} dH_{i,u} |_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} \right). \quad (5.80)$$

Ist darüber hinaus  $H_{i,t}$  eine Funktion der Hazard Rate  $h_{i,t}$ , dann lässt sich (5.78) i. V. m. (5.79) wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} E_{Q^r} \left( \mathbf{1}_{\{t < \tau_{FP,j} \leq T_i\}} \frac{B_t}{B_{\tau_{FP,j}}} Z_{i,\tau_{FP,j}} | \mathcal{G}_{i,t} \right) &= \mathbf{1}_{\{\tau_{FP,j} > t\}} E_{Q^r} \left( \int_{]t, T_i]} \frac{B_t}{B_u} Z_{i,u} e^{\int_t^u h_i(s) ds - \int_0^u h_i(s) ds} h_i(u) du |_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} \right) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_{FP,j} > t\}} E_{Q^r} \left( \int_{]t, T_i]} \frac{B_t}{B_u} Z_{i,u} e^{\int_t^u h_i(s) ds - \left( \int_0^t h_i(s) ds + \int_t^u h_i(s) ds \right)} h_i(u) du |_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} \right) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau_{FP,j} > t\}} E_{Q^r} \left( \int_{]t, T_i]} Z_{i,u} e^{-\int_t^u (r_f(s) + h_i(s)) ds} h_i(u) du |_{\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)} \right). \quad (5.81) \end{aligned}$$

Da  $H_{i,t}$  und  $h_{i,t}$  im vorliegenden Fall deterministisch sind, kann der Erwartungswertoperator direkt auf  $\exp\left(-\int_t^u r_f(s) ds\right)$  angewendet<sup>922</sup> und mit (5.19) i. V. m. der Beschränkung des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q^r$  auf das  $\sigma$ -Feld  $\mathcal{F}_\infty$  durch den Wert  $B(t,u)$  des ausfallrisikofreien Anspruchs auf eine Zahlungseinheit im Zeitpunkt  $u$  bezüglich des Zeitpunktes  $t \leq u$  ersetzt werden. Unter Berücksichtigung der obigen Recovery-Modelle erhält man:

$$E_{Q^r} \left( \mathbf{1}_{\{t < \tau_{FP,j} \leq T_i\}} \frac{B_t}{B_{\tau_{FP,j}}} Z_{i,\tau_{FP,j}} | \mathcal{G}_{i,t} \right) = \mathbf{1}_{\{\tau_{FP,j} > t\}} \int_{]t, T_i]} Z_{i,u} B(t,u) e^{-\int_t^u h_i(s) ds} h_i(u) du. \quad (5.82)$$

Beachtet man, dass  $\mathbf{1}_{\{\tau_{FP,j} > t\}} \exp\left(-\int_t^u h_i(s) ds\right) h_i(u)$  die Ausfalldichte im Zeitpunkt  $u$  mit  $t \leq u$  bedingt auf  $\xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t)$  darstellt<sup>923</sup>, erhält (5.82) eine einfache Interpretation: Integriert wird über alle potentiellen Recovery-Zahlungen, abdiskontiert mit dem risikolosen Zinssatz und gewichtet mit der Ausfalldichte des jeweiligen Zeitpunkts  $u$ . Ist der Barwert der Gegenwart gesucht und unterstellt man zudem eine konstante Recovery Rate  $\delta \cdot D_i$  mit  $D_i = 1$ , folgt:

$$E_{Q^r} \left( \mathbf{1}_{\{0 < \tau_{FP,j} \leq T_i\}} B_{\tau_{FP,j}}^{-1} Z_{i,\tau_{FP,j}} \right) = \delta_i \cdot \int_{]0, T_i]} B(0,u) e^{-\int_0^u h_i(s) ds} h_i(u) du. \quad (5.83)$$

<sup>922</sup> Im Falle eines stochastischen Hazard-Prozesses wäre dieselbe Vorgehensweise unter der Annahme der Unabhängigkeit des Zinsprozesses vom Hazard-Prozess möglich.

<sup>923</sup> Vgl. M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2000), Default risk: Mathematical tools, S. 5.

<sup>924</sup> Vgl. zu dieser Repräsentation des Recovery Legs R. Martin, K. Thompson und C. Browne (2001), Price and probability, S. 115.

## 52143 Bewertung potentieller Kuponzahlungen

Potentielle Kuponzahlungen lassen sich – unabhängig davon, ob diese zeitdiskret oder zeitstetig gezahlt werden – in Form eines Prozesses  $\{C_{i,t}\}_{t \geq 0}$  repräsentieren, welcher sämtliche Kuponzahlungen in kumulierter Weise erfasst. Der Prozess  $\{C_{i,t}\}_{t \geq 0}$  ist folglich monoton wachsend, beginnend mit  $C_{i,0}=0$ . Werden die Kupons in regelmäßigen Zeitabständen gezahlt (vierteljährlich, halbjährlich, jährlich), stellt  $C_i(t)$  eine Treppenfunktion dar. Eine Kuponzahlung im Zeitpunkt  $t$  wird durch  $C_{i,t}-C_{i,t^-}$  mit  $C_{i,t^-} = \lim_{s \rightarrow t, s < t} C_{i,s}$  ermittelt. Fallen die Kuponzahlungen zeitstetig in konstanter Höhe an, stellt  $C(t)$  eine lineare Funktion mit positivem Anstieg dar. Die Kuponzahlungen finden statt, solange kein Ausfallereignis eintritt:

$$\int_{[0, T_i]} (1 - I_{i,u}) dC_{i,u}. \quad (5.84)$$

Der Barwert der potentiellen Kuponzahlungen bezüglich eines Zeitpunktes  $t$  mit  $0 \leq t \leq T_i$  stellt eine Zufallsvariable dar und bedarf der Erwartungswertbildung:

$$E_{Q^*} \left( \int_{[t, T_i]} \frac{B_t}{B_u} (1 - I_{i,u}) dC_{i,u} \mid \mathcal{G}_{i,t} \right). \quad (5.85)$$

Zur Repräsentation des Erwartungswertes (5.85) unter expliziter Berücksichtigung von  $H_{i,t}$  kann erneut auf Ausführungen von JEANBLANC & RUTKOWSKI zurückgegriffen werden:

**Satz 5-5 (Kupon-Prozess):** Sei  $X_s$  ein beschränkter,  $\xi_1^{-1}(\mathbb{F})$ -vorhersagbarer Prozess, dann gilt für jedes  $t < T_i \leq \infty$ :

$$E_{Q^*} \left( \int_{[t, T_i]} (1 - I_{i,u}) dX_u \mid \mathcal{G}_{i,t} \right) = 1_{\{\tau_{FP,i} > t\}} e^{H_{i,t}} E_{Q^*} \left( \int_{[t, T_i]} e^{-H_{i,u}} dX_u \mid \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \right). \quad (5.86)$$

Beweis:

*M. Jeanblanc & M. Rutkowski (2000, S. 21).*<sup>925</sup>

Für einen Kredit  $i$  mit einem Kupon-Prozess  $\{C_{i,s}\}_{s \geq 0}$  kann  $X_u$  in (5.86) mit Blick auf die obigen Überlegungen zur Vorhersagbarkeit von Zins- und Geldmarktkontoprozessen wie folgt ersetzt werden:<sup>926</sup>

$$X_u = \int_0^u \frac{B_t}{B_s} dC_{i,s}. \quad (5.87)$$

<sup>925</sup> Der Beweis findet sich auch in T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 149.

<sup>926</sup> Vgl. auch die Vorgehensweisen von A. Bélanger, S. Shreve und D. Wong (2003), Pricing credit risk, S. 7-10 und T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 230.

<sup>927</sup> Mit Blick auf (5.85) beachte man, dass folgendes gilt:  $dX_u = B_t B_u^{-1} dC_{i,u}$ .

Ist  $H_{i,t}$  eine Funktion der Hazard Rate  $h_{i,t}$ , dann lässt sich (5.86) i. V. m. (5.87) wie folgt schreiben:

$$E_{Q^*} \left( \int_{]t, T_i]} \frac{B_t}{B_u} (1 - I_{i,u}) dC_{i,u} \mid \mathcal{G}_{i,t} \right) = 1_{\{\tau_{FP,i} > t\}} E_{Q^*} \left( \int_{]t, T_i]} e^{-\int_t^u (r_f(s) + h_i(s)) ds} dC_{i,u} \mid \xi_1^{-1}(\mathcal{F}_t) \right). \quad (5.88)$$

Da  $H_{i,t}$  und  $h_{i,t}$  im vorliegenden Fall deterministisch sind, kann der Erwartungswertoperator direkt auf  $\exp\left(-\int_t^u r_f(s) ds\right)$  angewendet<sup>928</sup> und mit (5.19) i. V. m. der Beschränkung des Wahrscheinlichkeitsmaßes  $Q^*$  auf das  $\sigma$ -Feld  $\mathcal{F}_\infty$  durch den Wert  $B(t,u)$  des ausfallrisikofreien Anspruchs auf eine Zahlungseinheit im Zeitpunkt  $u$  bezüglich des Zeitpunktes  $t \leq u$  ersetzt werden:

$$E_{Q^*} \left( \int_{]t, T_i]} \frac{B_t}{B_u} (1 - I_{i,u}) dC_{i,u} \mid \mathcal{G}_{i,t} \right) = 1_{\{\tau_{FP,i} > t\}} \int_{]t, T_i]} B(t,u) e^{-\int_t^u h_i(s) ds} dC_{i,u}. \quad (5.89)$$

Beachtet man, dass  $1_{\{\tau_{FP,i} > t\}} \exp\left(-\int_t^u h_i(s) ds\right)$  die auf den Informationsstand des Zeitpunktes  $t$  bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit  $Q^*(\tau_{FP,i} > u \mid \mathcal{I}_{i,t})$  bezüglich des Zeitpunktes  $u$  mit  $t \leq u$  darstellt<sup>929</sup>, erhält (5.89) eine einfache Interpretation: Integriert wird über alle potentiellen Kupon-Zahlungen, abdiskontiert mit dem risikolosen Zinssatz und gewichtet mit den Wahrscheinlichkeiten des Überlebens bis zum und einschließlich des Kuponzahlungszeitpunktes  $u$ . Ist der Barwert der Gegenwart gesucht, folgt:

$$E_{Q^*} \left( \int_{]0, T_i]} \frac{B_t}{B_u} (1 - I_{i,u}) dC_{i,u} \right) = \int_{]0, T_i]} B(0,u) e^{-\int_0^u h_i(s) ds} dC_{i,u}. \quad (5.90)$$

#### 52144 Bewertung ausfallrisikobehafteter Zahlungsansprüche

Der Wert  $B_i(0, T_i)$  eines ausfallrisikobehafteten Anspruchs auf eine Nominalwertzahlung in Höhe von  $D_i = I$  sowie einen Kupon-Prozess  $C_{i,t}$  bei unterstellter konstanter Recovery Rate  $\delta_i$  bezüglich des Zeitpunktes  $t_0$  ergibt sich unter Berücksichtigung einer Hazard Rate-Funktion  $h_{i,t}$  als Summe des Face Value Legs (5.76), des Recovery Legs (5.83) und des Coupon Legs (5.90).<sup>930</sup>

$$B_i(0, T_i) = B(0, T_i) \cdot e^{-\int_0^{T_i} h_i(s) ds} + \int_{]0, T_i]} B(0, u) e^{-\int_0^u h_i(s) ds} (\delta_i h_i(u) du + dC_{i,u}). \quad (5.91)$$

<sup>928</sup> Im Falle eines stochastischen Hazard-Prozesses wäre dieselbe Vorgehensweise unter der Annahme der Unabhängigkeit des Zinsprozesses vom Hazard-Prozess möglich.

<sup>929</sup> Vgl. M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2000), Default risk: Mathematical tools, S. 5.

<sup>930</sup> Siehe auch T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk, S. 230-234.

## 522 Kapitalmarktdeduzierte Ermittlung risikoneutraler Credit Curves als Basis der semi-analytischen und simulativen risikoneutralen Bewertung

### 5221 Abschnittsweise konstante Credit Curves

Gemäß dem (zweiten) *Fundamental Theorem of Asset Pricing* ist ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß genau dann eindeutig gegeben, wenn der Geld- und Kapitalmarkt vollständig ist.<sup>931</sup> Es liegt ein eindeutig bestimmtes arbitragefreies Preissystem vor. Ein unvollständiger Geld- und Kapitalmarkt erlaubt mehr als nur ein einziges arbitragefreies Preissystem. Rückgreifend auf beobachtbare Marktdaten kann ein aufgestelltes arbitragefreies Preissystem jedoch so kalibriert werden, dass die beobachteten Marktdaten durch dieses erklärt werden. Die Kalibrierung lässt sich anhand von Zahlungsansprüchen in Form von Krediten und Bonds oder mit Kreditderivaten<sup>932</sup> durchführen. Bonds haben den Nachteil, dass der beobachtbare Spread neben dem Kreditrisiko auch andere Risiken – insbesondere das Liquiditätsrisiko – vergütet.<sup>933</sup> Den kreditrisikobasierten Spreadanteil zu separieren, um dann Credit Curves ableiten zu können, ist schwierig. Daher wird oft – auch wegen der hohen Fungibilität<sup>934</sup> – auf Credit Default Swaps (CDS) zurückgegriffen.<sup>935</sup> Der Protection Buyer<sup>936</sup> erwirbt gegen Zahlung einer periodischen Risikoprämie an den Protection Seller<sup>937</sup> das Recht, bei Eintritt eines zuvor vertraglich vereinbarten Kreditereignisses, eine Kompensation für die daraus entstandenen Verluste vom Protection Seller zu erhalten.<sup>938</sup> Der CDS ähnelt daher in seiner Wirkung einer übernommenen Garantie<sup>939</sup> gegen Verluste durch ein Kreditereignis. Als Kreditereignis kommen insbesondere der Downgrade des Ratings eines zugrunde liegenden Kredites (Emissionsrating) bzw. des entsprechenden Emittenten (Emittentenrating) und die Insolvenz des Emittenten in Betracht.<sup>940</sup> Die Insol-

---

<sup>931</sup> Vgl. S. Shreve (2004), Continuous-time models, S. 231-234. Zur Verdeutlichung in einem zeit-diskreten Modell siehe S. Pliska (2002), Mathematical finance: Diskrete time models, S. 21-28.

<sup>932</sup> Kreditderivate sind Termingeschäfte, deren Zahlungsstruktur davon abhängt, ob das Kreditrisiko eines anderen Finanzproduktes schlagend oder nicht schlagend wird. Vgl. H.-P. Burghof, S. Henke und B. Rudolph (1998), Kreditderivate, S. 278. Kreditderivate werden, anders als andere Termingeschäfte, ausschließlich Over-the-Counter gehandelt und lassen sich so den individuellen Bedürfnissen der Kontraktpartner entsprechend gestalten.

<sup>933</sup> Wird der liquiditätsrisikobasierte Spreadanteil nicht separiert, kommt es insbesondere bei der Bewertung von Basket-Strukturen und CDOs zu erheblichen Fehlbewertungen. Vgl. dazu R. Mashal (2002), Pricing of CDOs, S. 4-10.

<sup>934</sup> Vgl. P. Khuong-Huu (1999), The price of credit, S. 70; F. Longstaff, S. Mithal und E. Neis (2004), Corporate yield spreads vs. CDS premiums, S. 1.

<sup>935</sup> Für einen empirischen Vergleich von Bond-Spreads mit CDS-Prämien siehe F. Longstaff, S. Mithal und E. Neis (2004), Corporate yield spreads vs. CDS premiums, S. 15-25. Mit Hilfe von Unternehmenswertmodellen versuchen J. Huang und M. Huang (2003), Yield spreads and credit risk, S. 14-30 zu klären, welcher Spreadanteil von Bonds das Kreditrisiko vergütet.

<sup>936</sup> Auch: Sicherungsnehmer.

<sup>937</sup> Auch: Sicherungsgeber.

<sup>938</sup> Vgl. zum Grundprinzip eines CDS S. Hohl und T. Liebig (1999), Kreditderivate, S. 507.

<sup>939</sup> Vgl. S. Landry und O. Radeke (1999), Kreditderivate in der Praxis, S. 538. Zu Unterschieden zwischen der Garantie und dem CDS siehe P. Hüttemann (1999), Kreditderivate, S. 32 f.

<sup>940</sup> Die Richtlinien zum Handel von Kreditderivaten der INTERNATIONAL SWAPS AND DERIVATIVES ASSOCIATION INC. kennen darüber hinaus die Kreditereignisse „Zahlungsverweigerung/Moratorium“, „be-

venz eines Emittenten geht i. d. R. einher mit einem *Default*-Rating, wobei in der Praxis die Note „D“ bereits bei einem Zahlungsverzug von wenigen Tagen vergeben wird.<sup>941</sup> Der CDS separiert infolgedessen – den Tatbestand des Defaults fortführend – das Risiko ausbleibender Zins- und Tilgungszahlungen vom Grundgeschäft des Kredits und macht es zum Handelsgegenstand der Kontraktpartner.

Der Barwert eines CDS setzt sich zusammen aus den Erwartungswerten der laufzeitgerecht diskontierten Risikoprämienzahlungen und der laufzeitgerecht diskontierten Kompensationszahlung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q^r$ . Die Risikoprämienzahlungen erfolgen – basierend auf dem vertraglich vereinbarten Swap-Satz  $RP_{CDS,i}$  – zu den vertraglich vereinbarten Zahlungszeitpunkten  $t_{i,j}$  mit  $j=1, \dots, m$  bis zum Fälligkeitstermin  $T_{CDS,i}=t_{i,m}$ , sofern bis zum und einschließlich des Prämienzahlungszeitpunktes  $t_{i,j}$  kein Kreditereignis stattgefunden hat. Bei halbjährlicher oder vierteljährlicher Zahlungsweise wird der Swap-Satz über  $\Delta t_{i,j}$  einer linearen Skalierung unterzogen, wobei  $\Delta t_{i,j}$  in Abhängigkeit der verwendeten Zinskonvention für verschiedene  $j$  unterschiedliche Werte annehmen kann.<sup>942</sup> Wird der Nominalwert auf eins normiert, kann der Barwert des Swaps unter der Annahme einer Teilbefriedigung in Höhe des Nominalwertbruchteils  $\delta_i$  (Fractional Recovery of Par Value) wie folgt formalisiert werden:<sup>943</sup>

$$CDS_i = E_{Q^r} \left[ \underbrace{\sum_{j=1}^m \frac{1}{B(t_{i,j})} \cdot RP_{CDS,i} \cdot \Delta t_{i,j} \cdot 1_{\{\tau_{FP,i} > t_{i,j}\}}}_{\text{Premium Leg}} \right] - E_{Q^r} \left[ \underbrace{(1 - \delta_i) \cdot \frac{1}{B(\tau_{FP,i})} \cdot 1_{\{\tau_{FP,i} < T_{CDS,i}\}}}_{\text{Default/Protection Leg}} \right]. \quad (5.92)$$

Im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses<sup>944</sup> sollte der Swap-Satz so gewählt werden, dass der Kontraktbarwert null ergibt. Da weder die Reichtumsposition des Protection Buyers noch die Reichtumsposition des Protection Sellers durch den Geschäftsabschluss verändert wird, spricht man vom „fairen“ Swap-Satz. Der faire Swap-Satz spiegelt sowohl die erwartete Recovery Rate als auch die Ausfallwahrscheinlichkeit des Grundgeschäftes wider. Fixiert man die Recovery Rate, lässt sich mit Credit Default Swaps verschiedener Laufzeiten auf die Ausfallwahrscheinlichkeiten der verschiedenen Zeiträume, respektive die Hazard Rate-Funktion  $h_t$  schließen. Da lediglich eine diskrete Anzahl von Swap-Geschäften zur Verfügung steht, die Hazard Rate-Funktion jedoch zeitstetig verläuft, sind vereinfachende An-

---

schleunigte Erfüllung der Verpflichtung“, „Nichterfüllen einer Verpflichtung“ und „Umschuldung“. Vgl. F. Packer und H. Zhu (2005), CDS-Vertragsbedingungen, S. 100.

<sup>941</sup> Vgl. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 12 f. (STANDARD & POOR'S Studie).

<sup>942</sup> Befindet man sich nicht im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses, ist zu beachten, dass  $\Delta t_{i,1} > t_{i,1}$  gilt.

<sup>943</sup> Vgl. P. Grundke (2000), Bewertung von Kreditderivaten, S. 22.

<sup>944</sup> Im Zeitpunkt des Neuabschlusses gilt  $\Delta t_{i,1} = t_{i,1}$ . Vgl. auch Fn. 942.

nahmen nötig. In Anlehnung an die Credit Curves des Typs A<sup>945</sup> soll die (risikoneutrale) Hazard Rate-Funktion  $h_t$  zeitschnittsweise konstant verlaufen.<sup>946</sup> Die Zeitschnitte werden durch die Fälligkeitszeitpunkte  $T_{CDS,i}$  mit  $i=1,2,\dots$  der zur Verfügung stehenden CDS determiniert. Mit dem ersten CDS sowie mit dem ersten Zeitschnitt beginnend, kann durch *Bootstrapping*<sup>947</sup> sukzessive auf die Hazard Rate-Funktion geschlossen werden.

Konkret werden im Folgenden die Prämienzahlungstermine des  $i$ -ten CDS danach geordnet, ob diese vor oder nach dem Fälligkeitszeitpunkt  $T_{CDS,i-1}$  des unmittelbar kürzer laufenden CDS anfallen.<sup>948</sup> Mit  $m^*$  sei die Prämienzahlung markiert, welche sich gerade noch vor dem Fälligkeitszeitpunkt  $T_{CDS,i-1}$  befindet.<sup>949</sup> Die Erwartungswerte von  $B(t_{i,j})^{-1} \cdot 1_{\{\tau_{FP,i} > t_{i,j}\}}$  des Premium Legs mit  $j=1,\dots,m^*$  können mit Blick auf Satz 5-3 und (5.76) auf der Basis bereits kalibrierter Hazard Rate-Funktionsabschnitte  $h_{[0,T_{CDS,1}]}$ ,  $h_{[T_{CDS,1},T_{CDS,2}]}$ ,  $\dots$ ,  $h_{[T_{CDS,i-2},T_{CDS,i-1}]}$  ermittelt werden. Die Erwartungswerte für  $j=m^*+1,\dots,m$  bedürfen daneben des aktuell zu kalibrierenden Funktionsabschnittes  $h_{[T_{CDS,i-1},T_{CDS,i}]}$ :

$$\text{Premium-Leg} = \tag{5.93}$$

$$\sum_{j=1}^{m^*} B(0,t_{i,j}) \cdot RP_{CDS,i} \cdot \Delta t_{i,j} \cdot e^{-\left(\sum_{k=1}^l h_{[T_{CDS,k-1},T_{CDS,k}]}(T_{CDS,k}-T_{CDS,k-1}) + h_{[T_{CDS,l},T_{CDS,l+1}]}(t_{i,j}-T_{CDS,l})\right)}$$

$$+ \sum_{j=m^*+1}^m B(0,t_{i,j}) \cdot RP_{CDS,i} \cdot \Delta t_{i,j} \cdot e^{-\left(\sum_{k=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,k-1},T_{CDS,k}]}(T_{CDS,k}-T_{CDS,k-1}) + h_{[T_{CDS,i-1},T_{CDS,i}]}(t_{i,j}-T_{CDS,i-1})\right)}$$

mit :

$$l = \sup(n : T_{CDS,n} < t_{i,j}).$$

Da nicht davon ausgegangen werden kann, dass der Zahlungszeitpunkt  $t_{i,j}$  exakt auf einer Sprungstelle der abschnittsweise konstanten Hazard Rate-Funktion liegt, markiert die Variable  $l = \sup(n : T_{CDS,n} < t_{i,j})$  die Anzahl der sich vollständig innerhalb des Intervalls  $[0,t_{i,j})$  befindlichen Abschnitte. Das bis zum Zahlungszeitpunkt  $t_{i,j}$  fehlende Zeitintervall ist durch  $(t_{i,j}-T_{CDS,l})$  gegeben. Liegt der Zahlungszeitpunkt ausnahmsweise auf einer Sprungstelle gilt  $(t_{i,j}-T_{CDS,l}) = (T_{CDS,l+1}-T_{CDS,l})$ .

<sup>945</sup> Vgl. Abschnitt 322.

<sup>946</sup> Alternativ arbeitet J. Hull (2003), Options, futures and other derivatives, S. 641 f. mit einer zeitschnittsweise konstant verlaufenden Dichtefunktion der Ausfallzeit.

<sup>947</sup> Vgl. auch die Ausführungen in A. Arvantis und J. Gregory (2004), Credit, S. 131-133.

<sup>948</sup> Definitionsgemäß gelte  $T_{CDS,0}=0$ .

<sup>949</sup> Prämienzahlungszeitpunkte des betrachteten CDS-Kontraktes müssen folglich nicht notwendigerweise mit Fälligkeitszeitpunkten kürzer laufender CDS-Kontrakte übereinstimmen.

Zur Ermittlung des Erwartungswertes der laufzeitgerecht diskontierten Kompensationszahlung kann auf Satz 5-4 und Gleichung (5.83) zurückgegriffen werden. Problematisch für die Kalibrierung erweisen sich die Integrale. Approximativ wird daher auf eine diskrete Zeitachse zurückgegriffen. Es erweist sich mit Blick auf die abschnittsweise konstante Hazard Rate-Funktion als hilfreich, die Zeitachse so zu diskretisieren, dass die Fälligkeitszeitpunkte der CDS-Kontrakte mit Grenzen der diskreten Zeitintervalle zusammenfallen. Dazu wird die Zeitachse zunächst in die diskreten Zeitabschnitte  $[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}] = \Delta T_{CDS,j}$  mit  $j=1, \dots, i$  zerlegt. Die Zeitabschnitte  $[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]$  werden wiederum in  $v_j$  Teilabschnitte unterteilt. Die Parameter  $v_j$  können dann in Abhängigkeit der Länge der Zeitabschnitte  $[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]$  zweckmäßig so gewählt werden, dass die Teilabschnitte für alle  $[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]$  in etwa gleich lang sind. Denkbar wäre eine Teilabschnittslänge von ca. einem Tag:

$$\text{Protection-Leg} \approx \quad (5.94)$$

$$E_Q \left[ \begin{aligned} & (1-\delta_i) \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} B \left( T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k \right)^{-1} \cdot \mathbf{1}_{\left\{ T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot (k-1) < \tau_{FP,i} \leq T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k \right\}} \\ & + (1-\delta_i) \sum_{k=1}^{v_i} B \left( T_{CDS,i-1} + \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot k \right)^{-1} \cdot \mathbf{1}_{\left\{ T_{CDS,i-1} + \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot (k-1) < \tau_{FP,i} \leq T_{CDS,i-1} + \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot k \right\}} \end{aligned} \right].$$

Mit Hilfe der Hazard Rate-Funktion ergibt sich:

$$\text{Protection-Leg} \approx \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} & (1-\delta_i) \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} B \left( 0, T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k \right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{j-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]} \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot (k-1)} \\ & - (1-\delta_i) \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} B \left( 0, T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k \right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{j-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]} \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k} \\ & + (1-\delta_i) \sum_{k=1}^{v_i} B \left( 0, T_{CDS,i-1} + \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot k \right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]} \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot (k-1)} \\ & - (1-\delta_i) \sum_{k=1}^{v_i} B \left( 0, T_{CDS,i-1} + \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot k \right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]} \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot k} \end{aligned}$$

Sind die fairen Swap-Sätze bekannt, kann durch Gleichsetzen von (5.93) und (5.95) auf die konstanten Hazard Rate-Funktionsabschnitte  $h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]}$  geschlossen werden. Explizit lässt sich  $h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]}$  jedoch nur dann ermitteln, wenn  $m^*=m$  und  $v_i=1$  gelten. Die erste Bedingung besagt, dass außer der Prämienzahlung im Fälligkeitstermin des  $i$ -ten CDS keine weitere Prämienzahlung nach dem Fälligkeitszeitpunkt  $T_{CDS,i-1}$  des unmittelbar kürzer

laufenden CDS anfallen darf. Dazu bedarf es hinreichend vieler CDS-Kontrakte.<sup>950</sup> Die zweite Bedingung fordert, dass der Zeitabschnitt  $[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]$  nicht weiter in einzelne Teilabschnitte zerlegt wird. Findet ein Kreditereignis innerhalb dieses Zeitabschnittes statt, wird der genaue Zeitpunkt der fälligen Kompensationszahlung nicht durch (5.94) erfasst. Insofern liegt eine Approximation vor, deren Auswirkung jedoch umso geringer ausfällt, je mehr CDS-Kontrakte zur Verfügung stehen. Man erhält ein nicht-lineares Gleichungssystem, geordnet nach aufsteigender Restlaufzeit der CDS-Kontrakte:

$$h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]} = -\frac{1}{\Delta T_{CDS,i}} \ln \frac{\alpha + \chi - \gamma}{\beta} \quad (5.96)$$

mit :

$$\begin{aligned} \alpha &= (1 - \delta_i) B(0, T_{CDS,i}) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n}}, \\ \beta &= B(0, T_{CDS,i}) \cdot RP_{CDS,i} \cdot \Delta t_{i,m} \cdot e^{-\sum_{k=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,k-1}, T_{CDS,k}]} \Delta T_{CDS,k}} \\ &\quad + (1 - \delta_i) B(0, T_{CDS,i}) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n}}, \\ \gamma &= \sum_{j=1}^{m-1} B(0, t_{i,j}) \cdot RP_{CDS,i} \cdot \Delta t_{i,j} \cdot e^{-\left(\sum_{k=1}^i h_{[T_{CDS,k-1}, T_{CDS,k}]} \Delta T_{CDS,k} + h_{[T_{CDS,i}, T_{CDS,i+1}]} (t_{i,j} - T_{CDS,i})\right)}, \\ \chi &= (1 - \delta_i) \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} B\left(0, T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k\right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]} \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} (k-1)} \\ &\quad - (1 - \delta_i) \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} B\left(0, T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k\right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]} \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} k}. \end{aligned}$$

Für den ersten Zeitabschnitt, basierend auf dem CDS-Kontrakt mit der kürzesten Restlaufzeit  $T_{CDS,1}$ , vereinfacht sich (5.96) zu:

$$h_{[0, T_{CDS,1}]} = -\frac{1}{T_{CDS,1}} \ln \frac{(1 - \delta_1)}{RP_{CDS,1} \cdot T_{CDS,1} + 1 - \delta_1}. \quad (5.97)$$

In der obigen Modellformulierung erhält der Protection Seller im Falle eines Kreditereignisses unmittelbar vor einem oder im vereinbarten Zahlungszeitpunkt  $t_{i,j}$  weder die volle Prämienzahlung noch einen entsprechend des besicherten Zeitabschnittes  $[t_{i,j-1}, \tau_{FP,i}]$  bemessenen Anteil. Sollen aufgelaufene Prämienanteile berücksichtigt werden, kann das Premium Leg dahingehend modifiziert werden, dass in Analogie zur Vorgehensweise im

<sup>950</sup> Bei jährlicher Prämienzahlung bedarf es mindestens eines Kontraktes pro Jahr. Bei halbjährlicher Zinszahlung bedarf es bereits mindestens zweier Kontrakte u. s. w.

Rahmen des Protection Legs die Zeitachse diskretisiert und in Abhängigkeit des jeweils betrachteten Zeitpunkts  $T_{CDS,j-1} + (T_{CDS,j} - T_{CDS,j-1}) \cdot k / v_j$  ein Prämienanteil

$$RP_{CDS,i} \cdot \left( \Delta t_{i,j^*} - \left( t_{i,j^*} - \left( T_{CDS,j-1} + \frac{T_{CDS,j} - T_{CDS,j-1}}{v_j} \cdot k \right) \right) \right) \quad (5.98)$$

berücksichtigt wird. Dabei stellt  $t_{i,j^*}$  den unmittelbar nachfolgenden Zahlungstermin dar. Die Gleichungen (5.96) und (5.97) sind jeweils zu modifizieren.<sup>951</sup>

## 5222 Credit Curves unter Berücksichtigung von Ratingmigrationen

Kreditausfallwahrscheinlichkeitsbeeinflussende Bonitätsverbesserungen bzw. -verschlechterungen lassen sich entsprechend der Vorgehensweise zur Ermittlung der Credit Curves des Typs B und des Typs C durch das Heranziehen stochastischer Ratingmigrationsmatrizen berücksichtigen.<sup>952</sup> JARROW, LANDOW & TURNBULL schlagen vor, reale Ratingmigrationsmatrizen  $\mathbf{Q}_{[t,t+1]}$  über einen Vektor mit positiven<sup>953</sup> ratingabhängigen Risikoprämien  $\pi_{1,t}, \dots, \pi_{k-1,t}$  in Beziehung zu risikoneutralen Ratingmigrationsmatrizen  $\tilde{\mathbf{Q}}_{[t,t+1]}$  zu setzen.<sup>954</sup> Mit einer 1-jährigen, konstant<sup>955</sup> bleibenden, realen Ratingmigrationsmatrix  $\mathbf{Q}_{[t,t+1]} = \mathbf{Q}$  soll danach gelten:

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{[t,t+1]} = \text{diag}(\pi_{1,t}, \dots, \pi_{k-1,t}, 1)(\mathbf{Q} - \mathbf{I}) + \mathbf{I}. \quad (5.99)$$

Die Risikoprämien adjustieren die realen Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten  $q_{i,j}$  nach oben bzw. nach unten:

$$\tilde{q}_{i,j}(t, t+1) = \pi_i(t) \cdot q_{i,j}(t, t+1) \quad \forall \quad i, j, i \neq j, \quad (5.100)$$

$$\tilde{q}_{i,i}(t, t+1) = 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^k \tilde{q}_{i,j}(t, t+1). \quad (5.101)$$

JARROW, LANDOW & TURNBULL ermitteln nach der Methode des Bootstrappings mit Hilfe von restlaufzeitgestaffelten Bondpreisen der verschiedenen Ratingkategorien iterativ risikoneutrale Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten.<sup>956</sup>

<sup>951</sup> Vgl. auch A. Arvantis und J. Gregory (2004), Credit, S. 130 f. Für Details siehe Anlage 15.

<sup>952</sup> Vgl. Abschnitt 322.

<sup>953</sup> Die Forderung nach positiven Risikoprämien stellt sicher, dass die realen und risikoneutralen Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten äquivalent sind. Zu äquivalenten Wahrscheinlichkeitsmaßen vgl. die Ausführungen in Abschnitt 5211 sowie die dort angegebene Literatur.

<sup>954</sup> Vgl. R. Jarrow, D. Lando und S. Turnbull (1997), Credit risk spreads and Markov models, S. 488 f.

<sup>955</sup> Alternativ kann mit zeitabhängigen Forward-Ratingmigrationsmatrizen gem. (3.22) gearbeitet werden.

<sup>956</sup> Vgl. R. Jarrow, D. Lando und S. Turnbull (1997), Credit risk spreads and Markov models, S. 492 f.

Das Bootstrapping lässt sich prinzipiell auch mit Credit Default Swaps durchführen. Zur Demonstration seien verschiedene CDS-Risikoprämien zur Sicherung der Tilgungszahlungen von Krediten verschiedener Ratingkategorien beobachtbar. Der Einfachheit halber fallen die Prämienzahlungen jährlich an. Die Ausgleichszahlungen erfolgen zu den jeweiligen Prämienzahlungsterminen. Dann kann das Premium Leg eines CDS zur Sicherung der Tilgungszahlung eines Kredits mit dem Rating  $i$  mit Hilfe der Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten wie folgt geschrieben werden.<sup>957</sup>

$$Premium-Leg = \sum_{t=1}^m B(0,t) \cdot RP_{CDS,i} \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,t). \quad (5.102)$$

Durch analoge Anwendung von (3.10) und (3.21) in der risikoneutralen Welt, lässt sich die Summe der Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten  $\tilde{q}_{i,j}(0,t)$  in (5.102) auf der Basis der Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten des nächst kürzeren Zeitraums  $\tilde{q}_{i,j}(0,t-1)$  und den Forward-Ausfallwahrscheinlichkeiten  $\tilde{q}_{i,k}(t-1,t)$  darstellen:

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,t)\right) = \left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,t-1)\right) + \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,t-1) \cdot \tilde{q}_{j,k}(t-1,t). \quad (5.103)$$

Mit Gleichung (5.100) kann das Premium Leg schließlich explizit als Funktion der Risikoprämien  $\pi_{1,m-1}, \dots, \pi_{k-1,m-1}$  zur Adjustierung der realen (Forward-)Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten für den Zeitabschnitt  $[m-1, m]$  modelliert werden:

$$\begin{aligned} Premium-Leg &= RP_{CDS,i} \cdot \sum_{t=1}^{m-1} B(0,t) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,t) \\ &+ RP_{CDS,i} \cdot B(0,m) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,m-1) \\ &- RP_{CDS,i} \cdot B(0,m) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,m-1) \cdot q_{j,k}(m-1,m) \cdot \pi_{j,m-1}. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Das Protection Leg eines CDS zur Sicherung der Tilgungszahlung eines Kredits mit dem Rating  $i$  kann mit Hilfe der Ratingmigrationswahrscheinlichkeiten wie folgt geschrieben werden.<sup>958</sup>

$$Protection-Leg = (1 - \delta_i) \sum_{t=1}^m B(0,t) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,t) \cdot \tilde{q}_{j,k}(t-1,t). \quad (5.105)$$

<sup>957</sup> Vgl. P. Grundke (2000), Bewertung von Kreditderivaten, S. 22.

<sup>958</sup> Vgl. P. Grundke (2000), Bewertung von Kreditderivaten, S. 22 f.

Mit Gleichung (5.100) können erneut die Forward-Ausfallwahrscheinlichkeiten  $\tilde{q}_{i,k}(t-1,t)$  und damit auch das Protection Leg explizit als Funktion der Risikoprämien  $\pi_{1,m-1}, \dots, \pi_{k-1,m-1}$  modelliert werden:

$$\begin{aligned} \text{Protection-Leg} &= (1 - \delta_i) \cdot \sum_{t=1}^{m-1} B(0,t) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,t-1) \cdot \tilde{q}_{j,k}(t-1,t) \\ &+ (1 - \delta_i) \cdot B(0,m) \cdot \sum_{j=1}^{k-1} \tilde{q}_{i,j}(0,m-1) \cdot q_{j,k}(m-1,m) \cdot \pi_{j,m-1}. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Für jedes  $t=0, \dots, m-1$  kann pro Rating  $i=1, \dots, k-1$  eine Gleichung zur Erklärung von  $RP_{CDS,i}$  in Abhängigkeit der Risikoprämien  $\pi_{1,t}, \dots, \pi_{k-1,t}$  aufgestellt werden. Damit ist für jedes  $t$  ein Gleichungssystem mit  $k-1$  Unbekannten und  $k-1$  Gleichungen zu lösen. Bei der Anwendung des Verfahrens ist stets zu prüfen, ob die Risikoprämien tatsächlich positiv und die Matrizen  $\tilde{\mathbf{Q}}_{[t,t+1]}$  die Eigenschaften von stochastischen Matrizen erfüllen.<sup>959</sup> Verletzungen der Nebenbedingungen deuten auf Inkonsistenzen zwischen den beobachteten Swap-Sätzen und dem Modell hin. Zur Einhaltung aller Nebenbedingungen bietet es sich an, ein Optimierungsproblem derart zu formulieren, dass die Risikoprämien unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen genau so bestimmt werden, dass die Swap-Sätze aus dem Modell die tatsächlich beobachteten Swap-Sätze möglichst gut erklären.<sup>960</sup> Das Optimierungsproblem ist folglich ein Minimierungsproblem, wobei die Differenzen zwischen den Swap-Sätzen des Modells und den tatsächlich beobachtbaren Swap-Sätzen zu einer geeigneten Zielgröße zusammenzufassen sind.<sup>961</sup> Zur Implementation kann auf Standardsoftwarepakete wie den SOLVER i. V. m. MICROSOFT<sup>®</sup> EXCEL oder LOTUS<sup>®</sup> 1-2-3 zurückgegriffen werden.<sup>962</sup>

Bei halb- oder vierteljährlicher Zahlungsweise und einer entsprechend größeren Anzahl von CDS-Kontrakten kann die jährliche Ratingmigrationsmatrix  $\mathbf{Q}$  mit Hilfe der Generator-Matrix (3.19) und der Gleichung (3.20) auf den entsprechend kürzeren Zeithorizont bezogen werden.

Abschließend können die risikoneutralen Ratingmigrationsmatrizen mit den Gleichungen (3.23) und (3.24) sowie der in Abschnitt 322 dargestellten Methodik in Hazard Rate-Funktionen (Credit Curves des Typs C) überführt werden.

<sup>959</sup> Vgl. R. Jarrow, D. Lando und S. Turnbull (1997), Credit risk spreads and Markov models, S. 493.

<sup>960</sup> Optimierungsprogramme erweisen sich mit Blick auf einzuhaltende Nebenbedingungen als robuste Verfahren. Vgl. auch R. Martin, K. Thompson und C. Browne (2001), Price and probability, S. 115-117.

<sup>961</sup> Bspw. kann als Zielgröße die Summe der quadrierten Differenzen minimiert werden.

<sup>962</sup> Vgl. zum Excel-Solver M. Jackson und M. Staunton (2003), Excel and VBA in finance, S. 26 f., S. 106-109 u. S. 121 f.

## **523 Risikoneutrale Tranchenbewertung und Ermittlung fairer CDO-Risikoprämien**

### **5231 Duplikationstheoretische Betrachtung von CDOs**

Bewertungstheoretische Fragestellungen sind vor dem Hintergrund der hohen Flexibilität der Ausgestaltung von ABS-Strukturen im Allgemeinen und von CDO-Strukturen im Besonderen stets mit einer Analyse der spezifischen Gegebenheiten und Strukturmerkmale der jeweiligen Transaktion zu verbinden. Synthetische CDO-Transaktionen zeichnen sich insbesondere durch den Einsatz von Kreditderivaten<sup>963</sup> zum Transfer von Kreditrisiken unter Umgehung des True Sales aus. Neben Schuldverschreibungen, deren Tilgung an die Performance des Referenzportfolios gekoppelt ist, müssen zusätzlich Swapstrukturen einer Bewertung unterzogen werden. In der hier als Beispiel herangezogenen PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion werden die Junior-Tranche i. H. v. EUR 47,5 Mio. (4,75 %) und die Senior-Tranche i. H. v. EUR 894,75 Mio. (89,475 %) durch Credit Default Swaps (CDS) gesichert (*unfunded part of transaction*).<sup>964</sup> Anders als bei einem Plain Vanilla<sup>965</sup> CDS mit einem einzelnen Referenztitel, liegt hier ein Referenzportfolio zugrunde. Prinzipiell sind beide Strukturen aber identisch. Der Protection Buyer als Halter der referenzportfoliobezogenen Risikoposition erwirbt gegen Zahlung einer periodischen Risikoprämie (RP) an den Protection Seller das Recht, bei Eintritt eines oder mehrerer zuvor vertraglich vereinbarter Kreditereignisse, eine Kompensation für die daraus entstandenen Verluste vom Protection Seller zu erhalten. Der Portfolio Credit Default Swap ähnelt daher in seiner Wirkung einer übernommenen Garantie gegen Verluste durch zuvor genau spezifizierte Kreditereignisse. Wie Zins- oder Währungsswaps wird auch ein Portfolio Credit Default Swap so abgeschlossen, dass der Barwert, welcher bei jedem CDS aus dem Barwert potentieller Verlustkompensationen und dem Barwert der Risikoprämienzahlungen besteht, im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses null ist.<sup>966</sup> Damit erstreckt sich die CDS/CSO-Bewertung regelmäßig auf zwei Ebenen. Zum einen ist bei gegebener Risikoprämie der gegenwärtige Barwert des CDS/der CSO gesucht. Zum anderen stellt sich die Frage nach der „fairen“ Risikoprämie im Zeitpunkt des CDS/CSO-Abschlusses, wobei die faire Risikoprämie definitionsgemäß diejenige Risikoprämie ist, bei welcher der Barwert des CDS/der CSO exakt null beträgt.

Die Mezzanine-Tranchen von insgesamt EUR 57,75 Mio. (5,775 %) werden – das Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion fortführend – mit Credit Linked Notes verbrieft

---

<sup>963</sup> Vgl. Fn. 932.

<sup>964</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 7. Siehe zur synthetischen Verbriefung auch Abschnitt 233.

<sup>965</sup> Vgl. zum Plain Vanilla Begriff H.-P. Deutsch und R. Eller (1998), *Derivate und interne Modelle*, S. 28.

<sup>966</sup> Vgl. M. Steiner und C. Bruns (2002), *Wertpapiermanagement*, S. 575-584; M. Wilkens (2002), *Wertpapiermanagement*, S. 139-144 u. S. 153-159.

(funded part of transaction), wobei in erneuter Abgrenzung zum Plain-Vanilla-Produkt nicht ein einzelner Kredit als Referenztitel, sondern das Referenzportfolio als Underlying fungiert. CLNs werden in der Literatur<sup>967</sup> ebenso wie CDS in die Gruppe der Kreditderivate eingeordnet. Im einfachsten Fall zahlt eine festverzinsliche (Plain Vanilla) CLN einen risikoadäquaten periodischen Kupon (K) und den Nominalwert (NW), sofern während der Laufzeit kein Kreditereignis beim Referenztitel eintritt. Tritt ein solches Kreditereignis ein, endet der Kontrakt. Der Emittent der CLN zahlt dann die seit dem letzten Kuponzahlungs-termin  $t_K$  aufgelaufenen Stückzinsen  $NW(r+RP_{CLN})(\tau-t_K)$  sowie den Nominalbetrag der CLN, abzüglich eines Ausgleichsbetrags in Höhe des nicht befriedigten Teils des Anspruchs auf Zins- und Tilgungszahlung aus dem Referenztitel  $(1-\delta)[NW(r+RP_{KA})(\tau-t_K)+NW]$ .<sup>968</sup> Stimmen – wie im Weiteren unterstellt – der Nominalwert der CLN und der Nominalwert des Referenztitels überein, erhält man als Zahlung im Ausfallzeitpunkt  $\tau$ :

$$NW \cdot (r + RP_{CLN}) \cdot (\tau - t_K) + NW - (1 - \delta) \cdot [NW \cdot (r + RP_{KA}) \cdot (\tau - t_K) + NW] \\ = \delta \cdot [NW \cdot (r + RP_{KA}) \cdot (\tau - t_K) + NW] + NW \cdot (RP_{CLN} - RP_{KA}) \cdot (\tau - t_K). \quad (5.107)$$

Bildet man ein Portfolio, bestehend aus dem Referenztitel und einer Short CLN auf diesen Referenztitel, führen Arbitrageüberlegungen dazu, dass beide Risikoprämien übereinstimmen müssen und so der Inhaber der CLN im Falle des Kreditereignisses mit (5.107) und  $(RP_{CLN} - RP_{KA}) = 0$  genau den wiedergewonnenen Teil des Referenztitelanspruches erhält.

Duplikationstheoretisch können CLNs als strukturierte Produkte aufgefasst werden. Tritt der Inhaber der CLN zusätzlich als Sicherungsnehmer in einem CDS, bezogen auf ein und denselben Referenztitel auf, erhält er im Falle eines Kreditereignisses den nicht befriedigten Teil des Anspruches. Damit dupliziert ein Portfolio, bestehend aus einer CLN und einem CDS einen ausfallrisikofreien Zahlungsanspruch, wobei das Risiko einer vorzeitigen Tilgung des synthetisch generierten ausfallrisikofreien Zahlungsanspruches verbleibt. Folglich kann eine CLN als strukturiertes Produkt, bestehend aus einem CDS und einer ausfallrisikofreien Kuponanleihe mit vorzeitiger Tilgungsmöglichkeit, aufgefasst werden. Unter Vernachlässigung des Risikos einer vorzeitigen Tilgung der synthetischen ausfallrisikofreien Kuponanleihe kann von der Risikoprämie des CDS auf die Risikoprämie der CLN geschlossen werden. Die Höhe der so ermittelten Risikoprämie wird allerdings – wenn auch nur in marginalem Ausmaß – unterschätzt.

<sup>967</sup> Vgl. M. Steiner und C. Bruns (2002), Wertpapiermanagement, S. 589-592.

<sup>968</sup> Der Anspruch aus dem Referenztitel umfasst hier sowohl den Nominalwert als auch die aufgelaufenen Stückzinsen. Vgl. auch J. Hull (2003), Options, futures and other derivatives, S. 637-640. Der Zinssatz  $r$  ist als laufzeitadäquater ausfallrisikofreier Zinssatz im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses zu verstehen.

Eine perfekte Duplikation unter Ausschaltung des Risikos der vorzeitigen Tilgung wäre nur dann erreicht, wenn die Definition der Recovery Rate sowohl bei der CLN als auch beim CDS modifiziert würde. Tritt das Kreditereignis ein, müsste die CLN nicht den wiedergewonnenen Teil des Referenztitelanspruchs gem. (5.107), sondern den wiedergewonnenen Teil zahlen, gemessen anhand des Marktwertes einer in Laufzeit und Kuponhöhe äquivalenten risikofreien Kuponanleihe (Fractional Recovery of Treasury Value).<sup>969</sup> Der CDS wiederum hätte exakt den Fehlbetrag zum vollständigen Marktwert auszugleichen. Ein Portfolio, bestehend aus einer CLN und einem CDS mit so modifizierten Recovery-Vereinbarungen, würde das Zahlungsprofil eines ausfallrisikofreien Zahlungsanspruchs ohne das Risiko einer vorzeitigen Tilgung widerspiegeln. Die Risikoprämien der CLN und des CDS entsprächen einander.

Referenzportfolioperformanceindizierte Schuldverschreibungen bei CDO-Transaktionen können einer analogen Betrachtung unterzogen werden. Neben der Referenz auf eine Vielzahl von Krediten kommt erschwerend hinzu, dass i. d. R. eine *variable Verzinsung* in Abhängigkeit eines marktgängigen Referenzzinssatzes zuzüglich einer Risikoprämie vereinbart wird. Die Höhe der einzelnen Zinszahlungen zukünftiger Zeitpunkte ist folglich nicht gegeben, wodurch eine traditionelle Bewertung durch Diskontierung zunächst entfällt. Im Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion sind Mezzanine-Tranchen an den EURIBOR gekoppelt, wobei folgende Risikoprämien bei vierteljährlicher Zahlung vereinbart wurden:<sup>970</sup>

Tranche	Class D	Class C	Class B	Class A	Class A+
Risikoprämie	3,50 % p.a.	1,30 % p.a.	0,65 % p.a.	0,45 % p.a.	0,25 % p.a.

**Tab. 5-5: Risikoprämien einzelner CDO-Tranchen**

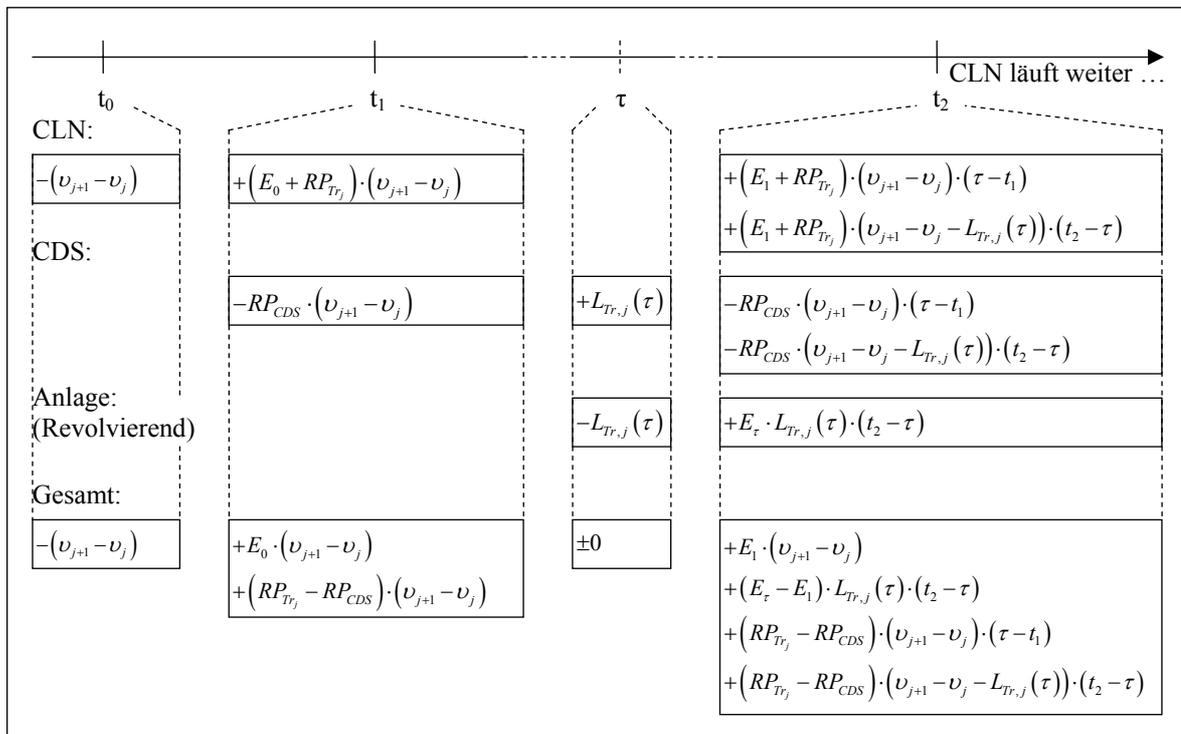
Eine Lösung, ohne die Referenzzinssätze explizit modellieren zu müssen, besteht im obigen Duplikationsansatz. Ziel ist es dabei, die variabel verzinslichen CLNs mit Referenzbaskets durch Floating Rate Notes (FRN) und CDS auf diese Referenzbaskets zu duplizieren. In Abb. 5-12 ist der Zahlungsstrom einer (senioritätsmäßig nachrangigen) CLN  $j$  mit einem Credit Enhancement i. H. v.  $v_j$  und einem Nominalwert i. H. v.  $(v_{j+1}-v_j)$  beispielhaft abgetragen. Bleibt die CLN von Kreditausfällen im Referenzportfolio unberührt, zahlt diese periodisch<sup>971</sup> in nachschüssiger Form den Referenzzinssatz EURIBOR  $E_{0,1,2,\dots}$ , eine Risikoprämie  $RP_{CLN}$  (bzw.  $RP_{TRj}$ ) und schließlich den Nominalwert  $v_{j+1}-v_j$ . Werden der CLN –

<sup>969</sup> Vgl. zu den Auswirkungen diverser Recovery-Vereinbarungen bei CDS-Geschäften P. Grundke (2000), Bewertung von Kreditderivaten, S. 20 f. Siehe auch die Ausführungen in Abschnitt 5.2.142.

<sup>970</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 25 f., Abschnitt 7.5.

<sup>971</sup> Im Beispiel der Abb. 5-12 findet die Zahlung jährlich statt, d. h.  $t_2 - t_1 = t_1 - t_0 = 1$ .

wie in Abb. 5-12 unterstellt – Verluste aus dem Referenzportfolio entsprechend der Senioritätsstruktur der Transaktion zugeordnet, vermindert sich der Nominalbetrag respektive das noch gebundene Kapital und damit die Zinsbasis. Aufgelaufene Stückzinsen bis zum Kreditereignis in  $\tau$  auf den noch unverminderten Nominalbetrag werden (annahmegemäß) zum nächsten Zinszahlungstermin geleistet:



**Abb. 5-12: Duplikation von CLNs mit Referenzbaskets bei nachschüssiger Prämienzahlung**

Tritt der Inhaber der CLN zusätzlich als Sicherungsnehmer in einem CDS, bezogen auf ein und dasselbe Referenzportfolio bei identischer Senioritätsstruktur auf, erhält er im Zeitpunkt des Kreditereignisses  $\tau$  eine Entschädigung für die Verminderung des Nominalwertes in betragsgleicher Höhe. Die Ausgleichszahlung kann am Geld- und Kapitalmarkt zum risikofreien Zins  $E_\tau$  angelegt werden. Die Zinszahlungen aus der Geldanlage wirken den verminderten Zinszahlungen aus der CLN mit Blick auf die reduzierte Zinsbasis entgegen. Hinzu kommt, dass die zu zahlende Prämie für den CDS mit der Verminderung des abzusichernden Nominalbetrages sinkt, was dazu führt, dass nicht nur der risikofreie Teil der verminderten Zinszahlung aus der CLN, sondern auch der risikoprämienbasierte Teil kompensiert wird. Gilt  $E_I = E_\tau$ , dann ist mit  $(E_\tau - E_1) \cdot L_{Tr,j}(\tau) \cdot (t_2 - \tau) = 0$  die Kompensation perfekt. Davon kann jedoch nur dann mit einer Wahrscheinlichkeit von eins ausgegangen werden, wenn die Zinsstruktur zum einen flach und zum anderen konstant ist.<sup>972</sup> Die Zins-

<sup>972</sup> In der Literatur wird eine solche Zinsstruktur z. T. kommentarlos impliziert oder ihre Notwendigkeit lediglich beiläufig erwähnt. Zahlungszeitpunkte und Wiederanlageproblematiken werden kaum diskutiert. Vielmehr wird begrifflich unscharf von Ausfallkosten gesprochen. Vgl. J. Gregory und J.-P. Lau-

struktur muss flach sein, da sich die Zinssätze  $E_1$  und  $E_\tau$  i. d. R. auf verschiedene Zeiträume beziehen. Die Zinsstruktur muss konstant sein, da der Zeitpunkt des Kreditereignisses  $\tau$  a-priori unbekannt ist. Wird von einer flachen und konstanten Zinsstruktur ausgegangen, folgt sofort die Identität der Risikoprämien  $RP_{CLN}$  und  $RP_{CDS}$ . Wäre nämlich  $RP_{CLN} > RP_{CDS}$ , führte ein Portfolio, bestehend aus einer Short FRN mit einem Nominalbetrag i. H. v.  $(v_{j+1} - v_j)$ , einer Long CLN und einem Long CDS unabhängig davon, ob ein Kreditereignis eintritt oder nicht, stets zu einem positiven Payoff<sup>973</sup>, ohne einen anfänglich zu leistenden Kapitaleinsatz. Wäre umgekehrt  $RP_{CLN} < RP_{CDS}$ , könnte ganz analog und mit selbigem Resultat, ein Portfolio mit einer Long FRN, einer Short CLN und einem Short CDS aufgebaut werden. Damit dupliziert bei flacher und konstanter Zinsstruktur ein Portfolio, bestehend aus einer variabel und nachschüssig verzinslichen CLN, einem CDS auf den selben Referenzbasket sowie revolvingenden kurzfristigen ausfallrisikofreien Geldanlagegeschäften in Höhe der CDS Ausgleichszahlungen, einen ausfallrisikofreien, variabel verzinslichen Zahlungsanspruch. Umgekehrt kann eine variabel und nachschüssig verzinsliche CLN als strukturiertes Produkt, bestehend aus einem CDS, einer ausfallrisikofreien Floating Rating Note und revolvingenden kurzfristigen ausfallrisikofreien Geldaufnahme-geschäften zur (Zwischen-)Finanzierung der CDS-Ausgleichszahlungen, aufgefasst werden. Von der Risikoprämie des CDS kann somit auf die Risikoprämie der CLN geschlossen werden. Kann nicht von einer flachen und konstanten Zinsstruktur ausgegangen werden, liegt wegen  $(E_\tau - E_1) \cdot L_{Tr,j}(\tau) \cdot (t_2 - \tau) \neq 0$  – ähnlich wie bereits beim Plain-Vanilla-Produkt – ein Wiederanlageisiko vor.<sup>974</sup> Die Risikoprämie der CLN dürfte ausgleichend – Risikoaversion sei stets unterstellt – leicht oberhalb der Risikoprämie des CDS liegen.

Ein verändertes Bild ergibt sich, wenn die Zins- und Prämienzahlungen stets vorschüssig und die Ausgleichszahlungen des CDS nicht im Zeitpunkt des Kreditereignisses  $\tau$ , sondern zu den regulär vereinbarten Prämienzahlungszeitpunkten erfolgen. Dann können die Ausgleichszahlungen zum jeweils aktuell gültigen Referenzzinssatz  $E_{0,1,2,\dots}$  ausgleichend zur verminderten Zinsbasis der CLN angelegt werden. Die Risikoprämien der CLN und des CDS entsprechen einander und beziehen sich stets auf denselben (ggf. verminderten) No-

---

rent (2004), Beste Überlebenschancen, S. 35-37; J. Hull und A. White (2004), Valuation of CDOs and CDSs, S. 16.

<sup>973</sup> Anhand des Beispiels in Abb. 5-12 betrüge – das Ausbleiben eines Kreditereignisses unterstellt – der Payoff  $(RP_{Tr_j} - RP_{CDS}) \cdot (v_{j+1} - v_j)$ . In der Periode des Kreditereignisses erhalte der Arbitrageur einen verminderten, jedoch positiven Betrag von  $(RP_{Tr_j} - RP_{CDS}) \cdot (v_{j+1} - v_j) - (RP_{Tr_j} - RP_{CDS}) \cdot L_{Tr,j}(\tau) \cdot (t_2 - \tau)$  mit  $0 \leq (t_2 - \tau) < 1$  und  $L_{Tr,j}(\tau) \leq (v_{j+1} - v_j)$ .

<sup>974</sup> Das Problem der Wiederanlage wird in der Literatur häufig „wegdefiniert“, indem angenommen wird, dass Kreditereignisse ausschließlich zu Kuponzahlungsterminen stattfinden. Vgl. bspw. P. Grundke (2000), Bewertung von Kreditderivaten, S. 49 f. und Fn. 81. Im Rahmen des hier betrachteten Beispiels wäre der Ausdruck  $(E_\tau - E_1) \cdot L_{Tr,j}(\tau) \cdot (t_2 - \tau)$  unter einer solchen Annahme wegen  $t_2 = \tau$  stets null.

minalbetrag. Zu klären bleibt die Behandlung der vorschüssigen risikofreien Verzinsung. Eine Investition einer Geldeinheit zum aktuellen Referenzzinssatz  $E$  bei vorschüssiger Zinszahlung führt bei barwertiger Betrachtung zu einem Wert von:

$$-1 + E \cdot \Delta t + \frac{1}{1 + E \cdot \Delta t} = \frac{E^2 \cdot \Delta t^2}{1 + E \cdot \Delta t} = \frac{E \cdot \Delta t}{\left(\frac{1}{E \cdot \Delta t} + 1\right)} < E \cdot \Delta t. \quad (5.108)$$

Eine entsprechende Korrektur der Zinszahlung  $E \cdot \Delta t$  führt, sofern die korrigierte Zinszahlung am Geld- und Kapitalmarkt bei nachschüssiger Zahlungsweise angelegt wird, zur Zahlungsstruktur einer Plain Vanilla Floating Rate Note:

$$\left(E \cdot \Delta t - \frac{E^2 \cdot \Delta t^2}{1 + E \cdot \Delta t}\right) \cdot (1 + E \cdot \Delta t) = E \cdot \Delta t. \quad (5.109)$$

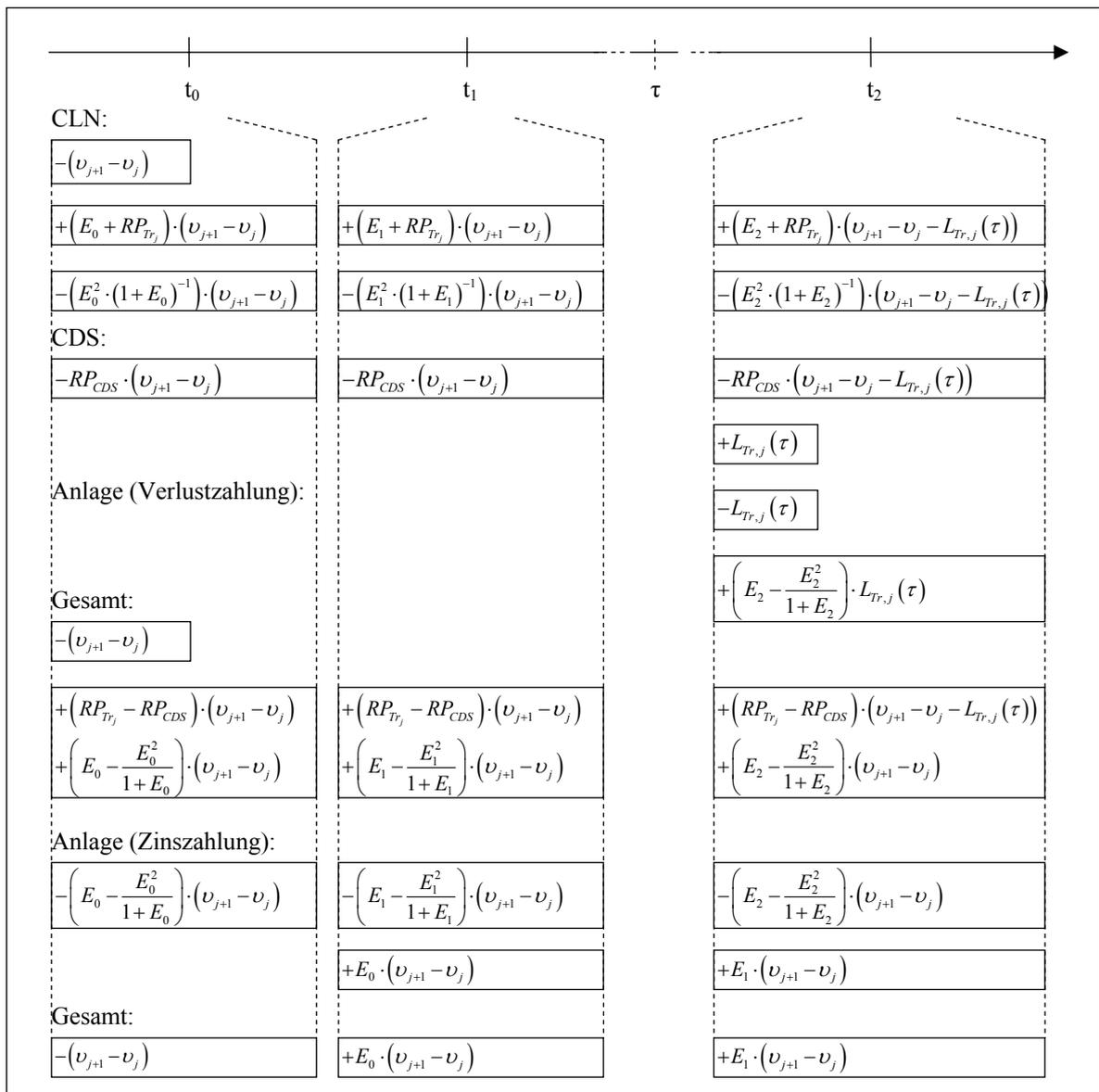


Abb. 5-13: Duplikation von CLNs mit Referenzbaskets bei vorschüssiger Prämienzahlung

Eine variabel und vorschüssig verzinsliche CLN kann demnach immer als strukturiertes Produkt, bestehend aus einem CDS mit vorschüssiger Prämienzahlung und nachschüssiger Ausgleichzahlung, einer ausfallrisikofreien Floating Rate Note, revolvingenden, kurzfristigen, ausfallrisikofreien Geldaufnahme-geschäften zur (Zwischen-)Finanzierung der CDS Ausgleichszahlungen und ausfallrisikofreien Geldaufnahme-geschäften zur (Vor-)Finanzierung der Floating Rate Note-Zinszahlungen verstanden werden.

### **5232 Semi-analytische Ermittlung risikoneutraler Tranchenbarwerte**

Wird allgemein von Tranchenbarwerten als Sammelbegriff gesprochen, ist im speziellen danach zu unterscheiden, ob ein finanzmittelzufließender Finanzkontrakt (*funded part of transaction*) oder ein Finanzkontrakt, der lediglich gegen Zahlung einer (periodischen) Risikoprämie bestimmte Verluste aus Ausfällen im Referenzportfolio sichert (*unfunded part of transaction*), betrachtet wird. Im ersten Fall ist eine Schuldverschreibung zu bewerten, deren Tilgung an die Performance des Referenzportfolios gekoppelt ist. Im zweiten Fall ist der Wert einer derivativen Struktur gesucht, die an die Funktionsweise eines Credit Default Swaps erinnert.

Gemäß den obigen duplikationstheoretischen Überlegungen kann der Zahlungsstrom einer variabel und vorschüssig verzinslichen CDO mit einer dem Prinzip der Subordination folgenden, referenzportfolioorientierten Verlustpartizipation mit einer ausfallrisikofreien Floating Rate Note, einem Credit Default Swap mit vorschüssiger Prämienzahlung und nachschüssiger Verlustausgleichszahlung, der die zugeordneten Verluste aus dem Referenzportfolio absichert, sowie (revolvingenden) kurzfristigen ausfallrisikofreien Geldaufnahme-geschäften zur Finanzierung der CDS-Ausgleichszahlungen und Vorfinanzierung der FRN-Zinszahlungen, abgebildet werden. Die Zuordnung von Verlusten aus dem Referenzportfolio erfolgt genau dann, wenn die Portfolioverluste  $L_{RP}$  das Credit Enhancement Level  $v_j$  überschreiten, jedoch nur soweit sie die entsprechende Tranchestärke  $(v_{j+1}-v_j)$  mit  $j=1, \dots, J$  nicht übertreffen.<sup>975</sup> Sofern die Zahlungstermine der FRN und des CDS zusammenfallen und mit den Zahlungsterminen der CDO übereinstimmen, sind der Zahlungsstrom aus dem Duplikationsportfolio und der Zahlungsstrom der CDO unabhängig davon, ob ein oder mehrere Kreditereignisse eintreten, stets identisch. Die CDO und ihr Duplikationsportfolio weisen denselben (Bar-)Wert und dasselbe Risiko auf. Die einzelnen Bausteine des Duplikationsportfolios können zunächst separat einer Bewertung unterzogen werden. Den Wert des Duplikationsportfolios, respektive der CDO, erhält man durch Addition der Einzelwerte. Mit Hilfe dieses als „*Evaluation by Duplication*“ bekannten Verfah-

---

<sup>975</sup> Vgl. Abschnitt 5111.

rens<sup>976</sup> ermittelt sich der Wert der CDO als Barwert der FRN zuzüglich des Barwertes des CDS. Die (revolvierenden) Geldaufnahmen zum jeweils aktuell gültigen Zinssatz weisen (zu den Abschlusszeitpunkten) einen Barwert von null auf:

$$CDO_j = FRN + CDS_j (+Geldaufnahmen). \quad (5.110)$$

Zahlt die CDO nachschüssig, ist die Bewertung gem. (5.110) mit den obigen duplikations-theoretischen Betrachtungen nur unter der Annahme einer konstanten und flachen Zinsstruktur exakt. Der zur Duplikation verwendete CDS hat zudem die Ausgleichszahlungen zu den jeweiligen Kreditereigniszeiten zu leisten.<sup>977</sup> Liegt keine konstante und/oder flache Zinsstruktur vor, unterliegt der Investor einem Wiederanlagerisiko der Ausgleichzahlungen. Eine Bewertung mit (5.110) impliziert die Vernachlässigung des Wiederanlagerisikos.

Wird die betrachtete Tranche – wie bei der Junior- und der Senior-Tranche einer CDO-Transaktion häufig anzutreffen – nicht durch einen zahlungsmittelzufließenden Finanzkontrakt gesichert, ist lediglich die Ermittlung des Barwertes des CDS von Interesse. Eine Anlage zugeflossener liquider Mittel zum jeweils aktuell gültigen Zinssatz in Form einer FRN ist nicht zu betrachten.

Floating Rate Notes<sup>978</sup> werden bewertet, indem ihr Zahlungsstrom durch revolvierende, den Fristigkeiten der Kuponzahlungstermine und damit den Fristigkeiten der Zinsanpassungen entsprechenden Geldanlagegeschäfte dupliziert wird. Dem Evaluation by Duplication-Ansatz folgend, notiert die FRN in den Zeitpunkten der Emission und den nachfolgenden Zinsanpassungen zu pari. Zwischenzeitlich hängt der Kurs vom jeweiligen Marktzinsniveau ab. Er ermittelt sich durch Diskontierung des Nominalwertes und der Zinszahlung nach Maßgabe des zuvor fixierten Referenzzinssatzes vom Zeitpunkt des nächst folgenden Zinszahlungstermins auf den gegenwärtigen Betrachtungszeitpunkt unter Berücksichtigung des gegenwärtigen, fristigkeitskongruenten Marktzinssatzes, der relevanten Zinskonvention und der aufgelaufenen Stückzinsen.<sup>979</sup>

Der Barwert des CDS setzt sich zusammen aus den Erwartungswerten der laufzeitgerecht diskontierten Risikoprämienzahlungen und den laufzeitgerecht diskontierten Kompensationszahlungen unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$ .<sup>980</sup> Zahlt der CDS

<sup>976</sup> Vgl. M. Wilkens, H. Scholz und J. Völker (1999), Bewertung strukturierter Finanzprodukte, S. 262-264.

<sup>977</sup> Vgl. schematisch die Abb. 5-12.

<sup>978</sup> Vgl. übersichtshalber M. Steiner und C. Bruns (2002), Wertpapiermanagement, S. 137-139.

<sup>979</sup> Vgl. beispielhaft M. Wilkens (2002), Wertpapiermanagement, S. 110-112.

<sup>980</sup> Vgl. auch die Vorgehensweise zur Bewertung eines Plain Vanilla CDS in Abschnitt 5221.

vorschüssig, erfolgen die Risikoprämienzahlungen – basierend auf der vertraglich vereinbarten Risikoprämie  $RP_{TR,j}$  – zu den vertraglich vereinbarten Zahlungszeitpunkten  $t_{j,n}$  mit  $n=1, \dots, m$ , wobei  $t_{j,1} \geq 0$ <sup>981</sup> und  $t_{j,m+1} = T_{CDS,j}$  gelten. Bei halbjährlicher oder vierteljährlicher Zahlungsweise wird die Risikoprämie über  $\Delta t_{j,n}$  mit  $\Delta t_{j,n} = t_{j,n+1} - t_{j,n}$  für  $n=1, \dots, m-1$  und  $\Delta t_{j,n} = T_{CDS,j} - t_{j,n}$  für  $n=m$  einer linearen Skalierung unterzogen, wobei  $\Delta t_{j,n}$  in Abhängigkeit der verwendeten Zinskonvention für verschiedene  $n$  unterschiedliche Werte annehmen kann. Der Betrag der Prämienzahlung sinkt, wenn durch Kreditausfälle im Referenzportfolio der verbleibende, zu sichernde Betrag sinkt. Deshalb ist die Risikoprämie  $RP_{TR,j}$  auf den jeweils in  $t_{j,n}$  noch zu sichernden Betrag  $(v_{j+1} - v_j) - L_{Tr,j}(t_{j,n})$  zu beziehen. Der Erwartungswert der laufzeitgerecht diskontierten Risikoprämienzahlungen ist unter Berücksichtigung aller vertraglich vereinbarter Zahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$  zu bilden:

$$Premium-Leg = E_{Q^r} \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{B(t_{j,n})} \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (v_{j+1} - v_j) - L_{Tr,j}(t_{j,n}) \right) \right). \quad (5.111)$$

Mit den Eigenschaften der kanonischen Konstruktion von  $(\Omega'', \mathcal{F}'', Q'')$  erhält man:

$$Premium-Leg = \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (v_{j+1} - v_j) - EL_{Tr,j}(t_{j,n}) \right). \quad (5.112)$$

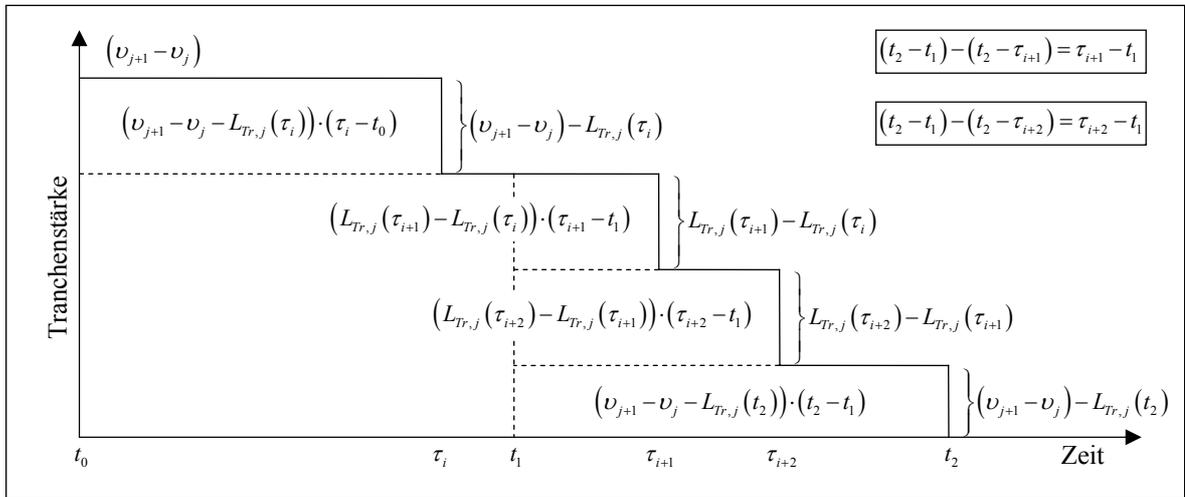
Der erwartete Verlust der Tranche  $j$  ergibt sich gem. (5.8), wobei die Koeffizienten der erzeugenden Funktion des Referenzportfolioverlustes unter Verwendung risikoneutraler Hazard Rate-Funktionen zu ermitteln sind. Im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses  $t_{j,1} = 0$  ist der erwartete Tranchenverlust null. Die Prämienzahlung erfolgt in voller Höhe.

Zahlt der CDS nachschüssig, erfolgen die Risikoprämienzahlungen zu den vertraglich vereinbarten Zahlungszeitpunkten  $t_{j,n}$  mit  $n=1, \dots, m$ , wobei  $t_{j,1} > 0$  und  $t_{j,m} = T_{CDS,j}$  gelten. Bei halbjährlicher oder vierteljährlicher Zahlungsweise wird die Risikoprämie über  $\Delta t_{j,n}$  mit  $\Delta t_{j,n} = t_{j,n} - t_{j,n-1}$  für  $n=1, \dots, m$  einer linearen Skalierung unterzogen.<sup>982</sup> Ohne Berücksichtigung von aufgelaufenen Ansprüchen auf Prämienzahlungen für abgesicherte, jedoch aufgrund von zugeordneten Verlusten aus dem Referenzportfolio zukünftig nicht mehr zu sichernden Beträgen, ist die Vorgehensweise zur Ermittlung des Erwartungswertes der laufzeitgerecht diskontierten Prämienzahlungen, abgesehen davon, dass die Zahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$  sowie die Zeiträume  $\Delta t_{j,n}$  im Vergleich zur vorschüssigen Zahlungsweise ver-

<sup>981</sup> Im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses gilt  $t_{j,1} = 0$ . Befindet man sich nicht im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses und nicht in einem nachfolgenden Prämienzahlungszeitpunkt gilt  $t_{j,1} > 0$ . Für eine übersichtliche Gestaltung der Bewertungsformeln sei im Weiteren regelmäßig  $t_{j,1} = 0$  angenommen.

<sup>982</sup> Befindet man sich nicht im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses und nicht im Zeitpunkt einer nachfolgenden Prämienzahlung ist zu beachten, dass  $\Delta t_{j,1} > t_{j,1}$  gilt.

schiedene Werte annehmen, mit der obigen identisch und führt zur Gleichung (5.112). Für den ersten Prämienzahlungszeitpunkt  $t_{j,i}$  ist der erwartete Tranchenverlust ungleich null. Die Prämienzahlung erfolgt nicht notwendigerweise in voller Höhe.



**Abb. 5-14: Abnehmende Tranchenstärke und nachschüssige CDO-(Teil-)Prämienzahlungen**

Werden der Tranche  $j$  Verluste aus dem  $i$ -ten Kreditereignis des Referenzportfolios zugeordnet, vermindert sich der zu sichernde Betrag um den zugeordneten Verlust. Sei  $t_{j,n^*}$  der Prämienzahlungszeitpunkt, der unmittelbar dem Zeitpunkt des  $i$ -ten Kreditereignisses  $\tau_{FP,i}$  folgt. Sei der Anschaulichkeit halber weiterhin unterstellt, dass außer dem  $i$ -ten Kreditereignis kein weiteres Kreditereignis innerhalb des betrachteten Zeitabschnittes  $(t_{j,n^*} - \Delta t_{j,n^*}, t_{j,n^*}]$  stattfindet. Dann wird durch (5.112) nicht der zusätzliche Prämienzahlungsanspruch, bezogen auf den bis zum Kreditereigniszeitpunkt  $\tau_{FP,i}$  gegenüber  $(v_{j+1} - v_j) - L_{Tr,j}(t_{j,n^*})$  zusätzlich gesicherten Betrag  $L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}) - L_{Tr,j}(t_{j,n^*} - \Delta t_{j,n^*})$ , berücksichtigt. Werden mehrere Kreditereignisse innerhalb eines Zeitabschnittes  $(t_{j,n} - \Delta t_{j,n}, t_{j,n}]$  zugelassen und bezeichnet  $L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}^-)$  mit  $\tau_{FP,i}^- = \lim_{t \rightarrow \tau_{FP,i}^-} t$  und  $t < \tau_{FP,i}$  den zugeordneten Verlust unmittelbar vor dem  $i$ -ten Kreditereignis, erhält man die nachschüssige Prämienzahlung für diesen Zeitabschnitt durch Berücksichtigung der zusätzlichen Prämienzahlungsansprüche für die zusätzlich gesicherten Beträge  $L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}) - L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}^-)$  soweit die betrachteten Kreditereignisse auf den Zeitabschnitt  $(t_{j,n} - \Delta t_{j,n}, t_{j,n}]$  entfallen (vgl. Abb. 5-14). Der Zeitabschnitt der zusätzlichen Sicherung  $\Delta t_{j,i}$  ermittelt sich wie folgt:

$$\Delta t_{j,i} = \left( \Delta t_{j,n^*(\tau_{FP,i})} - \left( t_{j,n^*(\tau_{FP,i})} - \tau_{FP,i} \right) \right) \quad \forall \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.113)$$

Die Definition des Tranchenverlustes  $L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}^-)$  für das  $i$ -te Kreditereignis ist sinnvoll und problemlos, da die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Kreditereigniszeiten  $\tau_{FP,i}$  und  $\tau_{FP,i}$  den selben Wert aufweisen, wegen den unterstellten zeitstetigen Wahrscheinlichkeitsver-

teilungen von  $\tau_{FP,i}$  und  $\tau_{FP,i}$  stets null beträgt. Soll nun der Erwartungswert der laufzeitgerecht diskontierten Risikoprämienzahlungen unter Berücksichtigung aufgelaufener Prämienzahlungsansprüche ermittelt werden, ist zusätzlich zu (5.112) der Erwartungswert über alle denkbaren Ereigniszeiten  $\tau_{FP,i}$  mit  $i=1, \dots, N$  und den entsprechenden Prämienzahlungsansprüchen zu bilden, soweit diese vor dem Fälligkeitszeitpunkt des CDS liegen.<sup>983</sup>

$$\begin{aligned}
 \text{Premium-Leg} = & \\
 E_{Q^*} & \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{B(t_{j,n})} \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (v_{j+1} - v_j) - L_{Tr,j}(t_{j,n}) \right) \right) \\
 & + E_{Q^*} \left( \sum_{i=1}^N 1_{\{\tau_{FP,i} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,i}))} \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,i} \cdot \left( L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}) - L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}^-) \right) \right).
 \end{aligned} \tag{5.114}$$

Der Ausfallindikator im zweiten Summanden von (5.114) kann eliminiert werden, wenn unter Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Kreditereigniszeiten über den Zeitraum  $[0, T_{CDS,j}]$  integriert wird. Problematisch ist zunächst, dass sowohl  $\tau_{FP,i}$  als auch  $\tau_{FP,i}^-$  als Variable erscheinen. Zur Lösung ist es hilfreich, den Tranchenverlust  $L_{Tr,j}$ , Gleichung (5.2) folgend, explizit als Funktion des Referenzportfolioverlusts  $L_{RP}$  zu schreiben. Mit (3.164) wird deutlich, dass der Referenzportfolioverlust in  $\tau_{FP,i}^-$  als Funktion von  $\tau_{FP,i}$  geschrieben werden kann:<sup>984</sup>

$$L_{RP}(\tau_{FP,i}^-) = \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(\tau_{FP,i}), \tag{5.115}$$

$$L_{RP}(\tau_{FP,i}) = \sum_{b=1}^N L_b(\tau_{FP,i}) = \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(\tau_{FP,i}) + (1 - \delta_i) \cdot D_i. \tag{5.116}$$

Damit erhält man für den zweiten Summanden aus (5.114):

$$\begin{aligned}
 E_{Q^*} & \left( \sum_{i=1}^N 1_{\{\tau_{FP,i} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,i}))} \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,i} \right. \\
 & \left. \times \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(\tau_{FP,i}) + (1 - \delta_i) \cdot D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(\tau_{FP,i}) \right) \right) \right).
 \end{aligned} \tag{5.117}$$

<sup>983</sup> Vgl. grundsätzlich zur Vorgehensweise J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 18. Dort wird jedoch unterstellt, dass die aufgelaufenen Prämienzahlungsansprüche unmittelbar im Zeitpunkt der einzelnen Kreditereignisse ausgezahlt werden. Dies ist jedoch mit Blick auf die Duplikation der Credit Linked Notes gem. Abb. 5-12 kritisch zu sehen.

<sup>984</sup> Vgl. J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 18.

Mit dieser Transformation kann problemlos über die Zeit integriert werden. Damit sowohl die Werte für  $t_{j,n^*}$  als auch für  $\Delta t_{j,n^*}$  einfach festgestellt werden können, bietet es sich an, die Integration abschnittsweise in Abhängigkeit der Prämienzahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$  durchzuführen. Mit  $dQ''(\tau_{FP,i} \leq t) = dF_{\tau_{FP,i}}(t) = h_{i,t} \cdot \exp(-H_{i,t})$  und den Eigenschaften der kanonischen Konstruktion von  $(\Omega'', \mathcal{F}'', Q'')$  erhält man schließlich:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} \left( B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot (t - t_{j,n-1}) \right. \quad (5.118)$$

$$\left. \times E_{Q''} \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) + (1 - \delta_i) \cdot D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) \right) \right) \cdot h_{i,t} \cdot e^{-H_{i,t}} \cdot dt \right).$$

Zur Erwartungswertbestimmung in (5.118) bedarf es der Kenntnis der Verteilungen für  $\sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) + (1 - \delta_i) \cdot D_i$  und  $\sum_{b=1, b \neq i}^N L_n(t)$ . Liegt eine konstante Recovery Rate vor und entstammen die Verluste  $D_i(1 - \delta_i)$  der Menge der natürlichen Zahlen, kann zur Ermittlung der Verteilung auf das Instrument der (wahrscheinlichkeits-)erzeugenden Funktion und das Sequential Probability Shifting zurückgegriffen werden.<sup>985</sup> Die erzeugende Funktion  $G_{L_{RP}(t)}^{(+i)}(z) | \Psi$  für  $\sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) + (1 - \delta_i) \cdot D_i$ , bedingt auf den Faktor  $\Psi$ , kann mit Hilfe von (3.169) ermittelt werden, wenn für den  $i$ -ten Kredit die Ausfallwahrscheinlichkeit in (3.168) (gedanklich) einen Wert von eins zugewiesen bekommt. Demgegenüber ist für die erzeugende Funktion  $G_{L_{RP}(t)}^{(-i)}(z) | \Psi$  für  $\sum_{b=1, b \neq i}^N L_n(t)$ , bedingt auf  $\Psi$ , die Ausfallwahrscheinlichkeit gedanklich auf null zu setzen.<sup>986</sup>

$$G_{L_{RP}(t)}^{(+i)}(z) | \Psi = z^{(1-\delta_i) \cdot D_i} \cdot \prod_{b=1, b \neq i}^N \left( (1 - Q''(\tau_{FP,b} \leq t | \Psi)) + Q''(\tau_{FP,b} \leq t | \Psi) \cdot z^{(1-\delta_b) \cdot D_b} \right), \quad (5.119)$$

$$G_{L_{RP}(t)}^{(-i)}(z) | \Psi = \prod_{b=1, b \neq i}^N \left( (1 - Q''(\tau_{FP,b} \leq t | \Psi)) + Q''(\tau_{FP,b} \leq t | \Psi) \cdot z^{(1-\delta_b) \cdot D_b} \right). \quad (5.120)$$

Soll auf das Instrument der charakteristischen Funktion und die Inverse FOURIER Transformation zurückgegriffen werden, ist analog vorzugehen.<sup>987</sup> Die charakteristische Funktion  $\varphi_{L_{RP}(t)}^{(+i)}(s) | \Psi$  für  $\sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) + (1 - \delta_i) \cdot D_i$ , bedingt auf den Faktor  $\Psi$ , kann mit Hilfe von (3.174) ermittelt werden, wenn für den  $i$ -ten Kredit die Ausfallwahrscheinlichkeit in (3.173) (gedanklich) einen Wert von eins zugewiesen bekommt. Demgegenüber ist, der

<sup>985</sup> Vgl. zur Verfahrensweise Abschnitt 372.

<sup>986</sup> Zum Zweck einer besseren Übersicht wurde folgende vereinfachte Schreibweise verwendet:

$$Q''(\tau_{FP,i} \leq t | \xi_3^{-1}(\sigma(\Psi))) = Q''(\tau_{FP,i} \leq t | \Psi).$$

<sup>987</sup> Vgl. zur Verfahrensweise Abschnitt 373.

obigen Vorgehensweise folgend, für die erzeugende Funktion  $\varphi_{L_{RP}(t)}^{(-i)}(s)|\Psi$  für  $\sum_{b=1, b \neq i}^N L_n(t)$ , bedingt auf  $\Psi$ , die Ausfallwahrscheinlichkeit gedanklich auf null zu setzen:

$$\varphi_{L_{RP}(t)}^{(+i)}(s)|\Psi = e^{D_i(1-\delta_i)js} \cdot \prod_{b=1, b \neq i}^N \left( (1 - Q''(\tau_{FP,b} \leq t|\Psi)) + Q''(\tau_{FP,b} \leq t|\Psi) \cdot e^{D_b(1-\delta_b)xs} \right), \quad (5.121)$$

$$\varphi_{L_{RP}(t)}^{(-i)}(s)|\Psi = \prod_{b=1, b \neq i}^N \left( (1 - Q''(\tau_{FP,b} \leq t|\Psi)) + Q''(\tau_{FP,b} \leq t|\Psi) \cdot e^{D_b(1-\delta_b)xs} \right). \quad (5.122)$$

Soll zudem die Recovery Rate stochastisch gestaltet werden, sind anstelle der Gleichungen (3.173) und (3.174), die Gleichungen (3.178) und (3.179) zu verwenden.

Die Kompensationszahlung zum Ausgleich des eingetretenen Verlustes aufgrund eines Kreditereignisses im Zeitpunkt  $\tau_{FP,i}$  beträgt  $L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}) - L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}^-)$ . Wird der Tranche  $j$  beim  $i$ -ten Kreditereignis kein Verlust zugewiesen, beträgt die Differenz null. Findet erstmals eine Verlustzuweisung statt, ist der Subtrahend null. Die Höhe der Verlustzuweisung entspricht dann dem Minuenden. Bei nachschüssiger Kompensationszahlung ist der Zahlungszeitpunkt der unmittelbar dem Zeitpunkt des  $i$ -ten Kreditereignisses  $\tau_{FP,i}$  folgende Prämienzahlungszeitpunkt  $t_{j,n^*}$ . Für den Erwartungswert der laufzeitgerecht diskontierten Kompensationszahlungen ergibt sich:

$$\text{Protection-Leg} = \quad (5.123)$$

$$E_Q \left[ \sum_{i=1}^N 1_{\{\tau_{FP,i} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,i}))} \cdot (L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}) - L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}^-)) \right].$$

Damit über die Zeit integriert werden kann, wird erneut der Tranchenverlust  $L_{Tr,j}$ , Gleichung (5.2) folgend, explizit als Funktion des Referenzportfolioverlusts  $L_{RP}$  geschrieben. Die Portfolioverluste  $L_{RP}(\tau_{FP,i}^-)$  und  $L_{RP}(\tau_{FP,i})$  werden mit Hilfe von (5.115) und (5.116) ausschließlich als Funktionen von  $\tau_{FP,i}$  geschrieben. Zur einfachen Feststellung der Zahlungszeitpunkte  $t_{j,n^*}$  bietet es sich wie zuvor an, die Integration abschnittsweise in Abhängigkeit der Prämienzahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$  durchzuführen:

$$\text{Protection-Leg} = \quad (5.124)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^m \int_{t_{j,k}}^{t_{j,k+1}} B(0, t_{j,k+1}) E_Q \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{n=1, n \neq i}^N L_n(t) + (1-\delta_i) D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{n=1, n \neq i}^N L_n(t) \right) \right) h_{i,t} e^{-H_{i,t}} dt.$$

Die Verteilungen für  $\sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) + (1-\delta_i) \cdot D_i$  und  $\sum_{b=1, b \neq i}^N L_n(t)$  erhält man wiederum mit Hilfe des Sequential Probability Shiftings oder der Inversen FOURIER Transformation.

Erfolgen die Kompensationszahlungen unmittelbar in den Zeitpunkten der Kreditereignisse  $\tau_{FP,i}$ , ist (5.124) insofern zu modifizieren, dass die Diskontierung der Kompensationszahlungen nicht ausgehend von  $t_{j,n}^*$  sondern direkt von  $\tau_{FP,i}$  erfolgt. Eine abschnittsweise Integration in Abhängigkeit der Prämienzahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$  ist nicht notwendig.<sup>988</sup>

$$\text{Protection-Leg} = \quad (5.125)$$

$$\sum_{i=1}^N \int_0^{T_{CDS,j}} B(0,t) \cdot E_{Q^r} \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1,b \neq i}^N L_b(t) + (1-\delta_i) \cdot D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1,b \neq i}^N L_b(t) \right) \right) \cdot h_{i,t} \cdot e^{-H_{i,t}} \cdot dt.$$

### 5233 Semi-analytische Ermittlung fairer CDO-Risikoprämien

Eine variabel und vorschüssig verzinsliche CDO kann gemäß den obigen duplikationstheoretischen Überlegungen als strukturiertes Produkt, bestehend aus einem CDS mit vorschüssiger Prämienzahlung und nachschüssiger Ausgleichzahlung, einer ausfallrisikofreien Floating Rating Note und (revolvierenden) kurzfristigen, ausfallrisikofreien Geldaufnahmege-  
schäften zur Finanzierung der CDS-Ausgleichszahlungen und Vorfinanzierung der FRN-Zinszahlungen, verstanden werden.<sup>989</sup> Die Risikoprämien der CDO und des CDS entsprechen einander. Die CDO kann zu pari emittiert werden, wenn die Risikoprämie in Abhängigkeit der Seniorität „fair“ gewählt wird. Der CDS des Duplikationsportfolios muss dazu einen Barwert von null aufweisen. Mit dem Premium Leg bei vorschüssiger Prämienzahlung (5.112) und dem Protection Leg bei nachschüssiger Ausgleichzahlung (5.124) ergibt sich für die faire Risikoprämie:

$$RP_{Tr,j,vorschüssig} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.126)$$

mit:

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n}}^{t_{j,n+1}} B(0,t_{j,n+1}) \cdot E_{Q^r} \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1,b \neq i}^N L_b(t) + (1-\delta_i) \cdot D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1,b \neq i}^N L_b(t) \right) \right) \cdot h_{i,t} \cdot e^{-H_{i,t}} \cdot dt,$$

$$\beta = \sum_{n=1}^m B(0,t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot ((v_{j+1} - v_j) - EL_{Tr,j}(t_{j,n})).$$

Eine variabel und nachschüssig verzinsliche CDO mit Teilprämienzahlungen kann bei flacher und konstanter Zinsstruktur als strukturiertes Produkt, bestehend aus einem CDS mit nachschüssiger (Teil-)Prämienzahlung, einer ausfallrisikofreien Floating Rating Note und revolvierenden, kurzfristigen, ausfallrisikofreien Geldaufnahmege-  
schäften zur Finanzierung der CDS-Ausgleichszahlungen, aufgefasst werden. Die CDS-Ausgleichszahlungen

<sup>988</sup> Eine abschnittsweise Integration kann jedoch mit Blick auf die formale Repräsentation des Premium Legs im Rahmen der Implementierung beibehalten werden.

<sup>989</sup> Vgl. Abschnitt 5231.

haben unmittelbar in den Zeitpunkten der Kreditereignisse zu erfolgen. Mit dem Premium Leg bei nachschüssiger (Teil-)Prämienzahlung (5.114) und dem Protection Leg bei sofortiger Ausgleichszahlung (5.125) ergibt sich für die faire Risikoprämie:

$$RP_{Tr,j,nachschüssig} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \quad (5.127)$$

mit:

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^N \int_0^{T_{CDS,j}} B(0,t) \cdot E_{Q^*} \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1,b \neq i}^N L_b(t) + (1-\delta_i) \cdot D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1,b \neq i}^N L_b(t) \right) \right) \cdot h_{i,t} \cdot e^{-H_{i,t}} \cdot dt, \\ \beta &= \sum_{n=1}^m B(0,t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (v_{j+1} - v_j) - EL_{Tr,j}(t_{j,n}) \right), \\ \gamma &= \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} B(0,t_{j,n}) (t - t_{j,n-1}) E_{Q^*} \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1,b \neq i}^N L_b(t) + (1-\delta_i) D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1,b \neq i}^N L_b(t) \right) \right) \cdot h_{i,t} e^{-H_{i,t}} dt. \end{aligned}$$

### 5234 Tranchenbarwerte und faire CDO-Risikoprämien für homogene Referenzportfolios

Betrachtet wird ein homogenes Referenzportfolio. Die Eigenschaft der Homogenität erstreckt sich dabei auf die Nominalwerte  $D_i = D_j = D$  und die Recovery Rates  $\delta_i = \delta_j = \delta$ . Die Hazard Rate-Funktionen können hingegen titelspezifisch sein. Die Annahmen ermöglichen, die Ausgleichszahlung des Protection Legs in einfacherer Form zu modellieren:

$$L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}) - L_{Tr,j}(\tau_{FP,i}^-) = (1-\delta) \cdot D. \quad (5.128)$$

Voraussetzung für eine Ausgleichszahlung gem. (5.128) ist, dass dem  $i$ -ten Kreditereignis hinreichend viele Kreditereignisse vorausgegangen sind, so dass die Tranche  $j$  durch die eingetretenen Verluste tangiert wird. Dazu muss das Credit Enhancement vollständig aufgebraucht sein. Zur modelltheoretischen Abbildung seien die Schwellenwerte der Tranchen  $v_j$  vereinfacht gestaltet, so dass (5.128) uneingeschränkt und insbesondere bei einer erstmaligen Verlustzuweisung Gültigkeit besitzt:<sup>990</sup>

$$\frac{v_j}{(1-\delta) \cdot D} \in \mathbb{N} \quad \forall \quad j = 1, \dots, J+1. \quad (5.129)$$

Mit (5.129) lassen sich die Schwellenwerte  $v_j$  problemlos in kritische Kreditausfallzahlen  $k_j$  überführen:

$$k_j = \frac{v_j}{(1-\delta) \cdot D} \quad \forall \quad j = 1, \dots, J+1. \quad (5.130)$$

<sup>990</sup> Überschreiten die Verluste die Schwellengrenze der betrachteten Tranche, wären ohne die Forderung (5.129) u. U. Bruchstücke von  $(1-\delta) \cdot D$  zu betrachten. Vgl. bspw. J. Hull und A. White (2004), Valuation of CDOs and CDSs, S. 16.

Eine Ausgleichszahlung erfolgt, wenn für das  $i$ -te Kreditereignis die Bedingungen  $i > k_j$  und  $i \leq k_{j+1}$  gelten. Für das Protection Leg (5.123) (nachsüssige Kompensation) folgt:

$$\text{Protection-Leg} = \quad (5.131)$$

$$E_{Q^r} \left( \sum_{i=1}^N 1_{\{\tau_{FP,i} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,i}))} \cdot (1-\delta) \cdot D \cdot 1_{\{k_j < i \leq k_{j+1}\}} \right).$$

Beachtet man, dass gilt:

$$1_{\{k_j < i \leq k_{j+1}\}} = 1_{\{i=k_j+1\}} + \dots + 1_{\{i=k_{j+1}-1\}} + 1_{\{i=k_{j+1}\}}, \quad (5.132)$$

lässt sich (5.131) weiter umformen:

$$\text{Protection-Leg} = \quad (5.133)$$

$$\begin{aligned} &= E_{Q^r} \left( \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sum_{i=1}^N 1_{\{\tau_{FP,i} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,i}))} \cdot (1-\delta) \cdot D \cdot 1_{\{i=k\}} \right) \\ &= \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} E_{Q^r} \left( 1_{\{\tau_{FP,k} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,k}))} \cdot (1-\delta) \cdot D \right). \end{aligned}$$

Die resultierenden  $(k_{j+1}-k_j)$  Summanden in (5.133) stellen die Protection Legs von  $k^{\text{th}}$ -to Default Credit Default Swaps mit nachsüssiger Ausgleichszahlung dar.<sup>991</sup> Die Summe ist das Protection Leg eines Basket Credit Default Swaps, der ab dem  $k_j$ -ten Kreditereignis, nicht aber über das Kreditereignis  $k_{j+1}$  hinaus, die resultierenden Verluste absichert. Dementsprechend ermittelt sich das Protection Leg einer Tranche  $j$  mit einem homogenen Referenzportfolio als Summe der Protection Legs von  $k^{\text{th}}$ -to Default Swaps mit  $k_j < k \leq k_{j+1}$ .<sup>992</sup>

Das Protection Leg eines  $k^{\text{th}}$ -to Default Swaps lässt sich mit Hilfe der Ereignisverteilung bestimmen.<sup>993</sup> Zur Eliminierung des Ausfallindikators ist über die Zeit zu integrieren. Zur einfachen Feststellung der Zahlungszeitpunkte  $t_{j,n^*}$ , bietet es sich – erneut die obige Vorgehensweise aufgreifend – an, die Integration abschnittsweise in Abhängigkeit der Prämienzahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$  durchzuführen:

<sup>991</sup> Vgl. auch die formale Darstellung der Protection Legs von  $k^{\text{th}}$ -to Default Credit Default Swaps in J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 10. Im Unterschied zu (5.133) erfolgen dort die Kompensationszahlungen stets in den Zeitpunkten der Kreditereignisse.

<sup>992</sup> Beispielrechnungen zu  $k^{\text{th}}$ -to-Default Swaps mit dem semi-analytischen Modell finden sich in Anlage 18.

<sup>993</sup> Vgl. Abschnitt 36.

$$\begin{aligned}
& E_Q \left( 1_{\{\tau_{FP,k} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,k}))} \cdot (1-\delta) \cdot D \right) \\
&= (1-\delta) \cdot D \cdot \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n}}^{t_{j,n+1}} B(0, t_{j,n+1}) \cdot dQ''(N_{RP,t} \geq k) \\
&= (1-\delta) \cdot D \cdot \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n}}^{t_{j,n+1}} B(0, t_{j,n+1}) \cdot d(1-Q''(N_{RP,t} < k)) \\
&= -(1-\delta) \cdot D \cdot \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n}}^{t_{j,n+1}} B(0, t_{j,n+1}) \cdot dQ''(N_{RP,t} < k).
\end{aligned} \tag{5.134}$$

Da die Diskontierungsfaktoren  $B(0, t_{j,n})$  bezüglich der Integrale – nicht jedoch bezüglich des Summenoperators – Konstanten sind, erhält man abschließend:

$$\begin{aligned}
& \textit{Protection-Leg} = \\
&= (1-\delta) \cdot D \cdot \sum_{n=1}^m \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} B(0, t_{j,n+1}) \left( Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k) - Q''(N_{RP,t_{j,n+1}} < k) \right).
\end{aligned} \tag{5.135}$$

Die Wahrscheinlichkeiten  $Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k)$  lassen sich mit Hilfe des Instrumentes der (wahrscheinlichkeits-)erzeugenden Funktion und des Probability Shiftings ermitteln. Die Koeffizienten  $c_{N_{RP}}$  der erzeugenden Funktionen für die Zeitpunkte  $t_{j,n}$  sind bis zum – jedoch nicht einschließlich des –  $k$ -ten Kreditereignisses aufzusummieren.

Finden die Ausgleichszahlungen unmittelbar in den Zeitpunkten der Kreditereignisse statt, ist eine abschnittsweise Integration nicht notwendig. Die Integration erfolgt dann über das Zeitintervall  $(0, T_{CDS,j}]$ . Die Diskontierung erfolgt nicht ausgehend von den vertraglich vereinbarten Zahlungszeitpunkten  $t_{j,n}$ , sondern vom jeweiligen Zeitpunkt des Kreditereignisses  $\tau_{FP,i}$ . Der Erwartungswert (5.134) ist wie folgt zu modifizieren:

$$\begin{aligned}
& E_Q \left( 1_{\{\tau_{FP,k} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(\tau_{FP,k})} \cdot (1-\delta) \cdot D \right) \\
&= (1-\delta) \cdot D \cdot \int_0^{T_{CDS,j}} B(0, t) \cdot dQ''(N_{RP,t} \geq k) \\
&= (1-\delta) \cdot D \cdot \int_0^{T_{CDS,j}} B(0, t) \cdot d(1-Q''(N_{RP,t} < k)) \\
&= -(1-\delta) \cdot D \cdot \int_0^{T_{CDS,j}} B(0, t) \cdot dQ''(N_{RP,t} < k).
\end{aligned} \tag{5.136}$$

Der Diskontierungsfaktor  $B(0,t)$  ist abhängig von der Integrationsvariablen  $t$  und kann nicht vor das Integral gezogen werden. Gleichwohl erscheint es für eine Implementierung sinnvoll, den Ausdruck  $dQ''(N_{RP,t} < k)$  durch partielle Integration zu eliminieren:<sup>994</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^{T_{CDS,j}} B(0,t) \cdot dQ''(N_{RP,t} < k) &= Q''(N_{RP,T_{CDS,j}} < k) \cdot B(0, T_{CDS,j}) - 1 \\ &- \int_0^{T_{CDS,j}} Q''(N_{RP,t} < k) \cdot dB(0,t). \end{aligned} \quad (5.137)$$

Für das Protection Leg (5.125) (sofortige Kompensation) erhält man abschließend:

$$\begin{aligned} \text{Protection-Leg} &= \quad (5.138) \\ &= (1-\delta) D \sum_{k=k_{j+1}}^{k_{j+1}} \left( 1 - Q''(N_{RP,T_{CDS,j}} < k) B(0, T_{CDS,j}) + \int_0^{T_{CDS,j}} Q''(N_{RP,t} < k) dB(0,t) \right). \end{aligned}$$

Analog zum Protection Leg kann auch das Premium Leg für ein homogenes Referenzportfolio in Basket Credit Default Swap-Strukturen überführt werden. Zunächst sei das Premium Leg (5.111) (vorschüssige Zahlungsweise) wie folgt modifiziert:

$$\begin{aligned} (\nu_{j+1} - \nu_j) &= (\nu_{j+1} - \nu_j) \cdot \mathbf{1}_{\{0 < N_{RP,t_{j,n}} \leq k_j\}} \\ &+ (\nu_{j+1} - \nu_j) \cdot \mathbf{1}_{\{k_j < N_{RP,t_{j,n}} \leq k_{j+1}\}} \\ &+ (\nu_{j+1} - \nu_j) \cdot \mathbf{1}_{\{N_{RP,t_{j,n}} > k_{j+1}\}}, \end{aligned} \quad (5.139)$$

$$\begin{aligned} L_{Tr,j}(t_{j,n}) &= (1-\delta) \cdot D \cdot (N_{RP,t_{j,n}} - k_j) \cdot \mathbf{1}_{\{k_j < N_{RP,t_{j,n}} \leq k_{j+1}\}} \\ &+ (1-\delta) \cdot D \cdot (k_{j+1} - k_j) \cdot \mathbf{1}_{\{N_{RP,t_{j,n}} > k_{j+1}\}}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Subtrahiert man (5.140) von (5.139) erhält man mit  $k_j \cdot (1-\delta) \cdot D = \nu_j$  den Ausdruck:

$$(\nu_{j+1} - \nu_j) \cdot \mathbf{1}_{\{0 < N_{RP,t_{j,n}} \leq k_j\}} + (\nu_{j+1} - (1-\delta) \cdot D \cdot N_{RP,t_{j,n}}) \cdot \mathbf{1}_{\{k_j < N_{RP,t_{j,n}} \leq k_{j+1}\}}. \quad (5.141)$$

<sup>994</sup> Vgl. zur partiellen Integration M. Abramowitz und I. Stegun (1972), Handbook of mathematical functions, S. 12. Für zwei Funktionen  $u(t)$  und  $v(t)$  lässt sich im vorliegenden Fall schreiben:

$$\begin{aligned} d[u(t) \cdot v(t)] &= u(t) \cdot dv(t) + v(t) \cdot du(t) \\ \Rightarrow \int_0^T d[u(t) \cdot v(t)] &= \int_0^T u(t) \cdot dv(t) + \int_0^T v(t) \cdot du(t) \\ \Rightarrow \int_0^T v(t) \cdot du(t) &= u(T) \cdot v(T) - u(0) \cdot v(0) - \int_0^T u(t) \cdot dv(t). \end{aligned}$$

Mit  $u(t) = Q''(N_{RP,t} < k)$ ,  $v(t) = B(0,t)$ ,  $Q''(N_{RP,t=0} < k) = 1$  und  $B(0,0) = 1$  folgt sofort (5.137). Vgl. zur Vorgehensweise auch J.-P. Laurent und J. Gregory (2003), Basket default swaps, S. 10.

Für das Premium Leg folgt damit:

$$\text{Premium-Leg} = \tag{5.142}$$

$$\sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (\nu_{j+1} - \nu_j) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} \leq k_j) + \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} (\nu_{j+1} - (1-\delta) \cdot D \cdot k) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} = k) \right).$$

Ersetzt man  $\nu_j$  und  $\nu_{j+1}$  durch  $k_j \cdot (1-\delta) \cdot D$  und  $k_{j+1} \cdot (1-\delta) \cdot D$ , dann lässt sich der Verlust  $(1-\delta) \cdot D$  ausklammern:

$$\text{Premium-Leg} = \tag{5.143}$$

$$(1-\delta) \cdot D \cdot \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (k_{j+1} - k_j) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} \leq k_j) + \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} (k_{j+1} - k) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} = k) \right).$$

Ignoriert man vorerst die Recovery Rate, dann erkennt man in Gleichung (5.143) erneut die Struktur eines Basket Credit Default Swaps, der ab dem  $k_j$ -ten Kreditereignis, nicht aber über das Kreditereignis  $k_{j+1}$  hinaus, entstehende Verluste absichert. Sofern im Zahlungszeitpunkt  $t_{j,n}$  die Zahl der Ausfälle den Wert  $k_j$  nicht überschreitet, ist die volle Prämie für die  $(k_{j+1} - k_j)$  zu sichernden Kredite zu leisten. Übersteigt die Zahl der Ausfälle jedoch den kritischen Wert von  $k_j$ , sinkt mit jedem hinzukommenden Ausfall und zukünftig nicht mehr zu sichernden Kredit die Prämienzahlung. Der Faktor  $D$  skaliert die Risikoprämie und spiegelt den nominalwertig zu sichernden Betrag wider. Der Term  $(1-\delta)$  gleicht lediglich die gegenüber  $(\nu_{j+1}-\nu_j)$  veränderte, neue Tranchenstärke  $(k_{j+1}-k_j)$  aus.

Im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses sind zur Ermittlung der fairen Risikoprämie das Protection Leg (5.135) und das Premium Leg (5.143) einander gleichzusetzen:

$$RP_{Tr,j,vorschüssig,D,\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{5.144}$$

mit:

$$\alpha = \sum_{n=1}^m \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} B(0, t_{j,n+1}) \left( Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k) - Q''(N_{RP,t_{j,n+1}} < k) \right),$$

$$\beta = \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (k_{j+1} - k_j) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} \leq k_j) + \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} (k_{j+1} - k) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} = k) \right).$$

Der Faktor  $(1-\delta) \cdot D$  skaliert das Protection Leg im selben Maße wie das Premium Leg und ist aus der Gleichung zu kürzen. Als Resultat entspricht die Risikoprämie einer CDO mit vorschüssiger Zahlungsweise für ein homogenes Referenzportfolio der Risikoprämie eines Basket Credit Default Swaps mit einer Recovery Rate i. H. v. null, Schwellenwerten  $k_j$  und  $k_{j+1}$ , vorschüssiger Prämienzahlung und nachschüssiger Kompensationszahlung. Das Ergebnis fordert nicht, die Recovery Rate des Referenzportfolios auf null zu setzen. Die Recovery Rate beeinflusst indirekt die Risikoprämie über die Schwellenwerte  $k_j$  und  $k_{j+1}$  gem. (5.130). Für wachsende Recovery Rates steigen ceteris paribus die Schwellenwerte und die Risikoprämie sinkt. Für  $\delta \rightarrow 1$  folgen  $k_j, k_{j+1} \rightarrow \infty$  und  $RP_{Tr,j,vorschüssig,D,\delta} \rightarrow 0$ . Dieses Ergebnis ist vereinbar mit dem Verhalten von Gleichung (5.126).

Einen Spezialfall erhält man für  $k_j=0$  und  $k_{j+1}=1$ . Man erhält die Risikoprämie eines vorschüssig zahlenden 1<sup>st</sup>-to-Default Credit Default Swaps. Ein 1<sup>st</sup>-to-Default Credit Default Swap zahlt eine Kompensation für den Verlust, der aus dem ersten Kreditausfall in einem Referenzportfolio resultiert.<sup>995</sup>

Ein weiterer Spezialfall folgt, wenn man  $N=1$ ,  $k_j=0$  und  $k_{j+1}=1$  setzt. Das Referenzportfolio besteht nur aus einem einzelnen Kredit  $i$  und man erhält die Risikoprämie eines nominalwertsichernden Plain Vanilla CDS mit vorschüssiger Prämienzahlung, nachschüssiger Kompensationszahlung und einer Recovery Rate i. H. v. null. Zur Veranschaulichung kann der Zähler  $\alpha$  wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{n=1}^m \sum_{k=1}^1 B(0, t_{j,n+1}) \left( Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k) - Q''(N_{RP,t_{j,n+1}} < k) \right) \\
&= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n+1}) \left( Q''(N_{RP,t_{j,n}} = 0) - Q''(N_{RP,t_{j,n+1}} = 0) \right) \\
&= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n+1}) \left( Q''(\tau_{FP,i} > t_{j,n}) - Q''(\tau_{FP,i} > t_{j,n+1}) \right) \\
&= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n+1}) Q''(t_{j,n} < \tau_{FP,i} \leq t_{j,n+1}).
\end{aligned} \tag{5.145}$$

Für den Nenner  $\beta$  erhält man:

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} = 0) \\
&= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot Q''(\tau_{FP,i} > t_{j,n}).
\end{aligned} \tag{5.146}$$

<sup>995</sup> Zu 1<sup>st</sup>-to-Default Credit Default Swaps siehe A. Arvantis und J. Gregory (2004), Credit, S. 157 f. u. S. 162-166.

Erfolgen die Zahlungen nachschüssig, sind aufgelaufene (Teil-)Prämienzahlungsansprüche für zwischenzeitlich abgesicherte, jedoch aufgrund von zugeordneten Verlusten aus dem Referenzportfolio zukünftig nicht mehr zu sichernde Beträge, zu berücksichtigen. Der erste Term des Premium Legs (5.114) (nachschüssige Zahlungsweise), welcher die nachschüssigen Prämienzahlungen ohne Teilprämienzahlungen repräsentiert, kann der obigen Vorgehensweise folgend, in den Ausdruck (5.143) überführt werden. Ein Unterschied besteht lediglich in den Werten der Prämienzahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$ .<sup>996</sup> Zu untersuchen sind lediglich noch die aufgelaufenen Teilprämienzahlungsansprüche. Aufgrund der Ähnlichkeit der formalen Repräsentation der Teilprämienzahlungsansprüche in (5.114) mit der formalen Repräsentation der Kompensationszahlungen in (5.123) erfolgen die vorzunehmenden Modifikationen in Anlehnung an die vorgenommenen Modifikationen des Protection Legs. Mit (5.128), (5.129) und (5.130) erhält man für die Teilprämienzahlungen:

$$E_{Q^*} \left( \sum_{i=1}^N 1_{\{\tau_{FP,i} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,i}))} \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,i} \cdot (1-\delta) \cdot D \cdot 1_{\{k_j < i \leq k_{j+1}\}} \right). \quad (5.147)$$

Wird der Indikator  $1_{\{k_j < i \leq k_{j+1}\}}$  durch (5.132) substituiert, folgt:

$$\sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} E_{Q^*} \left( 1_{\{\tau_{FP,k} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,k}))} \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,i} \cdot (1-\delta) \cdot D \right). \quad (5.148)$$

Für die Integration über die Zeit wird zur einfachen Feststellung der Zahlungszeitpunkte  $t_{j,n^*}$  wiederum abschnittsweise in Abhängigkeit der Prämienzahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$  vorgegangen. Für den Erwartungswert folgt:

$$\begin{aligned} & E_{Q^*} \left( 1_{\{\tau_{FP,k} \leq T_{CDS,j}\}} \cdot \frac{1}{B(t_{j,n^*}(\tau_{FP,k}))} \cdot RP_{Tr,j} \cdot \Delta t_{j,i} \cdot (1-\delta) \cdot D \right) \\ &= (1-\delta) \cdot D \cdot \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot (\Delta t_{j,n} - (t_{j,n} - t)) \cdot dQ''(N_{RP,t} \geq k), \quad (5.149) \\ &= -(1-\delta) \cdot D \cdot \sum_{n=1}^m \left( \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot (\Delta t_{j,n} - t_{j,n}) \cdot dQ''(N_{RP,t} < k) + \right. \\ & \quad \left. \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot t \cdot dQ''(N_{RP,t} < k) \right). \end{aligned}$$

<sup>996</sup> Vgl. auch Abschnitt 5232.

Für das erste Integral ergibt sich mit der Konstanz der Diskontierungsfaktoren  $B(0, t_{j,n})$ , der Zeitabschnitte  $\Delta t_{j,n}$  und der Zeitpunkte  $t_{j,n}$  bezüglich des jeweiligen Integrationsabschnitts  $(t_{j,n-1}, t_{j,n}]$ :

$$\int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot (\Delta t_{j,n} - t_{j,n}) \cdot dQ''(N_{RP,t} < k) = \quad (5.150)$$

$$B(0, t_{j,n}) \cdot RP_{Tr,j} \cdot (\Delta t_{j,n} - t_{j,n}) \cdot \left( Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k) - Q''(N_{RP,t_{j,n-1}} < k) \right).$$

Für das zweite Integral kann erneut auf die partielle Integration zurückgegriffen werden:<sup>997</sup>

$$\int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} t \cdot dQ''(N_{RP,t} < k) \quad (5.151)$$

$$= t_{j,n} \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k) - t_{j,n-1} \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n-1}} < k) - \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} Q''(N_{RP,t} < k) \cdot dt.$$

Im Zeitpunkt des Kontraktabschlusses sind zur Ermittlung der fairen Risikoprämie das Protection Leg (5.138) und das Premium Leg (5.143) zzgl. (5.147) einander gleichzusetzen:

$$RP_{Tr,j,nachschüssig,D,\delta} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \quad (5.152)$$

mit :

$$\alpha = \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \left( 1 - Q''(N_{RP,T_{CDS,j}} < k) \cdot B(0, T_{CDS,j}) + \int_0^{T_{CDS,j}} Q''(N_{RP,t} < k) \cdot dB(0, t) \right),$$

$$\beta = \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (k_{j+1} - k_j) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} \leq k_j) + \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} (k_{j+1} - k) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} = k) \right),$$

$$\gamma = - \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) (\xi + \zeta),$$

$$\xi = (\Delta t_{j,n} - t_{j,n}) \cdot \left( Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k) - Q''(N_{RP,t_{j,n-1}} < k) \right),$$

$$\zeta = t_{j,n} \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k) - t_{j,n-1} \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n-1}} < k) - \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} Q''(N_{RP,t} < k) \cdot dt.$$

Der Faktor  $(1 - \delta) \cdot D$  skaliert das Protection Leg im selben Maße wie das Premium Leg und ist aus der Gleichung zu kürzen. Als Resultat entspricht die Risikoprämie einer CDO mit vorschüssiger Zahlungsweise für ein homogenes Referenzportfolio der Risikoprämie

<sup>997</sup> Vgl. Fn. 994 sowie die dort angegebene Literatur.

eines Basket Credit Default Swaps mit einer Recovery Rate i. H. v. null, den Schwellenwerten  $k_j$  und  $k_{j+1}$ , nachschüssiger Prämienzahlung und sofortiger Kompensationszahlung.

Den Spezialfall des 1<sup>st</sup>-to-Default Credit Default Swaps erhält man erneut für  $k_j=0$  und  $k_{j+1}=1$ . Setzt man darüber hinaus  $N=1$ , erhält man wie zuvor die Risikoprämie eines nominalwertsichernden Plain Vanilla CDS, diesmal jedoch mit nachschüssiger Prämienzahlung. Zur Veranschaulichung kann der Zähler  $\alpha$  wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sum_{k=1}^1 \left( 1 - Q''(N_{RP, T_{CDS,j}} < k) \cdot B(0, T_{CDS,j}) + \int_0^{T_{CDS,j}} Q''(N_{RP,t} < k) \cdot dB(0, t) \right) \\
&= 1 - Q''(\tau_{FP,i} > T_{CDS,j}) \cdot B(0, T_{CDS,j}) + \int_0^{T_{CDS,j}} Q''(\tau_{FP,i} > t) \cdot dB(0, t) \\
&= - \int_0^{T_{CDS,j}} B(0, t) \cdot dQ''(\tau_{FP,i} > t) = \int_0^{T_{CDS,j}} B(0, t) \cdot dQ''(\tau_{FP,i} \leq t).
\end{aligned} \tag{5.153}$$

Für den ersten Teil des Nenners  $\beta$  erhält man, abgesehen von den zugewiesenen Werten der Zahlungszeitpunkte  $t_{j,n}$ , erneut (5.146):

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot Q''(N_{RP, t_{j,n}} = 0) \\
&= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot Q''(\tau_{FP,i} > t_{j,n}).
\end{aligned} \tag{5.154}$$

Für den zweiten Teil des Nenners  $\gamma$  erhält man:

$$\gamma = - \sum_{k=1}^1 \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) (\xi + \zeta) = \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,i} \cdot dQ''(\tau_{FP,i} \leq t)$$

mit:

$$\begin{aligned}
\xi &= (\Delta t_{j,n} - t_{j,n}) \cdot (Q''(N_{RP, t_{j,n}} < k) - Q''(N_{RP, t_{j,n-1}} < k)) \\
&= (\Delta t_{j,n} - t_{j,n}) \cdot (Q''(\tau_{FP,i} > t_{j,n}) - Q''(\tau_{FP,i} > t_{j,n-1})) \\
&= -(\Delta t_{j,n} - t_{j,n}) \cdot Q''(t_{j,n-1} < \tau_{FP,i} \leq t_{j,n}) \\
&= - \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} (\Delta t_{j,n} - t_{j,n}) \cdot dQ''(\tau_{FP,i} \leq t)
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
\zeta &= t_{j,n} \cdot Q''(N_{RP, t_{j,n}} < k) - t_{j,n-1} \cdot Q''(N_{RP, t_{j,n-1}} < k) - \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} Q''(N_{RP,t} < k) \cdot dt \\
&= \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} t \cdot dQ''(\tau_{FP,i} > t) = - \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} t \cdot dQ''(\tau_{FP,i} \leq t).
\end{aligned} \tag{5.155}$$

### 5235 Simulative Ermittlung risikoneutraler Tranchenbarwerte und fairer CDO-Risikoprämien

Sollen transaktionsbezogene Spezifika wie Replenishments und Replenishment-Trigger in die Problematik der Bewertung mit einbezogen werden, empfiehlt sich die Methodik der Simulation.<sup>998</sup> Ausschlaggebend für die Bewertung ist die simulative Bestimmung der Ausfallzeiten  $\tau_{FP,1}, \tau_{FP,2}, \tau_{FP,3}, \dots$ . Vorausgesetzt sei, dass den einzelnen Krediten des Referenzportfolios risikoneutrale Hazard Rate-Funktionen  $h_{i,t}$  zugeordnet worden sind. Mit (3.32) lassen sich zeitkonstante risikoneutrale Ausfallschranken  $K_i$  ermitteln. Der Risikohorizont  $t_H$  sollte dabei mit dem Fälligkeitszeitpunkt der CDO-Transaktion  $T_{CDO}$  übereinstimmen. Die Hazard Rate-Funktionen und die Ausfallschranken determinieren mit (3.26) die risikoneutralen Zeittransformationen  $g_{i,t}$ . Der Zeitraum  $[0, T_{CDO}]$  ist in möglichst feine äquidistante Zeitabschnitte der Länge  $\Delta t = T_{CDO}/n$  zu unterteilen. Für die Zeitpunkte  $\Delta t \cdot h$  mit  $h=1, \dots, n$  können mit (3.188) für den Simulationslauf  $L$  Ausprägungen der zeittransformierten Prozesse  $Y_{i,\Delta t \cdot h} = W_{i,g_{i,\Delta t \cdot h}}$  simuliert werden. Die Ausfallzeit  $\tau_{FP,i}$  ist der erste Zeitpunkt  $\Delta t \cdot h$ , für den der zeittransformierte Prozess die Ausfallschranke erreicht oder durchschlägt:

$$\tau_{FP,i} = \min(\Delta t \cdot h : Y_{i,\Delta t \cdot h} \leq K_i). \quad (5.156)$$

Ggf. kann zur Berücksichtigung der Möglichkeit des Durchschlagens der Ausfallschranken innerhalb der Zeitabschnitte  $\Delta t$  auf BROWNSche Brücken zurückgegriffen werden.<sup>999</sup>

Die Ausfallzeiten sind ihrer Größe nach in aufsteigender Weise zu ordnen. Dabei muss stets  $\tau_{FP,i} \leq T_{CDO}$  gelten. Zur Ermittlung der Protection Leg-Zahlungen (Default Leg-Zahlungen) des zur Duplikation<sup>1000</sup> verwendeten CDS sind unabhängig davon, ob das Protection Leg die Kompensationszahlungen nachschüssig oder sofort leistet, diejenigen Ausfallereignisse zu identifizieren, die zu Verlustzuweisungen zur betrachteten Tranche  $j$  führen. Dabei stellt  $k_j$  das erste Kreditereignis dar, dass die Tranche  $j$  tangiert. Mit  $k_{j+1}$  sei das letzte Kreditereignis bezeichnet, das gerade noch Verlustzuweisungen zur Folge hat. Sei  $X_j$  der auf  $(1 - \delta_j) \cdot D$  bezogene Anteil des Verlustes, der mit dem  $k_j$ -ten Kreditereignis der Tranche  $j$  zugewiesen wird. Für  $X_{j+1}$  gelte entsprechendes. Dann enthält der Vektor  $\left( (1 - \delta_{k_j}) \cdot D_{k_j} \cdot X_j, (1 - \delta_{k_{j+1}}) \cdot D_{k_{j+1}}, \dots, (1 - \delta_{k_{j+1}-1}) \cdot D_{k_{j+1}-1}, (1 - \delta_{k_{j+1}}) \cdot D_{k_{j+1}} \cdot X_{j+1} \right)$  die relevan-

<sup>998</sup> Im Folgenden soll lediglich ein Standardverfahren vorgestellt werden. Da jedoch Monte-Carlo-Schätzer nur sehr langsam konvergieren, könnte versucht werden, dessen Güte mit Hilfe von Importance Sampling-Techniken zu verbessern. Zur grundsätzlichen Idee des Importance Samplings vgl. [B. Ripley \(1987\)](#), Stochastic simulation, S. 122 f. Im Zusammenhang mit dem Pricing von n<sup>th</sup>-to Default Swaps siehe [M. Joshi und D. Kainth \(2004\)](#), Rapid development of prices for n<sup>th</sup>-to-default swaps, S. 266-275.

<sup>999</sup> Vgl. zu Details der zeitraumbezogenen Simulation Abschnitt 382 sowie die dort angegebene Literatur.

<sup>1000</sup> Vgl. Abschnitt 5231.

ten Kompensationszahlungen. Zahlt das Protection Leg unmittelbar in den Zeitpunkten der Kreditereignisse, ergibt sich der Barwert des Protection Legs wie folgt:

$$BW-DL_L = \begin{pmatrix} (1-\delta_{k_j}) \cdot D_{k_j} \cdot X_j \\ (1-\delta_{k_{j+1}}) \cdot D_{k_{j+1}} \\ \vdots \\ (1-\delta_{k_{j+1-1}}) \cdot D_{k_{j+1-1}} \\ (1-\delta_{k_{j+1}}) \cdot D_{k_{j+1}} \cdot X_{j+1} \end{pmatrix}^t \times \begin{pmatrix} B(0, \tau_{k_j}) \\ B(0, \tau_{k_{j+1}}) \\ \vdots \\ B(0, \tau_{k_{j+1-1}}) \\ B(0, \tau_{k_{j+1}}) \end{pmatrix}. \quad (5.157)$$

Bei nachschüssiger Zahlung, sind in (5.157) anstelle der Kreditereigniszeiten die unmittelbar folgenden Zahlungszeitpunkte  $t_{j,k_j}^*$ ,  $t_{j,k_{j+1}}^*$ , ...,  $t_{j,k_{j+1-1}}^*$ ,  $t_{j,k_{j+1}}^*$  zu verwenden. Über alle Simulationsläufe ist das arithmetische Mittel der jeweiligen Barwerte  $BW-DL_L$  zu bilden.

Für das Premium Leg ist unabhängig davon, ob vor- oder nachschüssig gezahlt wird, zunächst der verbleibende Nominalwert der Tranche  $j$  zu den vertraglich vereinbarten Zahlungszeitpunkten  $t_{j,n}$  zu ermitteln:

$$(v_{j+1} - v_j) - \left( (1-\delta_{k_j}) \cdot D_{k_j} \cdot X_j, \dots, (1-\delta_{k_{j+1}}) \cdot D_{k_{j+1}} \cdot X_{j+1} \right) \times \begin{pmatrix} 1_{\{\tau_{k_j} \leq t_{j,n}\}} \\ \vdots \\ 1_{\{\tau_{k_{j+1}} \leq t_{j,n}\}} \end{pmatrix}. \quad (5.158)$$

Gem. (5.112) ist der verbleibende Nominalwert in  $t_{j,n}$  mit dem Zeitabschnitt  $\Delta t_{j,n}$  und dem Diskontierungsfaktor  $B(0, t_{j,n})$  zu multiplizieren. Die abschließende Summe über alle  $t_{j,n}$  führt zum Barwert des Premium Legs  $BW-PL_L$ . Bei nachschüssiger Zahlungsweise sind die Teilprämienzahlungen zu addieren.<sup>1001</sup> Dazu sind gem. (5.113) die zugehörigen Zeitabschnitte  $\Delta t_{j,k_j}, \Delta t_{j,k_{j+1}}, \dots, \Delta t_{j,k_{j+1-1}}, \Delta t_{j,k_{j+1}}$  zu ermitteln. Gewichtet mit den jeweiligen Verlusten und Diskontierungsfaktoren bzgl. der vertraglich vereinbarten Zahlungszeitpunkte  $t_{j,k_j}^*$ ,  $t_{j,k_{j+1}}^*$ , ...,  $t_{j,k_{j+1-1}}^*$ ,  $t_{j,k_{j+1}}^*$  erhält man den Barwert der Teilprämienzahlungen wie folgt:

$$\left( B(0, t_{j,k_j}^*) \cdot \Delta t_{j,k_j}, \dots, B(0, t_{j,k_{j+1}}^*) \cdot \Delta t_{j,k_{j+1}} \right) \times \begin{pmatrix} (1-\delta_{k_j}) \cdot D_{k_j} \cdot X_j \\ \vdots \\ (1-\delta_{k_{j+1}}) \cdot D_{k_{j+1}} \cdot X_{j+1} \end{pmatrix}. \quad (5.159)$$

Die faire Risikoprämie ist der Quotient aus dem durchschnittlichen Barwert des Protection Legs  $BW-DL$  und dem durchschnittlichen Barwert des Premium Legs  $BW-PL$ .

<sup>1001</sup> Vgl. Abschnitt 5232 und Abb. 5-14.

## **524 Darstellung und Analyse der risikoadäquaten Cash Flow-Struktur von CDO-Transaktionen auf der Basis fairer CDO-Risikoprämien**

### **5241 CDO-Risikoprämien und Risikoprämienzahlungen im Zeitverlauf**

Mit den Gleichungen (5.126) und (5.127) zur Ermittlung fairer CDO-Risikoprämien ist es möglich, unter Berücksichtigung des Kreditrisikogehaltes des (heterogenen) Referenzportfolios sowie der Credit Enhancement Levels und Tranchenstärken, die kreditrisikoadäquate Cash Flow-Struktur einer synthetischen CDO-Transaktion vollständig zu beschreiben. Angefangen beim Originator, der das Kreditrisiko ggf. selbst in tranchierter Form mit Hilfe von Kreditderivaten an Dritte – insbesondere das Special Purpose Vehicle – überträgt, bis hin zu den CDO-Investoren, die für übernommene Kreditrisiken (adäquate) Risikoprämien erhalten, sollen die Zahlungsströme in ihrer zeitlichen und betragsmäßigen Dimension dargestellt und mit Blick auf die jederzeitige Aufrechterhaltung der Zahlungsfähigkeit der beteiligten Parteien – insbesondere des Special Purpose Vehicles – analysiert werden.

Für den Fall homogener Nominalwerte und Recovery Rates können die Gleichungen (5.126) und (5.127) zur Ermittlung fairer CDO-Risikoprämien in die Gleichungen (5.144) und (5.152) zur Ermittlung fairer Sätze für  $k_j$  to  $k_{j+1}$  out of  $N$  Basket Credit Default Swaps überführt werden.<sup>1002</sup> Die einfachere Implementierbarkeit von (5.144) und (5.152) sowie ihre bessere Performance bzgl. der Rechengeschwindigkeit legen nahe, einen wesentlichen Teil der Analysen mit ihrer Hilfe durchzuführen. Dabei soll hauptsächlich (5.144) Verwendung finden, da (1) die Duplikation vorschüssig zahlender CDOs mit Hilfe von FRNs und CDS nicht nur im Falle flacher und konstanter Zinsstrukturen perfekt<sup>1003</sup> ist und (2) die Gleichung (abgesehen von der Ermittlung der Ereignisverteilungen) vollständig ohne numerische Integration auskommt.

Zu diesem Zweck soll beispielhaft ein Portfolio mit 105 Krediten betrachtet werden. Die Nominalwerte betragen einheitlich 10.000 EUR.<sup>1004</sup> Alle Kredite tragen ein „BB“-Rating. Die Recovery Rate beträgt uniform 30 %. Um zu realitätsnahen Aussagen zu gelangen, sollen zur Modellkalibrierung Quotierungen von Plain Vanilla CDS-Kontrakten mit den Laufzeiten  $T_{CDO}=0.25, 0.50, \dots, 4.75, 5.00$  Jahre zur Absicherung der Tilgungszahlungen von „BB“-gerateten Krediten herangezogen werden. Die fairen Swap-Sätze sind der Tab. 5-6 (1., 3., 5. und 7. Spalte) zu entnehmen. Mit (A15.2) kann eine abschnittsweise konstante, risikoneutrale Hazard Rate-Funktion ohne numerische Verfahren angepasst werden (vgl. Tab. 5-6, 2., 4., 6. und 8. Spalte). Die dabei unterstellte Zinsstruktur ist durch die

---

<sup>1002</sup> Vgl. Abschnitt 5234.

<sup>1003</sup> Vgl. zur Duplikation vorschüssig und nachschüssig zahlender CDOs Abschnitt 5231.

<sup>1004</sup> Das Volumen des Referenzportfolios beträgt somit ca. 1 Mio. EUR.

Gleichung nach SVENSSON<sup>1005</sup> mit den Parameterspezifikationen  $\beta_0=4,5561$ ,  $\beta_1=(2,46637)$ ,  $\beta_2=(-2,05793)$ ,  $\beta_3=(-1,25413)$ ,  $\tau_1=1,94731$  und  $\tau_2=3,38678$  gegeben.<sup>1006</sup>

Swap-Satz	Hazard-Rate	Swap-Satz	Hazard-Rate	Swap-Satz	Hazard-Rate	Swap-Satz	Hazard-Rate
125	0,01789712	262	0,05666488	370	0,08444337	450	0,10042688
155	0,02645229	285	0,06131526	388	0,08713772	462	0,09956849
183	0,03422262	308	0,06836302	405	0,09110470	474	0,10424266
210	0,04176702	330	0,07411744	421	0,09464100	484	0,10181618
236	0,04894632	350	0,07794610	436	0,09775503	493	0,10210920

**Tab. 5-6: Risikoneutrale Hazard Rate-Funktion für "BB"-geratete Kredite**

Indikative Plain Vanilla CDS-Sätze in Anlehnung<sup>1007</sup> an die Zahlen der Banco Bilbao Vizcaya Argentaria (BBVA, Quelle: BLOOMBERG, 24.06.2005) für die Laufzeiten  $T_{CDO}=0.25, 0.50, \dots, 4.75, 5.00$  Jahre. Die Zahlungen der Risikoprämien erfolgen quartalsweise. Für die Kalibrierung der abschnittsweise konstanten Hazard Rate-Funktion gem. (A15.2) wurde eine laufzeiteinheitliche und konstante Recovery Rate von 30 % angenommen. Das Jahr wurde in 365 Zeitabschnitte unterteilt.<sup>1008</sup>

Als Beispiel diene eine den KfW-Transaktionen nachempfundene CDO-Struktur. Die CDOs zahlen quartalsweise, wobei sowohl die vorschüssige als auch die nachschüssige Zahlungsweise betrachtet werden soll. Die Laufzeiten der CDOs betragen unabhängig von der Seniorität einheitlich fünf Jahre. Angenommen werden ein Junior-Tranche, drei Mezzanine-Tranchen und eine Senior-Tranche. Die Credit Enhancements der Mezzanine-Tranchen sowie der Senior-Tranchen liegen bei  $v_2=70.000$  EUR (ca. 7 %),  $v_3=140.000$  EUR (ca. 14 %),  $v_4=210.000$  EUR (ca. 21 %) und  $v_5=280.000$  EUR (ca. 28 %). Bis auf die Senior-Tranche weisen damit alle Tranchen eine Stärke von 70.000 EUR (ca. 7 %) auf. Bei einer unterstellten Recovery Rate von 30 % erhält man mit (5.130) die kritischen Kreditausfallzahlen  $k_2=10$ ,  $k_3=20$ ,  $k_4=30$  und  $k_5=40$ .<sup>1009</sup> Das Ausfallrisiko des Referenzportfolios wird zunächst vollständig mit einem Master Basket Credit Default Swap transferiert (vgl. Abb. 5-15). Anschließend erfolgt eine erste Tranchierung. Die Senior-Tranche  $Tr_5=(280.000 \text{ EUR}, 1.050.000 \text{ EUR}]$  – im Folgenden zur besseren Übersicht als Tranche A bezeichnet – wird direkt durch einen Basket CDS gesichert. Mit der Transformation der Schwellenwerte wird dabei ein Basket CDS betrachtet, der ab dem 41. Kreditausfall Kom-

<sup>1005</sup> Vgl. L. Svensson (1994), Estimating interest rates, S. 2-8.

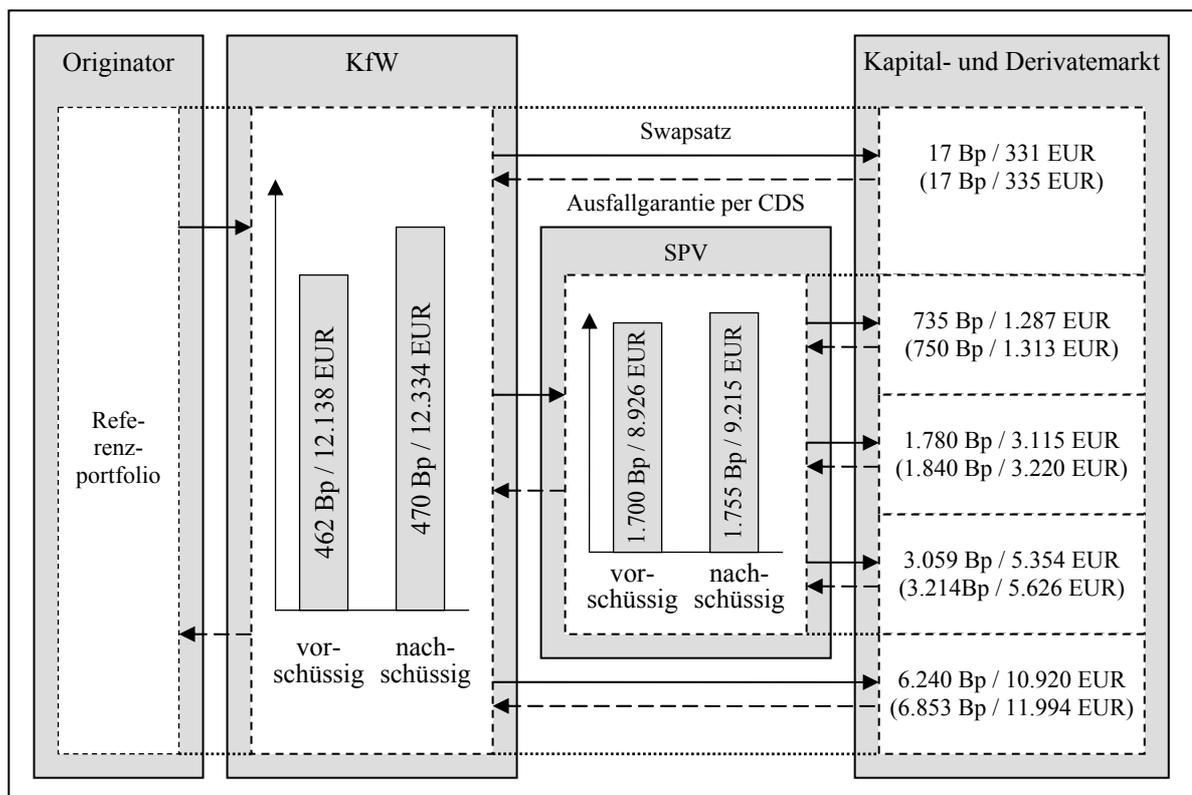
<sup>1006</sup> Die Parameter spiegeln die Zinsstruktur des deutschen Rentenmarktes am 31. Mai 2005 wider. Quelle: DEUTSCHE BUNDESBANK. Vgl. auch Deutsche Bundesbank (1997), Schätzung von Zinsstrukturen, S. 63 f. Obwohl in die Schätzung keine Rentenpapiere mit Laufzeiten unter drei Monaten eingehen (vgl. ebenda, S. 65), soll die Formel nach SVENSSON auch auf den extrem kurzfristigen Bereich angewendet werden. Die Zinsstruktur wird folglich mit der Formel nach SVENSSON extrapoliert.

<sup>1007</sup> Aus den Bid-Ask-Quotierungen auf verschiedene Underlyings wurden für die verfügbaren Laufzeiten Mittelwerte gebildet. Mit der Laufzeit als erklärende Variable wurde ein quadratisches Polynom angepasst. Dadurch konnten Swap-Sätze für unterschiedlichste Laufzeiten inter- und extrapoliert werden.

<sup>1008</sup> Vgl. auch die Ausführungen in Abschnitt 5221.

<sup>1009</sup> Damit ein Totalverlust eintritt, müssen gem. (5.130)  $105/0,7=150$  Kredite ausfallen (Bei 100 Krediten wäre (5.144) lediglich näherungsweise anwendbar.). Die Wahrscheinlichkeit dafür, ist bei gerade 105 Krediten selbstverständlich null.

penstrahlungen leistet. Das Kreditrisiko der Mezzanine-Tranchen wird zusammengefasst und als Tranche B ebenfalls per Basket CDS transferiert. Als Sicherungsgeber tritt hier das Special Purpose Vehicle auf. Mit der Transformation der Schwellenwerte wird dabei ein Basket CDS betrachtet, der ab dem 11. Kreditausfall, nicht jedoch über den 40. Kreditausfall hinaus, Kompensationszahlungen leistet. Das SPV spaltet die Tranche B weiter in die Tranchen  $Tr_2$ ,  $Tr_3$ , und  $Tr_4$  – im Folgenden zur besseren Übersicht als Tranchen B3, B2 und B1 bezeichnet – auf und begibt CDOs am Geld und Kapitalmarkt. Die Junior-Tranche  $Tr_1=(0 \text{ EUR}, 70.000 \text{ EUR}]$  wird als Tranche A wieder direkt durch einen Basket CDS gesichert:



**Abb. 5-15: Risikoadäquate Cash Flow-Struktur einer CDO-Transaktion**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=„BB“$ ,  $\rho=20\%$ .

CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $v_2=70$  TEUR,  $v_3=140$  TEUR,  $v_4=210$  TEUR,  $v_5=280$  TEUR,  $\Delta t=0,25$  Jahre.

Angegeben sind die vorschüssigen Risikoprämien in Bp (gerundet) sowie die Risikoprämienzahlungen in EUR für das erste Quartal. Die Werte in Klammern stellen die Äquivalente bei nachschüssiger Zahlung dar, wobei die Zahlungen unter der Prämisse ermittelt worden sind, dass im ersten Quartal kein Ausfall erfolgt.

In Abb. 5-15 sind die jeweiligen Risikoprämien in Basispunkten sowie die Risikoprämienzahlungen bei vorschüssiger Zahlungsweise für das erste Quartal in EUR angegeben. Die Klammern zeigen die entsprechenden Werte bei nachschüssiger Zahlungsweise. Da bei nachschüssiger Zahlungsweise bereits im ersten Quartal durch realisierte Verluste die Nominalwerte einzelner Tranchen sinken können und mit diesen die Risikoprämienzahlungen<sup>1010</sup>, sind die angegebenen Risikoprämienzahlungen unter der Prämisse ermittelt, dass

<sup>1010</sup> Vgl. Abschnitt 5232, insbesondere Abb. 5-14.

innerhalb des ersten Quartals keine Ausfälle stattfinden. Es sind diese potentiellen Kreditausfälle, die dazu führen, dass die Risikoprämien bei nachschüssiger Zahlungsweise *ceteris paribus* grundsätzlich höher ausfallen als bei vorschüssiger Zahlungsweise.

Es sei zunächst der Master Basket Credit Default Swap betrachtet, der das Kreditrisiko des gesamten Referenzportfolios transferiert. Die Risikoprämie beträgt bei vorschüssiger Zahlungsweise 462,40403 Bp (gerundet: 462 Bp). Die Risikoprämienzahlung für das erste Quartal beträgt  $462,40403/10.000 \cdot 1.050.000 \text{ EUR} \cdot 0,25 = 12.138 \text{ EUR}$ . Zur Ermittlung der Risikoprämie ist in (5.144) das Referenzportfolio als eine einzelne Tranche mit  $k_1=0$  und  $k_2=150$  Krediten zu betrachten. Alternativ kann ein Basket Credit Default Swap mit 105 Krediten anstelle von 150 Krediten betrachtet werden. Dabei ist zu beachten, dass das Protection Leg um den Faktor  $(1-\delta)$  zu modifizieren ist.<sup>1011</sup> Bei nachschüssiger Zahlungsweise beträgt die Risikoprämie 470 Bp. Die höhere Risikoprämie ist auf die Gefahr zurückzuführen, dass noch vor der ersten Risikoprämienzahlung Kreditausfälle das Nominalvolumen und damit die Bezugsgröße für die Berechnung der Zahlungshöhe mindern. Im Vergleich zum (nachschüssig zahlenden) Plain Vanilla CDS-Satz für eine Laufzeit von fünf Jahren, der zur Kalibrierung der Hazard Rate-Funktion herangezogen wurde (vgl. Tab. 5-6), fällt die Risikoprämie dagegen geringer aus. Ursache ist, dass der Plain Vanilla CDS im Zeitpunkt des Kreditereignisses terminiert wird. Der hier betrachtete Master Basket CDS zahlt jedoch weiterhin Risikoprämien nach Maßgabe des nicht ausgefallenen Nominalwertbetrages. Ausdruck findet das in der verwendeten – nicht erreichbaren – kritischen Kreditausfallzahl  $k_2=150$ . Beträgen die Recovery Rates krediteinheitlich null, wäre es unerheblich, ob das Ausfallrisiko des Referenzportfolios mit einem alles umfassenden Master Basket CDS oder kreditweise mit einzelnen Plain Vanilla CDS transferiert wird. Die Risikoprämienzahlungen wären letztlich stets identisch. Aus der Einsicht, den Master Basket CDS mit Plain Vanilla CDS duplizieren zu können, folgt sofort, dass – sofern  $k_1=0$  und  $k_2=150$  – die Faktorsensitivitäten (resp. die Prozesskorrelationen) zur Bestimmung der Verlustverteilungen  $N_{RP,t}$  in (5.144) und (5.152) keinerlei Auswirkung auf die ermittelte Risikoprämie hat.<sup>1012</sup>

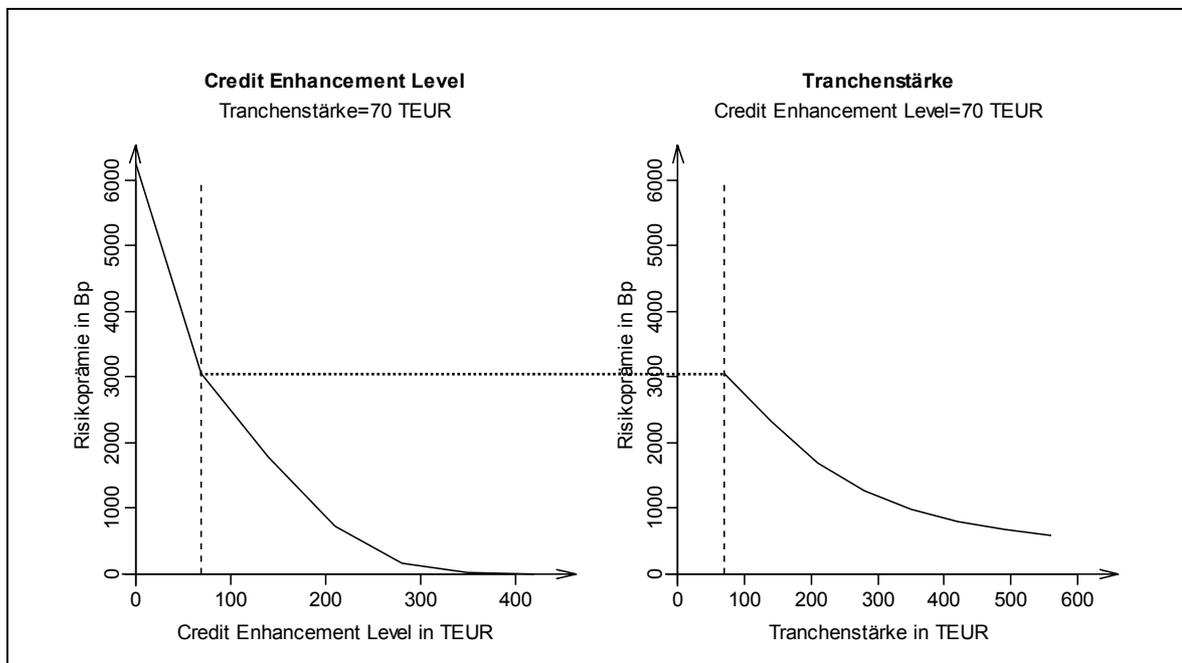
Betrachtet man die Risikoprämien der Tranchen  $Tr_1$ ,  $Tr_2$ ,  $Tr_3$ , und  $Tr_4$ , sinkt erwartungsgemäß die Risikoprämie von 6.240 Bp mit wachsendem Credit Enhancement Level auf 735 Bp. Die Risikoprämien sind direkt miteinander vergleichbar, da die Schwellenwerte so

---

<sup>1011</sup> Es sei daran erinnert, dass (5.144) die Risikoprämie einer Tranche als Risikoprämie eines Basket Credit Default Swaps ermittelt, wobei die Recovery Rate (formelseitig) null beträgt. Die Recovery Rate kommt in den kritischen Kreditausfallzahlen  $k_j$  zum Ausdruck. Vgl. die Ausführungen in Abschnitt 5234.

<sup>1012</sup> Vgl. dazu ebenfalls die Ausführungen in Abschnitt 5242.

gewählt wurden, dass alle vier Tranchen eine identische Tranchenstärke besitzen. Die Risikoprämie der Tranche  $Tr_5$  muss unter der Maßgabe beurteilt werden, dass die Stärke dieser Tranche deutlich höher ausfällt. In Abb. 5-16 ist links die Risikoprämie in Abhängigkeit des Credit Enhancement Levels abgetragen. Dabei beträgt die Tranchenstärke konstant 70.000 EUR. Mit zunehmendem Credit Enhancement Level nimmt die Risikoprämie einhergehend mit dem Kreditrisiko der Tranche ab. Rechts ist die Entwicklung der Risikoprämie in Abhängigkeit der Tranchenstärke bei konstantem Credit Enhancement Level i. H. v. 70.000 EUR eingezeichnet. Mit zunehmender Tranchenstärke sinkt die Risikoprämie. Ursache ist die Veränderung der Recoveryverteilung, einhergehend mit abnehmenden LGDs (in %).<sup>1013</sup> In beiden Diagrammen sind die Risikoprämien des Beispiels aus Abb. 5-15 mittels einer senkrechten gestrichelten Linie markiert (3.059 Bp):



**Abb. 5-16: Einfluss des Credit Enhancement Levels sowie der Tranchenstärke auf die Risikoprämie**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=$ „BB“,  $\rho=20\%$ . CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $v_2=70$  TEUR,  $v_3=140$  TEUR,  $v_4=210$  TEUR,  $v_5=280$  TEUR,  $\Delta t=0,25$  Jahre. Links: Tranchenstärke beträgt konst. 70 TEUR. Rechts: Credit Enhancement Level beträgt konstant 70 TEUR.

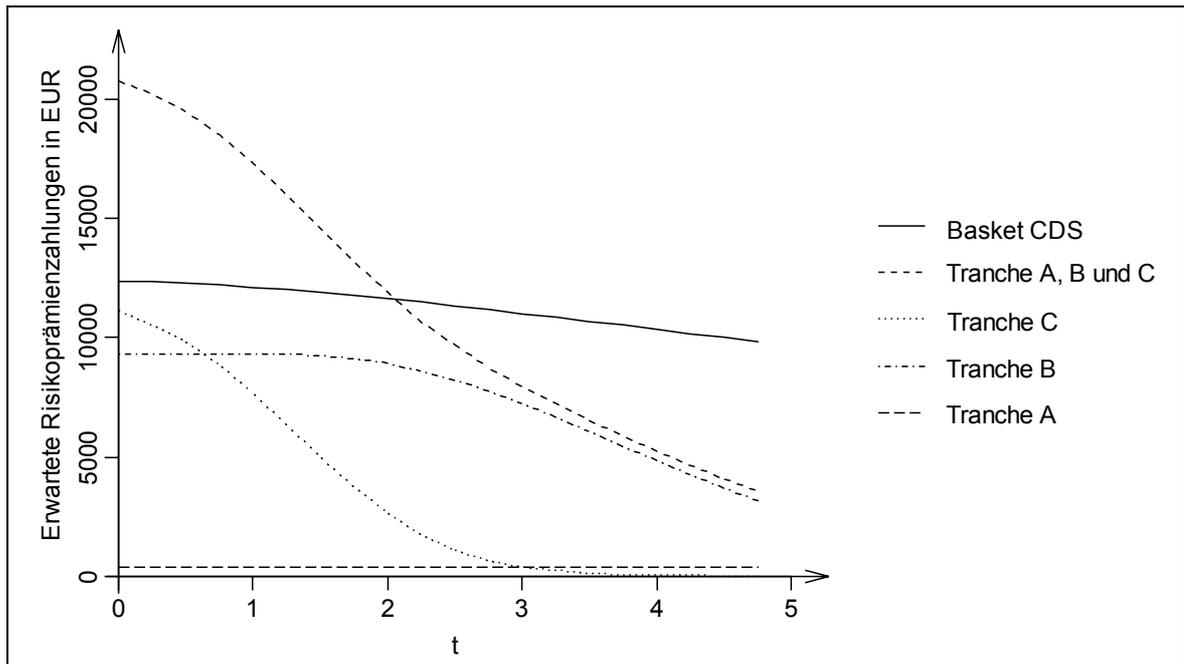
Auffällig ist, dass die Summe der Risikoprämienzahlungen der Tranchen  $Tr_1$  bis  $Tr_5$  i. H. v. 21.009 EUR<sup>1014</sup> für das erste Quartal die Risikoprämienzahlung des Master Basket CDS i. H. v. 12.138 EUR weit überschreitet. Gleiches ist für die erste Stufe der Tranchierung zu beobachten. Hier beträgt die Summe der Risikoprämienzahlungen der Tranchen A, B, und C 20.177 EUR.<sup>1015</sup> Damit erhält der Protection Seller aus dem Master Basket CDS

<sup>1013</sup> Vgl. in diesem Zusammenhang auch die Abb. 5-9, die Abb. 5-6 sowie die dortigen Analysen (unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß).

<sup>1014</sup> 10.920 EUR+5.354 EUR+3.115 EUR+1.287 EUR+331 EUR

<sup>1015</sup> 10.920 EUR+8.926 EUR+331 EUR

lediglich 12.138 EUR, muss jedoch in seiner Funktion als Protection Buyer für die Basket CDS der Tranchen A, B und C Risikoprämien i. H. v. 20.177 EUR zahlen. Dem gleichen Problem steht das SPV gegenüber. Als Protection Seller im Rahmen des Basket CDS für die Tranche B erhält es Risikoprämienzahlungen i. H. v. 8.926 EUR, ist jedoch zu Risikoprämienzahlungen i. H. v. 9.756 EUR<sup>1016</sup> für die emittierten CDOs der Tranchen B1, B2 und B3 verpflichtet. Wie sind diese Differenzen zu erklären und inwieweit könnte daraus ein Ausfallrisiko für das SPV entstehen?



**Abb. 5-17: Erwartete Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Zeit (I)**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=„BB“$ ,  $\rho=20\%$ .

CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $Tr_C=(0 \text{ EUR}, 70 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_B=(70 \text{ TEUR}, 280 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_A=(280 \text{ TEUR}, 1.050 \text{ TEUR}]$ ,  $\Delta t=0,25$  Jahre, vorschüssige Zahlungsweise.

Die Differenzen resultieren daraus, dass die Risikoprämien in Basispunkten auf erwartungsgemäß abnehmende Tranchennominalwerte zu beziehen sind. Die Risikoprämienzahlungen für die jeweiligen Tranchen werden mit fortschreitender Zeit und eintretenden Kreditverlusten nominal abnehmen. Dabei ist die Junior Tranche (Tranche C) aufgrund ihrer Risikopufferfunktion zuerst betroffen. Zwar weist sie mit 10.920 EUR die anfänglich höchste Risikoprämienzahlung auf, jedoch ist zu erwarten, dass dieser Betrag mit fortschreitender Zeit rasch abnimmt. In Abb. 5-17 ist unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q'$  der erwartete Verlauf der Risikoprämienzahlungen nach Maßgabe der erwarteten Tranchenverluste gem. (5.8) abgetragen (gepunktete Linie). Die Risikoprämienzahlung nimmt relativ zeitnah ab. Ähnliches ist für die Tranche B zu beobachten (gemischt gepunktete und gestrichelte Linie). Im Unterschied zur Tranche C verharrt die Risi-

<sup>1016</sup> 5.354 EUR+3.115 EUR+1.287 EUR

koprämienzahlung aufgrund des durch Tranche C zur Verfügung stehenden Ausfallschutzes für eine gewisse Zeit auf einem konstanten Niveau, um dann allmählich zu fallen. Für die Tranche A verläuft die erwartete Risikoprämienzahlung auf einem weitgehend konstanten, aber niedrigen Niveau (lang-gestrichelte Linie). Die Summe der erwarteten Risikoprämienzahlungen wird dominiert durch die Risikoprämienzahlungen der Tranchen C und B (kurz-gestrichelte Linie). Ist der Betrag anfänglich deutlich höher als derjenige des Master Basket CDS (durchgezogene Linie), so kehrt sich die Beziehung nach ungefähr der Hälfte der Transaktionslaufzeit in das Gegenteil um. Die Zahlungen aus dem Master Basket CDS fallen in der Erwartung höher aus. Zwar nimmt auch die Risikoprämienzahlung des Master Basket CDS ab, jedoch weniger stark als die der einzelnen Tranchen. Selbst wenn mit abbeschriebenen Nominalwerten der Tranchen C und B lediglich Risikoprämienzahlungen für die Tranche A auf niedrigem Niveau fließen, ist die Höhe der Risikoprämienzahlungen aus dem Master Basket CDS mit Blick auf den verbleibenden Nominalbetrag des Referenzportfolios noch beträchtlich.

Über den gesamten Transaktionszeitraum hinweg betrachtet, ist – abgesehen von Zinseffekten – die Summe aller erwarteten Risikoprämienzahlungen der Tranchen A, B und C identisch mit der Summe der erwarteten Risikoprämienzahlungen des Master Basket CDS.<sup>1017</sup> Graphisch, anhand der Abb. 5-17 veranschaulicht<sup>1018</sup>, bedeutet dies, dass die Fläche unterhalb der durchgezogenen Linie für den Master Basket CDS, der Fläche unterhalb der kurz-gestrichelten Linie für die Tranchen A, B und C entspricht. Zahlungsfehlbeträge aus Sicht des Protection Sellers im Rahmen des Master Basket CDS in frühen Perioden gleichen sich in der Erwartung durch Zahlungsüberschüsse in späteren Perioden aus.

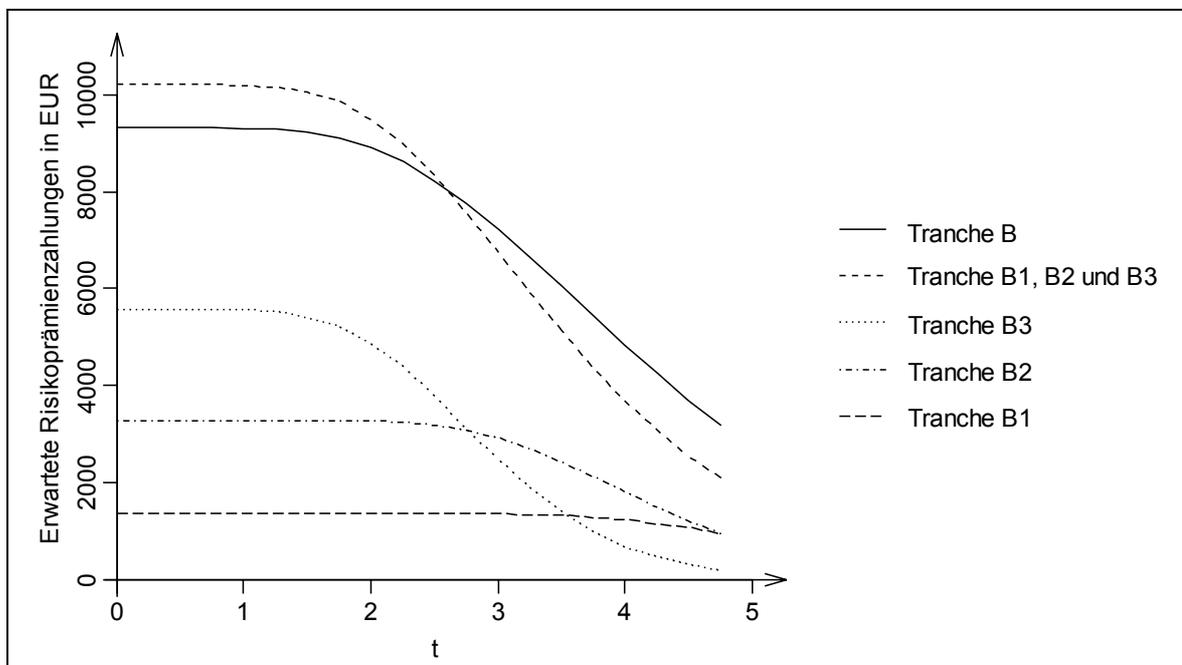
Zu analogen Resultaten gelangt man, wenn man die Aufspaltung der Tranche B in die Tranchen B1, B2 und B3 mit Blick auf die Risikoprämienzahlungen betrachtet. Eine besondere Bedeutung erfahren die Risikoprämienzahlungen dieser vier Tranchen dadurch, dass sie neben den Einzahlungen aus den risikofreien Anlagen der erhaltenen liquiden Mittel aus der Emission der CDOs und den Auszahlungen zur Bedienung des risikofreien Teils der Zinsansprüche der CDO-Investoren die einzigen Quellen und Senken für laufende Ein-

---

<sup>1017</sup> Zur Verdeutlichung wurde in Anlage 19 das hier verwendete Beispiel für eine flache Zinsstruktur i. H. v. null erneut berechnet. Man erkennt, dass die Summe der Risikoprämienzahlungen der jeweiligen Tranchen den erwarteten Tranchenverlusten entsprechen. Zudem entspricht die Summe der Risikoprämienzahlungen aller Tranchen über den gesamten Transaktionszeitraum hinweg betrachtet der Summe der Risikoprämienzahlungen des Master Basket CDS (vgl. Tab. A - 9).

<sup>1018</sup> Die Zahlungen erfolgen zeit-diskret und nicht, wie Abb. 5-17 vermuten lassen könnte, zeit-stetig. Die Ermittlung einer Fläche unter einem Graphen ist streng genommen nicht möglich und dient lediglich der Illustration.

und Auszahlungen des rechtlich und wirtschaftlich selbständigen Special Purpose Vehicles<sup>1019</sup> während der gesamten Transaktionslaufzeit darstellen.<sup>1020</sup> Da die Zahlungseingänge aus den risikofreien Geldanlagen stets den Zahlungsausgängen für den risikofreien Teil der CDO-Zinszahlungen entsprechen, ist es hinreichend, die Finanzlage des SPVs auf der Basis der Risikoprämienzahlungen zu analysieren. In Abb. 5-18 ist der erwartete Verlauf der entsprechenden Risikoprämienzahlungen unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q'$  nach Maßgabe der erwarteten Tranchenverluste gem. (5.8), abgetragen. Es wird ersichtlich, dass im frühen Stadium der Transaktion die erwarteten Risikoprämienauszahlungen für die Bedienung der CDOs (kurz-gestrichelte Linie), die erwarteten Risikoprämieinzahlungen aus dem abgeschlossenen Basket CDS (durchgezogene Linie) übertreffen. Ohne eine hinreichend hohe Cash Reserve, finanziert mit haftendem Eigenkapital, wäre das SPV ohne weitere Maßnahmen sofort zahlungsunfähig.



**Abb. 5-18: Erwartete Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Zeit (II)**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=„BB“$ ,  $\rho=20\%$ .

CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $Tr_B(70$  TEUR,  $280$  TEUR],  $Tr_{B3}(70$  TEUR,  $140$  TEUR],  $Tr_{B2}(140$  TEUR,  $210$  TEUR],  $Tr_{B1}(210$  TEUR,  $280$  TEUR],  $\Delta t=0,25$  Jahre, vorschüssige Zahlungsweise.

Das SPV-Management könnte überlegen, einen Teil der risikofreien Geldanlagen aufzulösen, um die Risikoprämienzahlungsdifferenz auszugleichen. Allerdings verringerten sich damit die Einzahlungen aus den risikofreien Geldanlagegeschäften in den Folgeperioden, wodurch zusätzlich zu den Risikoprämienzahlungen auch die Zahlungen des risikofreien Teils der CDO-Zinszahlungen in Gefahr gerieten. Zudem stünde den Verbindlichkeiten aus den CDOs ein nicht hinreichend hohes Vermögen gegenüber. Das SPV wäre überschuldet.

<sup>1019</sup> Vgl. zur Konstruktion von Special Purpose Vehicles Abschnitt 222.

<sup>1020</sup> Managementgebühren werden hierbei nicht betrachtet.

Auch eine Finanzierung der Risikoprämienzahlungsdifferenz mit Fremdkapital scheidet mit Blick auf die resultierende Überschuldung aus.

Eine mit haftendem Eigenkapital finanzierte Cash Reserve wird in den frühen Perioden der Transaktion kontinuierlich abnehmen. Erst in späteren Perioden, wenn sich die Risikoprämienzahlungsdifferenz umkehrt, kann die Cash Reserve wieder aufgebaut werden und steht bei Liquidation des SPVs am Ende der Transaktion den Eigenkapitalgebern zu. Unter dem risikoneutralen Maß entspricht der Erwartungswert des Eigenkapitals am Ende des Transaktionszeitraumes dem Anfangsbetrag zuzüglich einer risikofreien Verzinsung.

Die notwendige Höhe der anfänglichen Cash Reserve ergibt sich in der Erwartung – unter Vernachlässigung von Zinseffekten – aus der eingeschlossenen Fläche<sup>1021</sup> zwischen den kurz-gestrichelten und durchgezogenen Linien bis zu ihrem Schnittpunkt.<sup>1022</sup> Im vorliegenden Beispiel beträgt die notwendige Cash Reserve mit Blick auf den (risikoneutralen) Erwartungswert ca. 8.000 EUR (ca. 0,8 % des Referenzportfolios). Sollte die Zahlungsfähigkeit und Schuldendeckungsfähigkeit des SPVs unter der Konstruktion gem. Abb. 5-15 garantiert werden, müsste die Höhe der Cash Reserve vom Worst-Case ausgehend gestaltet werden. Der Worst-Case tritt ein, wenn keine Kreditausfälle im Referenzportfolio zu verzeichnen sind. Dann würde sich (a) die Risikoprämienzahlungsdifferenz nicht verringern und sich (b) auch nicht zum Vorteil des SPVs umkehren. Die Cash Reserve würde stetig sinken. Im vorliegenden Beispiel müsste – unter Vernachlässigung von Zinseffekten – ein Betrag i. H. v.  $(9.756 \text{ EUR} - 8.926 \text{ EUR}) \cdot 20 = 16.600 \text{ EUR}$  (ca. 1,66 % des Referenzportfolios) zur Verfügung stehen.

Im Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion besteht das Eigenkapital aus 100.000 Aktien á 1 IEP (1,269738 EUR). Eingezahlt waren davon lediglich 7,505.25 IEP.<sup>1023</sup> Das sind gerade ca. 0,00095 % des Referenzportfolios. Selbst bei voll eingezahltem Eigenkapital beträgt der Puffer gerade ca. 0,013 %. Welche Konstruktionsmerkmale des SPVs führen dazu, dass kaum haftendes Eigenkapital zur Verfügung gestellt werden muss?

Im Rahmen des PROMISE-Programms der KfW wird die Tranche B in Abb. 5-15 nicht durch einen Basket CDS, sondern durch referenzportfolioperformanceabhängige Schuldscheine (Certificates of Indebtedness) besichert. Die Emissionserlöse aus den CDOs wer-

---

<sup>1021</sup> Zur Kritik der Flächenbetrachtung bei diskreten Zahlungszeitpunkten vgl. Fn. 1018.

<sup>1022</sup> Zur Verdeutlichung wurde in Anlage 19 das hier verwendete Beispiel für eine flache Zinsstruktur i. H. v. null erneut berechnet (vgl. Tab. A - 10). Siehe auch Fn. 1017.

<sup>1023</sup> Vgl. Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 85.

den nicht durch das SPV in risikofreie Geldanlagen investiert, sondern direkt an die KfW weitergeleitet. Zu den Zins- und Tilgungszahlungen dieser Schuldscheine heißt es im INFORMATION-MEMORANDUM:

*„KfW will issue certificates of indebtedness credit linked to the Reference Claims (the ‘Certificates’) signed by KfW as obligor and the Issuer [SPV] as creditor under which KfW undertakes to pay to the Issuer the principal amount and interest equal to the aggregate principal amounts and interest payable under the Notes [CDOs] subject to the conditions of the Certificates.“*<sup>1024</sup>

Damit erhält das SPV Risikoprämieinzahlungen aus den Schuldscheinen in exakt der Höhe der Risikoprämienauszahlungen im Rahmen des Kapitaldienstes für die CDOs. Eine (minimale) Cash Reserve ist lediglich notwendig, um Timing-Schwierigkeiten zwischen den Risikoprämieinzahlungen und -auszahlungen auszugleichen. Dadurch ist jedoch die Problematik schwankender Cash Reserven nicht grundsätzlich gelöst, sondern lediglich vom SPV auf die KfW verlagert worden.

Während eine faire Risikoprämienkalkulation zu einem erwarteten Prämienauszahlungsverlauf nach Maßgabe der durchgezogenen Linie in Abb. 5-18 bei der KfW führen würde, resultiert aus der obigen Vereinbarung ein erwarteter Prämienauszahlungsverlauf nach Maßgabe der kurz-gestrichelten Linie. Die Risikoprämienauszahlungen sind anfänglich nach Maßgabe des graphisch ersichtlichen Abstandes zwischen beiden Linien zu hoch und schließlich zu niedrig. Hatte die KfW ohnehin schon anfänglich die Differenz aus den niedrigen Risikoprämieinzahlungen aus dem Master CDS Basket und den hohen Risikoprämienauszahlungen für die Basket CDS der Tranchen C, B und A zwischen zu finanzieren, erhöht sich der zwischen zu finanzierende Betrag durch die obige Vereinbarung. Den Risikoprämieinzahlungen aus dem Master Basket CDS stehen nun nicht mehr die Risikoprämienauszahlungen für die Basket CDS C, B und A, sondern die Risikoprämienauszahlungen für den Basket CDS der Tranche C, die CDOs der Tranchen B3, B2 und B1 und den Basket CDS der Tranche A gegenüber. Entsprechend ist die KfW gehalten, eine – aufgrund der obigen Vereinbarung – betragsmäßig aufgestockte Cash Reserve zum Zwecke des Ausgleichs der Risikoprämienzahlungsdifferenzen zu halten.

Das Vorhalten einer adäquaten Cash Reserve seitens der KfW dürfte zu weitaus weniger Problemen führen. Während das SPV nur eine einzelne Transaktion durchführt, wickelt die

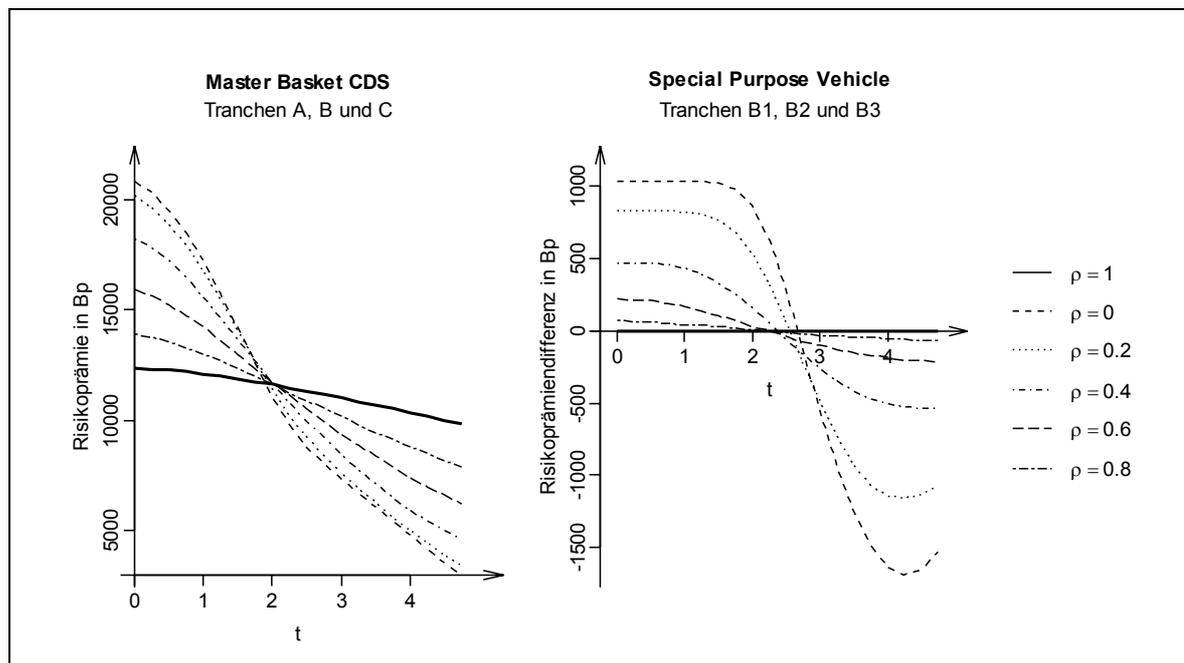
---

<sup>1024</sup> Dresdner Kleinwort Wasserstein (2001), Promise-K 2001-1 plc, S. 2.

KfW eine Vielzahl solcher Transaktionen ab.<sup>1025</sup> Befindet sich eine einzelne Transaktion im Stadium von Risikoprämienzahlungsdefiziten, generieren andere Transaktionen bereits Risikoprämienzahlungsüberschüsse. Für die transaktionsübergreifende Cash Reserve entsteht daraus ein Kompensationseffekt. Da zudem nicht davon ausgegangen werden kann, dass exakt die erwarteten Portfolioverlusthöhen eintreten, sind zudem Abweichungen vom Erwartungswert einzelner Transaktionen durch andere Transaktionen auszugleichen. Schließlich ist zu erwähnen, dass die Höhe der transaktionsübergreifenden Cash Reserve, gemessen an der Bilanzsumme der KfW, verschwindet.

## 5242 Risikoprämien und Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Faktorsensitivitäten

Abschließend soll der Einfluss der Faktorsensitivitäten (resp. Prozesskorrelationen) auf die Risikoprämien und die Risikoprämienzahlungen untersucht werden. Dazu sind in Abb. 5-19 (links) die erwarteten Verläufe der Risikoprämienzahlungen für verschiedene Faktorsensitivitäten nach Maßgabe der erwarteten Tranchenverluste gem. (5.8) unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß  $Q$  für die Tranchen A, B und C sowie für den Master Basket CDS abgetragen:



**Abb. 5-19: Erwarteter Risikoprämienzahlungsverlauf vs. Faktorsensitivität**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=$  „BB“,  $\rho=20\%$ .

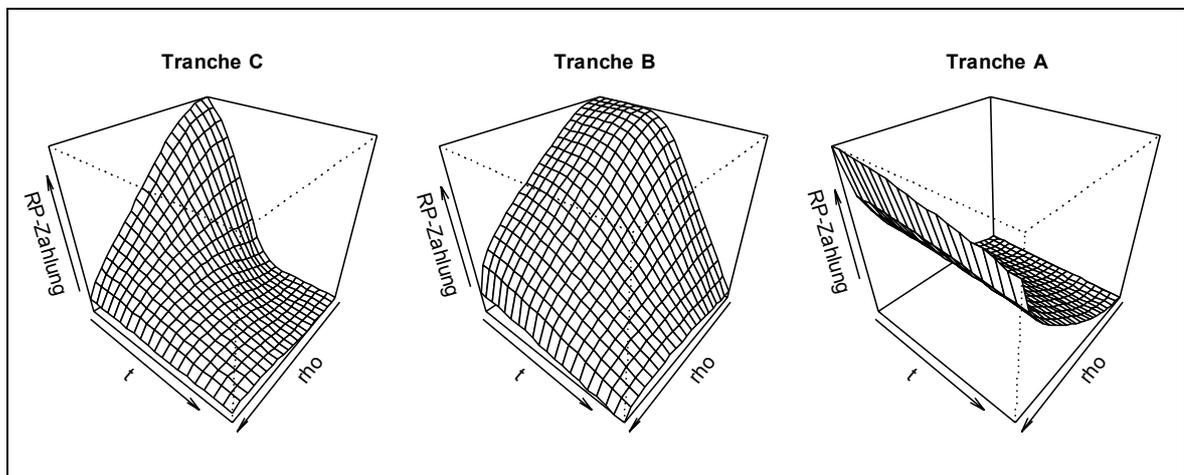
CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $Tr_C=(0 \text{ EUR}, 70 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_B=(70 \text{ TEUR}, 280 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_A=(280 \text{ TEUR}, 1.050 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B3}=(70 \text{ TEUR}, 140 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B2}=(140 \text{ TEUR}, 210 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B1}=(210 \text{ TEUR}, 280 \text{ TEUR}]$ ,  $\Delta t=0,25$  Jahre, vorschüssige Zahlungsweise. Links: Erwartete Risikoprämienzahlungsverläufe der Tranchen A+B+C im Vergleich zum erwarteten Risikoprämienzahlungsverlauf des Master Basket CDS (hervorgehoben).

Rechts: Differenzen zwischen den erwarteten Risikoprämienzahlungen der Tranchen B1+B2+B3 und den erwarteten Risikoprämienzahlungen der Tranche B.

<sup>1025</sup> Vgl. Tab. 2-2.

Die Risikoprämienzahlungen des Master Basket CDS bleiben von der Faktorsensitivität völlig unberührt (hervorgehobene Linie). Das ist insofern plausibel, dass der Master Basket CDS (für eine Recovery Rate von null) durch ein Portfolio aus Plain Vanilla CDS dupliziert werden kann.<sup>1026</sup> Die Risikoprämienzahlungen der Tranchen A, B und C hingegen verändern sich in ihrer Höhe sowie ihrer zeitlichen Struktur. Dabei steigen die Risikoprämienzahlungsdifferenzen als Summe der Risikoprämienzahlungen der drei Tranchen, abzüglich der Risikoprämienzahlungen aus dem Master Basket CDS, mit wachsendem Diversifikationsgrad des Referenzportfolios. Strebt die Faktorsensitivität gegen den Wert eins, verschwinden die Risikoprämienzahlungsdifferenzen.

Anhand der Abb. 5-20 wird der Beitrag der Risikoprämienzahlungen der Tranchen A, B und C zur obigen Summe in Abhängigkeit der Zeit und der Faktorsensitivität sichtbar. Dabei verschwindet mit zunehmender Faktorsensitivität die Dominanz der Risikoprämienzahlungen der Tranchen B und C. Die Verläufe werden flacher. Gleichzeitig steigt das Niveau der Risikoprämienzahlungen der Tranche A zeitübergreifend an und beeinflusst den Wert der Summe in zunehmend stärkerem Ausmaß. Die Ursache dafür ist die höhere Ausfallwahrscheinlichkeit der Tranche A mit abnehmendem Diversifikationsgrad des Referenzportfolios. Die Summen konvergieren schließlich gegen die Risikoprämienzahlungen des Master Basket CDS.

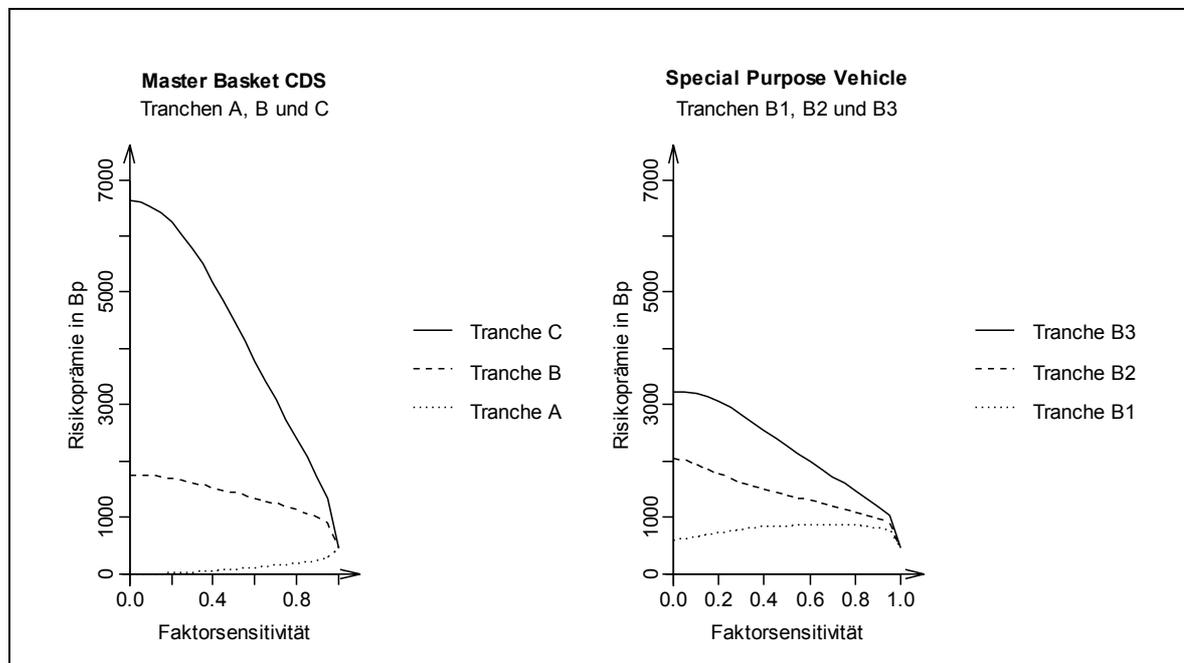


**Abb. 5-20: Erwartete Risikoprämienzahlungsbeiträge der Tranchen in Abhängigkeit der Faktorsensitivität**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=„BB“$ ,  $\rho=20\%$ .  
 CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $Tr_C=(0 \text{ EUR}, 70 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_B=(70 \text{ TEUR}, 280 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_A=(280 \text{ TEUR}, 1.050 \text{ TEUR}]$ ,  $\Delta t=0,25$  Jahre, vorschüssige Zahlungsweise. Dargestellt sind die erwarteten Risikoprämienzahlungsverläufe in Abhängigkeit der Faktorsensitivität für die Tranchen C, B und A.

<sup>1026</sup> Bei einer von null verschiedenen Recovery Rate müssten theoretisch die zur Duplikation verwendeten CDS auch nach dem Kreditausfall auf der Basis des wiedergewonnenen Nominalvolumens Prämienzahlungen leisten. Das ist i. d. R. nicht der Fall. Vgl. auch die Ausführungen zu Beginn dieses Abschnitts.

Die Ergebnisse sind auf die Risikoprämienzahlungen des SPVs übertragbar. Da jedoch das SPV selbst als Tranche zu begreifen ist (Tranche B) und der erwartete Verlauf der Risikoprämienzahlungen anders als beim Master Basket CDS von der Faktorsensitivität beeinflusst wird, ist eine absolute Darstellung der Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Faktorsensitivität wenig aussagekräftig. Stattdessen wurden in Abb. 5-19 (rechts) die Risikoprämienzahlungsdifferenzen abgetragen. Erwartungsgemäß verschwinden die Risikoprämienzahlungsdifferenzen mit wachsender Faktorsensitivität. Zu bemerken bleibt, dass bei niedrigen Faktorsensitivitäten gegen Ende der Transaktion die (dann) positive Risikoprämienzahlungsdifferenz nach anfänglichem Wachstum wieder sinkt. Ursache hierfür sind die gegen Ende der Transaktionslaufzeit verstärkt abnehmenden Risikoprämienzahlungen der Tranche B.



**Abb. 5-21: CDO-Risikoprämien in Abhängigkeit der Faktorsensitivität**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=$ „BB“,  $\rho=20\%$ .

CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $Tr_C=(0 \text{ EUR}, 70 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_B=(70 \text{ TEUR}, 280 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_A=(280 \text{ TEUR}, 1.050 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B3}=(70 \text{ TEUR}, 140 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B2}=(140 \text{ TEUR}, 210 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B1}=(210 \text{ TEUR}, 280 \text{ TEUR}]$ ,  $\Delta t=0,25$  Jahre, vorschüssige Zahlungsweise.

Die faktorsensitivitätsinduzierten Änderungen der Risikoprämienzahlungsstrukturen sind nicht nur in der zeitlichen Dimension, sondern auch in der betragsmäßigen Dimension zu suchen. In Abb. 5-21 sind die Risikoprämien, gemessen in Bp, für die jeweiligen Tranchen in Abhängigkeit der Faktorsensitivität abgetragen. Dabei zeigt sich, dass die Risikoprämie der Senior Tranche mit abnehmendem Diversifikationsgrad des Referenzportfolios zunimmt (gepunktete Linie, links). Die Risikoprämie der Junior Tranche nimmt hingegen ab. Die Junior Tranche profitiert – ähnlich wie bei einem Call – vom abnehmenden Diversifi-

kationsgrad und der folglich zunehmenden Volatilität des Wertes des Referenzportfolios.<sup>1027</sup> Die Mezzanine-Tranchen absorbieren verbleibende Nettoeffekte.

Dabei muss die Summe aller erwarteten Risikoprämienzahlungen über den Transaktionshorizont hinweg stets konstant bleiben. Lediglich die Verteilung des gesamten Betrages der Risikoprämienzahlungen auf die einzelnen Tranchen verändert sich. In Abb. 5-22 sind die Summen der erwarteten Risikoprämienzahlungen für den gesamten Transaktionszeitraum der Tranchen A, B und C für unterschiedliche Faktorsensitivitäten zwischen 0 % und 100 % abgetragen. Dabei zeigt sich, dass mit zunehmender Faktorsensitivität und abnehmendem Diversifikationsgrad der erwartete Verlust und somit die Summe der erwarteten Risikoprämienzahlungen der Senior Tranche wächst. Das Bild verändert sich für die Junior Tranche. Da die Junior Tranche bei zunehmender Faktorsensitivität von der zunehmenden Volatilität des Wertes des Referenzportfolios profitiert, gilt hier exakt das Gegenteil. Verbleibende Differenzen werden durch die Mezzanine-Tranchen absorbiert.



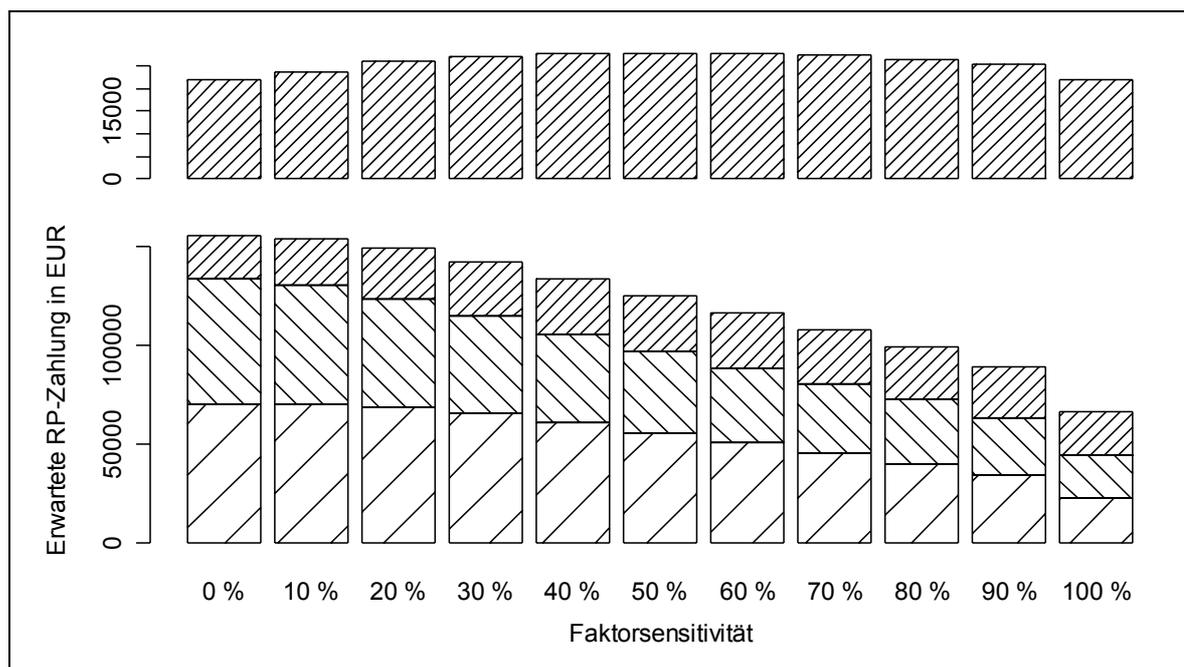
**Abb. 5-22: Erwartete Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Faktorsensitivität (I)**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=„BB“$ ,  $\rho=20\%$ .  
 CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $Tr_C=(0 \text{ EUR}, 70 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_B=(70 \text{ TEUR}, 280 \text{ TEUR}]$ ,  $Tr_A=(280 \text{ TEUR}, 1.050 \text{ TEUR}]$ ,  $\Delta t=0,25$  Jahre, vorschüssige Zahlungsweise. Struktur der Balken: unten = Tranche C, mittig = Tranche B, oben = Tranche A.

Nicht immer kann zweifelsfrei entschieden werden, wie sich die Risikoprämien bzw. die Risikoprämienzahlungen verhalten. Zur Illustration sind die erwarteten Risikoprämienzahlungen der Mezzanine-Tranchen B1, B2 und B3 für den Transaktionszeitraum als Summe für verschiedene Faktorsensitivitäten in Abb. 5-23 abgetragen (unten). Kennlich gemacht

<sup>1027</sup> Vgl. D. Duffie und N. Gârleanu (2001), CDOs, S. 24-26.

wurde, welche Beträge die einzelnen Tranchen zu dieser Summe beisteuern. Mit zunehmender Faktorsensitivität sinkt die Summe der erwarteten Risikoprämienzahlungen. Für die Tranche B1 jedoch fällt das Ergebnis nicht eindeutig aus. Während die Risikoprämienzahlungen für den Transaktionszeitraum mit wachsender Faktorsensitivität zunächst wachsen, ist ab einer Faktorsensitivität von 70 % zunehmend das Gegenteil zu beobachten (oben). Zudem kann dieser Effekt unmittelbar an den Risikoprämien abgelesen werden. Die Risikoprämie steigt zunächst mit zunehmender Faktorsensitivität, um dann wieder zu fallen (vgl. Abb. 5-21, rechts, gepunktete Linie).



**Abb. 5-23: Erwartete Risikoprämienzahlungen in Abhängigkeit der Faktorsensitivität (II)**

Referenzportfolio:  $N=105$ ,  $D=10$  TEUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung,  $R=$  „BB“,  $\rho=20\%$ .  
 CDS/CDOs:  $T_{CDO}=5$  Jahre,  $Tr_B(70\text{ TEUR}, 280\text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B3}(70\text{ TEUR}, 140\text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B2}(140\text{ TEUR}, 210\text{ TEUR}]$ ,  $Tr_{B1}(210\text{ TEUR}, 280\text{ TEUR}]$ ,  $\Delta t=0,25$  Jahre, vorschüssige Zahlungsweise. Struktur der Balken: unten = Tranche B3, mittig = Tranche B2, oben = Tranche B1.

Bei gegebenen Risikoprämien haben Faktorsensitivitätsänderungen im Umkehrschluss eindeutig prognostizierbare Auswirkungen auf die Marktwerte (Barwerte) der Junior- und Senior-Tranche, während die Konsequenzen für die Mezzanine-Tranchen nicht sofort ersichtlich sind. Der Marktwert der Junior-Tranche steigt mit wachsender Faktorsensitivität. Der Marktwert der Senior-Tranche sinkt. Das Ergebnis ist plausibel, da im Falle eines Neuabschlusses die geforderte Risikoprämie für die Junior-Tranche seitens der Investoren vergleichsweise niedriger und für die Senior-Tranche vergleichsweise höher ausfallen würde. Die Änderungen der Marktwerte der Mezzanine-Tranchen hängen dagegen von den spezifischen Gestaltungsmerkmalen ab.

Bei einer Faktorsensitivität (resp. Prozesskorrelation) von eins sind alle Risikoprämien, gemessen in Basispunkten, identisch. Die Risikoprämienzahlungen aus dem Master Basket CDS werden direkt nach Maßgabe der einzelnen Tranchengrößen verteilt. Die Marktwerte ermitteln sich demzufolge als Anteil am Marktwert des Referenzportfolios in Abhängigkeit der jeweiligen Tranchengröße. Zwar wird dadurch ein theoretischer (und praktisch nicht vorkommender) Sonderfall beschrieben, vertieft aber das Verständnis für die Höhe fairer CDO-Risikoprämien.

## 6 Schlussbetrachtung

Kapitalmarkttheoretische Modelle zur Quantifizierung der Kreditrisiken und Bewertung von CDOs leisten einen wesentlichen Beitrag zu einem tieferen Verständnis der Funktionsweise von CDO-Transaktionen, zur Abschätzung der potentiellen Performance von CDO-Investitionen und zur Vereinbarung fairer CDO-Risikoprämien. Die Entwicklung neuer und die Weiterentwicklung bestehender Modelle ist ein aktuelles Thema sowohl in der wissenschaftlichen Forschung als auch in der Praxis. Durch die Notwendigkeit der Vergabe von Ratings für CDOs als Voraussetzung für eine erfolgreiche Emission dieser Finanztitel an den organisierten Finanzmärkten haben Ratingagenturen frühzeitig begonnen, praktikable und gegenüber den Finanzmarktteilnehmern leicht kommunizierbare, aber von der Komplexität der CDO-Transaktionen stark abstrahierende Ansätze zu entwickeln. In der wissenschaftlichen Forschung wurde nach theoretisch fundierten Ansätzen gesucht. Dabei sind unternehmenswertorientierte Modelle im Sinne von BLACK, SCHOLES & MERTON<sup>1028</sup> mit Blick auf das kreditausfall- und tranchenausfallauslösende Ereignis ökonomisch interpretierbar. Gleichzeitig können sie jedoch zu hoher Komplexität bei der Umsetzung führen. Simulationen sind oft der einzige Ausweg. Reduzierte Modelle im Sinne von ARTZNER, DELBAEN, JARROW, LANDOW & TURNBULL<sup>1029</sup> sind relativ einfach kapitalmarktadäquat zu kalibrieren, lassen jedoch bzgl. des kreditausfall- und tranchenausfallauslösenden Ereignisses eine ökonomische Interpretation vermissen. Obwohl die wissenschaftliche Forschung auf diesem Gebiet keineswegs als abgeschlossen betrachtet werden kann, ist zunehmend eine Integration der Ergebnisse in die Ansätze der Ratingagenturen zu beobachten. Der CDO EVALUATOR™ von STANDARD & POOR'S sei hier als unternehmenswertorientiertes Beispiel angeführt. Veränderungen in den CDO-Strukturen, bedingt durch Veränderungen der (aufsichts)rechtlichen Rahmenbedingungen und der mit CDO-Transaktionen verfolgten Ziele, sind zudem stets bei der Modellentwicklung zu berücksichtigen.

Daher sollte zunächst ein ökonomisch interpretierbares unternehmenswertorientiertes Kreditrisikoportfoliomodell konzipiert werden, auf dessen Basis das Kreditrisiko von synthetischen CDOs gemessen, Barwerte dieser Finanztitel ermittelt, faire Risikoprämien abgeleitet und Zahlungsströme von CDO-Transaktionen in ihrer Gesamtheit analysiert werden können. Die Kreditrisikomessung und Bewertung sollte nicht nur bei homogenen, sondern auch bei heterogenen Referenzportfolios weitgehend ohne Monte Carlo-Simulationen

---

<sup>1028</sup> Vgl. R. Merton (1974), Pricing corporate debt, S. 450-455. Vorarbeiten leisteten F. Black und M. Scholes (1973), Options and corporate liabilities, S. 649 f. und R. Merton (1973), Option pricing, S. 160-169.

<sup>1029</sup> Vgl. P. Artzner und F. Delbaen (1995), Default risk insurance, S. 188-194; A. Jarrow und S. Turnbull (1995), Pricing credit risky derivatives, S. 55-82.

möglich sein. Für die praktische Umsetzung sollte das Modell sowohl für den Zweck der Kreditrisikomessung als auch für den Zweck der Bewertung mit einer überschaubaren Menge an Datenmaterial adäquat zu kalibrieren sein.

In einem ersten Schritt der Modellentwicklung wurden explizit vorzeitige Kreditausfälle zugelassen und dementsprechend für beliebige Zeitabschnitte von null verschiedene Ausfallwahrscheinlichkeiten unterstellt. Im Unternehmenswertansatz lassen sich zur Begründung vorzeitiger Kreditausfälle unterschiedliche Restlaufzeiten der Fremdkapitalkontrakte eines Unternehmens mit drohenden Cross-Defaults heranziehen. Zudem können Liquiditätsrisiken zu Schwierigkeiten bei der Bedienung regelmäßiger Zinszahlungen führen, was auch bei endfälligen Krediten eine vorzeitige Insolvenz des Schuldners mit resultierenden Kreditausfällen zur Folge haben kann. Modelltheoretisch erfolgte die Zuordnung von Ausfallwahrscheinlichkeiten zu einzelnen Zeitabschnitten mit Hilfe von Hazard Rate-Funktionen (Credit Curves). Theoretisch lässt sich jedem einzelnen Kredit eine spezifische Credit Curve zuordnen. Mit Blick auf die praktische Umsetzung des Modells und der weiten Verbreitung von externen und internen Ratingsystemen zur ordinalskalierten Kreditrisikomessung auf Einzelkreditbasis, erschien die Kalibrierung einiger weniger ratingabhängiger Credit Curves sinnvoll. Dazu wurden zunächst von den Ratingagenturen STANDARD & POORS'S und MOODY'S veröffentlichte historische kumulative Ausfallraten für Zeithorizonte zwischen einem Jahr und 15 Jahren herangezogen. Als Ergebnis erhält man zeitabschnittskonstante Credit Curves mit Sprungstellen an den Zeitabschnittsgrenzen. Die Länge der Zeitabschnitte hängt vom verfügbaren Datenmaterial ab und betrug hier ein Jahr.

Als Alternative wurden Ratingmigrationsmatrizen zur Konstruktion der Credit Curves verwendet. Die Ratingagenturen veröffentlichen regelmäßig historische durchschnittliche 1-Jahres-Ratingmigrationsraten. Unter der Annahme der MARKOV-Eigenschaft für Ratingmigrationen lässt sich mit der Logarithmusfunktion für Matrizen die 1-Jahres-Ratingmigrationsmatrix in eine Generator-Matrix überführen und anschließend mit der Exponentialfunktion für Matrizen auf jeden beliebigen Zeitraum skalieren. Liegen Ratingmigrationsmatrizen für mehrere Zeiträume vor, wurde zur vollständigen Ausnutzung des zur Verfügung stehenden Datenmaterials vorgeschlagen, auf der Basis von Forward-Ratingmigrationsmatrizen zeitabschnittsweise verschiedene Generatoren zu ermitteln. Zudem bieten zeitabschnittsabhängige Generatoren eine Möglichkeit, konjunkturelle Schwankungen zu berücksichtigen. Die zugehörigen Credit Curves sind abschnittsweise nicht konstant. Bei zeitabschnittsabhängigen Generatoren liegen erneut Sprungstellen zu

den Zeitabschnittswechseln vor. Erwartungsgemäß ist jedoch die Lage der Graphen sehr ähnlich. Für kurze Analysezeiträume sind die entsprechenden Ereignis- und Verlustverteilungen daher nahezu deckungsgleich. Bei längeren Analysezeiträumen sind dagegen Unterschiede, wenn auch nicht von gravierenden Ausmaßen, beobachtbar.

Im Mittelpunkt der Überlegungen zur Konstruktion eines semi-analytisch rechenbaren Modells stand die Zeittransformation von BROWNSchen Bewegungen. Es wurde demonstriert, dass auf Einzelkreditbasis ein Modellrahmen mit zeitvariablen, Credit Curve-konsistenten Ausfall- und Reorganisationsschranken und BROWNSchen Bewegungen zur Modellierung der Unternehmenswertprozesse in einen Modellrahmen mit zeitkonstanten Ausfall- und Reorganisationsschranken und Credit Curve-konsistent zeittransformierten BROWNSchen Bewegungen überführt werden kann. Der Lage der Ausfallschranken kommt – anders als bei zeitvariablen Ausfallschranken – bei der Einzelkreditbetrachtung kaum eine Bedeutung zu. Theoretisch könnten sie krediteinheitlich mit einem bequemen Wert versehen werden. Bereits OVERBECK & SCHMIDT haben jedoch mit Blick auf die einfachere Interpretation des Transformationskonzepts vorgeschlagen, die Ausfallschranken kredit- bzw. ratingspezifisch so zu platzieren, dass die Bilder der Prozesstransformationen stets mit Zeitpunkten verbunden werden, die nicht jenseits des Risikohorizonts liegen.<sup>1030</sup> Dadurch werden, bildlich gesprochen, die BROWNSchen Bewegungen in einigen Zeitabschnitten des Analysezeitraums „gebremst“ und in anderen Zeitabschnitten „beschleunigt“. Ausführlich wurde die Abhängigkeitsstruktur zwischen den transformierten BROWNSchen Bewegungen diskutiert. Die Basis bildete dabei ein einfaches Ein-Faktor-Modell. Es wurde deutlich, dass sich die Korrelationen zwischen den BROWNSchen Bewegungen bei Krediten mit einheitlicher Bonität und folglich identischen Zeittransformationen auf die zeittransformierten Prozesse überträgt. Bei Krediten unterschiedlicher Bonität hingegen beeinflussen die Zeittransformationen die Korrelationen zwischen den zeittransformierten Prozessen bzgl. eines spezifischen Zeitpunktes auf der originalen Zeitachse. Insofern ist die Wahl der Ausfallschranke – zumindest aus portfoliotheoretischer Sicht – nicht gänzlich ohne Bedeutung. Alternativ wurde skizzenhaft ein Modellansatz mit konstanten Korrelationen angedacht, die unabhängig von den kreditweisen Zeittransformationen sind.

Durch die Modellierung zeitkonstanter Ausfallschranken ist es möglich, (bedingte) Ausfallwahrscheinlichkeiten in analytischer Form durch Passage-Wahrscheinlichkeiten von (bedingten) BROWNSchen Bewegungen anzugeben. Endpunktbedingte BROWNSche Bewe-

---

<sup>1030</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 14.

gungen werden als BROWNSche Brücken bezeichnet. Die Passage-Wahrscheinlichkeit einer BROWNSchen Brücke ist analytisch ermittelbar. Setzt man den Ability-to-Pay-Prozess mit der BROWNSchen Brücke gleich, erhält man eine erste bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit in analytischer Form. Es wurde vorgeschlagen, die Formel zu modifizieren und den Brückenendpunkt durch das Faktormodell zu substituieren. Betrachtet man den Endpunkt des Faktorprozesses als gegeben, wird implizit der Faktor – nicht mehr der Ability-to-Pay-Prozess selbst – durch eine BROWNSche Brücke modelliert. Es wurde gezeigt, dass man für einen Kredit  $i$  mit der Restlaufzeit  $T_i$ , der zeitkonstanten Ausfallschranke  $K_i$ , der Zeittransformation  $g_i(t)$  und der Faktorsensitivität  $\rho_i$  in Abhängigkeit des (standardisierten) Faktorprozessendpunktes  $\psi$  für den Analysezeitpunkt  $t_A$  die (faktorpfadendpunkt)bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit

$$p_i(t_A)|\Psi = F_{SN} \left( \frac{K_i - \psi_{t_A} \sqrt{g_i(t_A)} \cdot \rho_i}{\sqrt{g_i(t_A)} \cdot (1 - \rho_i)} \right) + \exp \left( -2 \frac{1}{g_i(t_A)} K \sqrt{\rho_i} \left( K_i \sqrt{\rho_i} - \Psi_{t_A} \sqrt{g_i(t_A)} \right) \right) \cdot F_{SN} \left( \frac{K_i - \sqrt{\rho_i} \left( 2K_i \sqrt{\rho_i} - \Psi_{t_A} \sqrt{g_i(t_A)} \right)}{\sqrt{g_i(t_A)} \cdot (1 - \rho_i)} \right) \quad (3.82)$$

mit :

$$t_A \in (0, T_i]$$

erhält. Die Struktur von (3.82) wurde anhand von Spezialfällen näher untersucht und diskutiert. Als hilfreich haben sich dabei Grenzwertbetrachtungen erwiesen. Für Kredite, deren Laufzeit vor dem Analysezeitpunkt  $t_A$  endet, wurde eine entsprechende (faktorpfadendpunkt)bedingte Ausfalldichte hergeleitet, auf deren Basis die bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten dieser kurzlaufenden Kredite numerisch ermittelt werden:

$$f_{i, \tau_{FP}|\psi}(t) = f_{W_i|\psi}(g_{i,t}) \cdot \frac{dg_{i,t}}{dt} \quad \text{mit } t \in (0, T_i), \quad (3.114)$$

wobei :

$$f_{W_i|\psi}(s) = \frac{-K_i \sqrt{g_{i,t_A}}}{\sqrt{2\pi s^3 (g_{i,t_A} - s \rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i W_{t_A}^2 - \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i} g_{i,t_A} \psi_{t_A})^2}{(g_{i,t_A} - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s \sqrt{\rho_i (1 - \rho_i)} \psi_{t_A} - K_i \sqrt{g_{i,t_A} (1 - \rho_i)})^2}{(g_{i,t_A} - s)(g_{i,t_A} - s \rho_i)} \right)}$$

Ausführlich wurden mit Blick auf die weitere Modellentwicklung Fragen der Abhängigkeit und Unabhängigkeit (faktorpfadendpunkt)bedingter Ausfallereignisse diskutiert. Festzuhalten ist, dass (faktorpfadendpunkt)bedingte Ausfallereignisse nicht unabhängig voneinander auftreten. Jedoch konnten sie unter Berücksichtigung ihrer Zeitstruktur approximativ im Rahmen der Modellentwicklung als unabhängig behandelt werden. Für Kredite mit verschiedenen Zeittransformationen wurde eine Skalierung der Faktorpfadendpunkte nach der Maßgabe der jeweiligen Zeittransformation mit dem Ziel vorgeschlagen, eine objektive Vergleichbarkeit der bedingten Ausfallwahrscheinlichkeiten herzustellen.

Zur Modellierung der Ereignis- und Verlustverteilungen von Referenzportfolios wurden wahrscheinlichkeitserzeugende und charakteristische Funktionen verwendet. Da Ereignisverteilungen grundsätzlich diskrete Verteilungen mit ganzzahligen nicht-negativen Ausprägungen darstellen, ist es nahe liegend, zu ihrer Ermittlung zunächst auf die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen zurückzugreifen. Zur Berechnung der Koeffizienten wurde das Verfahren des Sequential Probability Shiftings (SPS) vorgestellt und in seiner Funktionsweise detailliert analysiert. Das Sequential Probability Shifting ist ein leicht verständliches Verfahren, das einfach zu implementieren ist. Veränderungen einer Ereignisverteilung durch das Hinzufügen oder Entfernen einzelner Kredite können mit diesem Verfahren gezielt einer Analyse unterzogen werden. Nachteilig ist, dass stets die gesamte Verteilung ermittelt werden muss. Einzelne Verteilungsausschnitte können separat und folglich rechenaufwandmindernd nicht gewonnen werden. Erreicht werden kann das jedoch mit einer Approximation der diskreten Wahrscheinlichkeitsfunktion der gemeinsamen Kreditereignisse durch eine stetige Dichtefunktion. Die Idee besteht darin, die charakteristische Funktion der diskreten Ereignisverteilung einer Inversen FOURIER-Transformation (IFT) zu unterziehen. Wäre die charakteristische Funktion diejenige einer stetigen Zufallsvariablen, erhielte man - die Existenz vorausgesetzt - die zugehörige Dichtefunktion. Es wurde demonstriert, wie mit Hilfe eines Gleichungssystems eine approximative Anpassung einer stetigen Dichtefunktion so gelingt, dass die charakteristische Funktion der Ereignisverteilung und die zur stetigen Dichtefunktion gehörende charakteristische Funktion hinreichend ähnlich sind. Die Approximationsgüte wurde diskutiert und durch Variationen des Gleichungssystems gezielt gesteuert. Das vorgestellte Verfahren eignet sich auch zur Ermittlung der Verlustverteilung eines Referenzportfolios, wobei die Recovery Rates sowohl fix als auch stochastisch gestaltet sein können. Für stochastische Recovery Rates sind die Verlustverteilungen stetig, womit das Sequential Probability Shifting ohnehin ausscheidet. Es wurde jedoch beispielhaft aufgezeigt, dass, anders als bei Kreditportfolios mit wenigen Kre-

ditionen, stochastische Recovery Rates bei großen Kreditportfolios kaum einen Einfluss auf die Verlustverteilung haben, sofern sie nicht in Abhängigkeit zu anderen Kreditrisikofaktoren stehen. Insofern kann vereinfachend mit fixen Recovery Rates gearbeitet und das einfachere Verfahren des Sequential Probability Shiftings verwendet werden.

Die mit Hilfe des unternehmenswertorientierten semi-analytisch rechenbaren Modells ermittelten Ereignis- und Verlustverteilungen sind jenen Ereignis- und Verlustverteilungen sehr ähnlich, die auf dem einfachen Unternehmenswertansatz basieren. Im Vergleich mit dem Modell nach VASICEK, das den theoretischen Hintergrund zur NEUEN BASLER EIGENKAPITALVERORDNUNG (Basel II) bildet, sind sowohl die für Kreditportfolios typische Schiefe als auch die Gestalt der Ereignis- und Verlustverteilungen weitgehend deckungsgleich. Voraussetzung ist jedoch, dass zuvor ein Mapping der durch das hier vorgestellte semi-analytisch rechenbare Modell erfassbaren Vielzahl an Parametern eines heterogenen Kreditportfolios auf die wenigen Parameter des Modells nach VASICEK stattgefunden hat. Deutlich wurde dabei, dass die Homogenisierung heterogener Kreditportfolios bei einer praktischen Umsetzung zu Schwierigkeiten hinsichtlich der Wahl einer mit Blick auf die durchschnittliche Kreditqualität des Referenzportfolios repräsentativen Credit Curve im Rahmen einer ratingbasierten Modellkalibrierung führt. Zwar lässt sich mit den Ratingfaktoren nach MOODY'S und FITCH ein exposuregewichteter Mittelwert errechnen, der die durchschnittliche Kreditqualität nach Aussagen der Ratingagenturen hinreichend genau widerspiegelt. Dennoch bleibt das Problem der Zuordnung einer Credit Curve. Mit dem vorgestellten Modell kann eine willkürliche, ökonomisch schwer zu rechtfertigende Homogenisierung des Referenzportfolios unterbleiben. Heterogene Nominalwerte werden ebenso erfasst, wie heterogene Restlaufzeiten und Bonitäten.

Zur Untersuchung der Auswirkungen regelmäßiger Kredittilgungen und Portfolioreplenishments auf die Gestalt der Ereignis- und Verlustverteilungen wurde eine simulative Umsetzung des vorgestellten Modellrahmens verwendet, da Kredittilgungen und Portfolioreplenishments nicht durch die Semi-Analytik erfasst werden. Portfolioreplenishments führen zum Ersatz (teil)amortisierter Kredite. Grundsätzlich erstrecken sich Portfolioreplenishments nicht auf ausgefallene Kredite. Einschränkend ist zu sagen, dass regelmäßig die Wiedergewinnung von Teilen ausgefallener Kredite gleichwohl zu Replenishmentmaßnahmen führen kann. Da der wiedergewonnene Teil eines ausgefallenen Kredits durch neue Kredite ersetzt wird, steigt mit wachsenden Recovery Rates die Anzahl der neu in das Referenzportfolio aufgenommenen Titel und in Folge dessen die erwartete Ausfallzahl.

Damit werden wachsende Recovery Rates durch die zusätzlich aufgenommenen Kreditrisiken zum Teil konterkariert. Zwar sinken die erwarteten Verluste, allerdings unterproportional. Bei regelmäßigen Kredittilgungen fällt der gegenläufige Effekt schwächer aus, da die Recovery Rates sich lediglich auf die noch nicht amortisierten Teile der ausgefallenen Kredite beziehen.

Wesentliches Anliegen im Rahmen der Analysen der Ereignis- und Verlustverteilungen war die Gewinnung von Erkenntnissen über die Wirkung des Instruments des Replenishment-Triggers. Der Trigger bewirkt, dass die Replenishmentmaßnahmen beim Erreichen einer spezifischen Verlustgrenze sofort eingestellt werden. Dadurch sollen Investoren vor der Aufnahme neuer Kreditrisiken in das Portfolio geschützt werden. Tendenziell führt die Einführung eines Replenishment-Triggers *ceteris paribus* zu niedrigeren Kreditausfallzahlen und Kreditverlusten. Auffallend ist die regelmäßig niedrige Höhe des Triggers im Vergleich zum Nominalvolumen des Referenzportfolios. Ein (theoretischer) Trigger i. H. v. null würde Replenishmentmaßnahmen vollständig unterbinden. Die resultierende Ereignis- bzw. Verlustverteilung wäre identisch mit der entsprechenden Verteilung ohne Replenishmentmaßnahmen. Ein wachsender Trigger würde die jeweilige Verteilung so verändern, dass diese schließlich mit der entsprechenden Verteilung mit Replenishmentmaßnahmen aber ohne Trigger zusammenfielen. Die Wirkung des Triggers verschwände. Damit eignen sich Replenishment-Trigger zur risikotechnischen Feinsteuerung von CDO-Strukturen.

Mit Blick auf die primär interessierenden Verlustverteilungen wirken sich Änderungen in der Höhe des Triggers jedoch keineswegs linear auf Kreditrisikokennzahlen wie den erwarteten Verlust aus. Fraglich war, bis zu welcher Höhe ein Trigger einen nennenswerten Einfluss auf Verlustverteilungen ausübt. Tendenziell sind Replenishment-Trigger im Vergleich zur Höhe des Nominalvolumens des Referenzportfolios klein zu wählen, damit sie eine effektive Wirkung in der Begrenzung potentieller Verluste entfalten können. Im untersuchten Beispiel betrug die replenishmenthindernde kritische Verlusthöhe 12 Mio. EUR bei einem Portfolionominalvolumen von 1 Mrd. EUR. Es wurde darüber hinaus demonstriert, dass die Wirkung des Triggers mit zunehmender (durchschnittlicher) Recovery Rate abnimmt. Je höher die Recovery Rates ausfallen, desto unwahrscheinlicher ist es, dass die Portfolioverluste eine gegebene Grenze überschreiten. Erst ein hinreichend kleiner Trigger führt zu einer spürbaren Beeinflussung der Verlustverteilung. Die erwarteten Portfolioverluste fallen merklich. Dabei ist der „kritische Trigger“, d. h. derjenige Trigger, der gerade noch einen spürbaren Einfluss auf die Verlustverteilung ausübt, umso niedriger, je höher

die Recovery Rate ist. Der Trigger kann demzufolge so gewählt werden, dass dieser unter dem angenommenen Recovery-Szenario kaum einen Einfluss auf die Verlustverteilung ausübt, aber bei einer durchschnittlichen Verschlechterung der Recovery Rates stark ansteigende Verluste weitgehend verhindert. Eine ähnliche Wirkung entfaltet ein Trigger bei Veränderungen der gesamtwirtschaftlichen Lage. Die durch Replenishment-Trigger eingeführte kritische Verlustgrenze wird im Falle einer gesamtwirtschaftlich bedingten, allgemeinen Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeiten, zeitlich betrachtet, tendenziell früher erreicht. Die Replenishmentmaßnahmen wären damit einzustellen, wodurch die Aufnahme neuer Kreditrisiken in das Referenzportfolio unterbunden wird.

Auf der Basis semi-analytisch ermittelter Verlustverteilungen wurden ausführlich typische Merkmale von Verlustverteilungen einzelner CDO-Tranchen analysiert. Als Beispiel diente dabei die PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion der KfW. Zugrunde gelegt wurden die Tranchengrenzen gemäß dem INFORMATION MEMORANDUM der DRESDNER BANK. Zunächst wurden für unterschiedliche Zeiträume und Recovery-Szenarien die Kennzahlen PD (Probability of Default), EL (Expected Loss) und LGD (Loss Given Default) ermittelt. Erwartungsgemäß ist das FLP (First Loss Piece) mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit von Verlusten betroffen. Die totale Ausfallwahrscheinlichkeit des FLPs beträgt jedoch nur wenige Prozentpunkte, wodurch alle vorrangigen Tranchen über einen beachtlichen Risikopuffer verfügen. Die Verlustverteilung des FLPs ist durch eine erhebliche Wahrscheinlichkeitsmasse auf der oberen Tranchenschwelle gekennzeichnet, wodurch der EL und der LGD dieser sehr nahe kommen. Da die Ausfallwahrscheinlichkeit des FLPs fast 100 % beträgt, fallen EL und LGD zusammen.

Ein anderes Bild ergibt sich für die vorrangigen Tranchen. Hier konzentrieren sich sowohl auf der unteren als auch auf der oberen Tranchenschwelle Wahrscheinlichkeitsmassen. Je größer das Credit Enhancement Level ausfällt, umso größer ist ceteris paribus die Konzentration an Wahrscheinlichkeitsmasse auf der unteren Tranchenschwelle, respektive auf dem Tranchenverlust i. H. v. null. Gleichzeitig fällt die Konzentration an Wahrscheinlichkeitsmasse auf der oberen Tranchenschwelle, respektive auf dem Tranchenverlust i. H. v. 100 %. Das führt zunächst dazu, dass der EL und der LGD auseinander fallen. Dabei gilt, dass der EL stets unterhalb des LGD liegt. Wird ceteris paribus die Tranchenstärke erhöht, fallen sowohl der EL als auch der LGD, wobei die Messung in Prozentpunkten erfolgt. Ursache ist die abnehmende Wahrscheinlichkeitskonzentration auf der oberen Tranchenschwelle. Wird umgekehrt die Tranchenstärke ceteris paribus vermindert, sinken der EL

und der LGD. Der EL konvergiert gegen die Ausfallwahrscheinlichkeit der Tranche, während der LGD gegen 100 % konvergiert. Wäre im Extremfall eine Tranche lediglich eine einzige Währungseinheit breit, würde ein Ausfallereignis sofort zum Totalverlust führen. Aus der Sicht eines Investors hängt folglich das Risiko der Investition in eine Tranche nicht nur vom Subordination Level respektive dem Credit Enhancement Level und somit der Ausfallwahrscheinlichkeit ab, sondern im wesentlichen Maße von der Tranchenstärke. Daher haben auch die Aufsichtsbehörden im Rahmen der NEUEN BASLER EIGENKAPITALVERORDNUNG (Basel II) die Unterlegung von kreditrisikobehafteten ABS-Investitionen mit der sog. Supervisory Formula in Abhängigkeit der Tranchenstärke gestaltet.

Ausführlich wurde die Gestalt von Tranchenrecoveryverteilungen im Vergleich zu Recoveryverteilungen von Bonds studiert. Relevant sind derartige Vergleiche immer dann, wenn die erwartete Performance eines CDO-Investments und die eines Investments in einen Bond mit identischer Ausfallwahrscheinlichkeit gegeneinander abgewogen werden sollen. Insbesondere die Recoveryverteilungen der im Rahmen von CDO-Transaktionen an den Kapitalmärkten regelmäßig platzierten Mezzanine-Tranchen weisen einen leicht progressiv steigenden Verlauf mit einer Wahrscheinlichkeitskonzentration an der Stelle von 0 % auf. Ursache ist der leicht degressiv fallende Verlauf der Verlustverteilung des Referenzportfolios im Bereich der jeweiligen Tranchenschwellen. Im Vergleich zu den Recoveryverteilungen von Bonds wird damit wesentlich mehr Wahrscheinlichkeitsmasse den extremen Werten zugeordnet. Bei Bonds hingegen ist es wahrscheinlicher, dass zumindest ein Teil der ausgefallenen Schuld wiedergewonnen werden kann. Die Wahrscheinlichkeitsmasse konzentriert sich stärker auf den mittleren Teil des Definitionsbereichs. Ausführlich wurden der Einfluss des Credit Enhancement Levels und der Tranchenstärke auf die Gestalt der Recoveryverteilungen untersucht. Der Einfluss des Credit Enhancement Levels ist aufgrund der Tatsache, dass Recoveryverteilungen bedingte Verteilungen darstellen nicht eindeutig. Mit Blick auf die Tranchenstärke hingegen lässt sich festhalten, dass eine Zunahme der Tranchenstärke die Konzentration von Wahrscheinlichkeitsmassen an der Stelle von 0 % verringert. Gleichzeitig verschiebt sich die verstetigte Wahrscheinlichkeitsfunktion (Dichtefunktion) nach oben und beginnt sich erst wenig, zunehmend jedoch stärker, entgegen dem Urzeigersinn zu drehen. Als Ursache für die Drehung wurde die Art und Weise der Verteilung der Punktmasse auf den übrigen Wertebereich identifiziert. Der Erwartungswert der Recoveryverteilung steigt. Diametral dazu sinkt der LGD in %.

Quantitativ wurde das Instrument der begrenzten Zinsunterbeteiligung (Interest Sub-Participation, ISP) am Beispiel der PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion der KfW untersucht. Dazu wurde auf die Monte-Carlo-Simulation zurückgegriffen. Zum einen konnten so die Kredittilgungen, die Replenishmentmaßnahmen und der Replenishment-Trigger berücksichtigt werden. Zum anderen war für die quantitative Untersuchung die Kenntnis der genauen Zeitpunkte der einzelnen Kreditausfälle notwendig. Zinsunterbeteiligungen sichern den Investoren eine Beteiligung an den Zinseinnahmen aus dem Referenzportfolio im Falle schlagend werdender Kreditrisiken ihrer Tranchen (insbesondere des FLPs) zu. Die Beschränkung auf zukünftige, d. h. nach dem Zeitpunkt des Kreditausfalls anfallende Zinseinnahmen ist wesensbestimmendes Merkmal einer begrenzten Zinsunterbeteiligung. Modelltheoretisch betrachtet, wird – Timing-Effekte außer Acht gelassen – die Verlustverteilung des FLPs durch die Verteilung der verbleibenden, nicht bedienten Ansprüche aus der ISP ersetzt. Die Analysen ergaben, dass nahezu alle realisierten Verluste auf der Seite des FLP-Investors durch Kompensationszahlungen aus der ISP abgedeckt werden. Aus der Sicht des Originators wird deutlich, dass das Ausfallrisiko des FLPs trotz der Platzierung am Finanzmarkt letztlich doch bei ihm verbleibt. Es ist lediglich in ein Liquiditätsrisiko umgewandelt worden. Würde ein FLP mit begrenzter Zinsunterbeteiligung geratet werden, käme durchaus ein Investment-Grade Rating in Betracht.

Ausführlich wurden Fragen der kapitalmarktorientierten Bewertung synthetischer CDOs erörtert. Ausgangsbasis bildete die Konstruktion eines Wahrscheinlichkeitsraumes zur arbitragefreien Bewertung ausfallrisikofreier Zinstitel. Dabei war es das Anliegen, die wesentlichen Konzepte der kapitalmarktorientierten Bewertung aufzugreifen und in diese Arbeit einzuordnen. Es wurde vermieden, einen konkreten Zinssatzprozess und ein konkretes Zinsmodell zu unterstellen. Zur Verdeutlichung einzelner Argumentationen wurden jedoch regelmäßig BROWNSche Bewegungen und BROWNSche Filtrationen herangezogen.

Zur Ergänzung des Marktes für kreditrisikofreie Zahlungsansprüche um kreditrisikobehaftete Zahlungsansprüche bedurfte der kreditrisikofreie Wahrscheinlichkeitsraum einer Erweiterung. Die Erweiterung erfolgte durch die Konstruktion eines Produktraums und des zugehörigen Produktmaßes. Explizit wurde mit Hilfe des Partial Averaging Theorems und des Satzes nach FUBINI<sup>1031</sup> gezeigt, dass Martingale des ursprünglichen Wahrscheinlichkeitsraums durch die Wahrscheinlichkeitsraumerweiterung ihre wesensbestimmenden Eigenschaften nicht verlieren. Damit konnte zur Finanztitelbewertung in beiden Räumen

---

<sup>1031</sup> Vgl. G. Fubini (1958), *Sugli integrali multipli*, S. 243-249.

problemlos auf den Erwartungswert als Bewertungsinstrument abgestellt werden. Es wurde demonstriert, wie das Wahrscheinlichkeitsmaß des erweiterten Wahrscheinlichkeitsraumes durch das semi-analytische Modell konkretisiert werden kann. Zur Berücksichtigung des Faktoransatzes wurde der bereits erweiterte Wahrscheinlichkeitsraum erneut einer Erweiterung unterzogen und der Faktor als latenter Parameter behandelt. In Abgrenzung zu den Credit Curves der vorherigen Kapitel und Abschnitte konnten darauf aufbauend risikoneutrale (faktorbezogene) Hazard- und Hazard Rate-Funktionen definiert werden. Die Beziehungen der einzelnen Hazard- und Hazard Rate-Funktionen zueinander wurden erörtert.

Für die Bewertung ausfallrisikobehafteter Zahlungsansprüche (Kredite, Bonds) konnte, basierend auf den Wahrscheinlichkeitsraumkonstruktionen und den Hazard- und Hazard Rate-Funktionen, auf bereits bekannte Ergebnisse aus der Modellwelt der Hazard- und Hazard Rate-Modelle zurückgegriffen werden. Separat wurden potentielle Nominalwertzahlungen, potentielle Recovery-Zahlungen und potentielle Kuponzahlungen einer Bewertung unterzogen. In Anlehnung an die Arbeiten von BILECKI, JEANBLANC & RUTKOWSKI<sup>1032</sup> waren dazu geeignete Kupon- und Recovery-Prozesse zu definieren. Auf der Basis der Bewertungsmodelle für die einzelnen Komponenten ausfallrisikobehafteter Zahlungsansprüche kann eine kapitalmarktorientierte Modellkalibrierung erfolgen.

Die Verwendung von Bonds zur Modellkalibrierung hat den Nachteil, dass der beobachtbare Spread neben dem Kreditrisiko auch andere Risiken – insbesondere das Liquiditätsrisiko – vergütet. Den kreditrisikobasierten Spread zu separieren, um dann risikoneutrale Hazard- und Hazard Rate-Funktionen ableiten zu können, ist schwierig. Wird der liquiditätsorientierte Spread nicht separiert, kommt es insbesondere bei der Bewertung von Basket-Strukturen und CDOs zu erheblichen Fehlbewertungen. Ursache ist die multiplikative Wirkung des Liquidity Spreads im Rahmen der Bewertung der Multi-Credit Products. Je mehr Kredite das Referenzportfolio enthält, desto gravierender fällt die Fehlbewertung aus. Daher wird zur Modellkalibrierung oft – auch wegen der hohen Fungibilität – auf Credit Default Swaps (CDS) zurückgegriffen. Zur Kalibrierung risikoneutraler Hazard Rate-Funktionen wurde ein vollständig analytisch rechenbares Bootstrapping-Verfahren vorgeschlagen, das für eine beliebige Anzahl von CDS-Kontrakten mit ganz- und nicht-ganzzahligen Restlaufzeiten angewendet werden kann. Auf das Verfahren kann auch dann zurückgegriffen werden, wenn aufgelaufene Prämienanteile zu berücksichtigen sind.

---

<sup>1032</sup> Vgl. T. Bielecki, M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2004), Modeling and valuation of credit risk; M. Jeanblanc und M. Rutkowski (2000), Default risk: Mathematical tools; T. Bielecki und M. Rutkowski (2004), Credit risk.

Im Rahmen von synthetischen CDO-Transaktionen werden zumeist die Mezzanine-Tranchen des Referenzportfolios durch (refinanzierende) Portfolio Credit Linked Notes (CLN) verbrieft, während die Junior- und die Senior-Tranche durch Portfolio Credit Default Swaps gesichert sind. In der Literatur wird begrifflich von refinanzierten und nicht refinanzierten CDOs gesprochen. Letztere sind auch unter der Bezeichnung der Collateralized Synthetic Obligations (CSO) bekannt. Es wurde gezeigt, dass sowohl Plain Vanilla CLNs als auch Portfolio Credit Linked Notes mit variabler Zinszahlung, respektive refinanzierte CDOs, duplikationstheoretisch als strukturierte Produkte aufgefasst werden können, wobei zur Strukturierung Plain Vanilla CDS bzw. Portfolio Credit Default Swaps, respektive CSOs, verwendet werden können. Dadurch lassen sich Bewertungsfragen weitgehend durch die Betrachtung von CSOs klären. Die Duplikationsportfolios der (refinanzierten) CDOs sowie die Zahlungsmodalitäten der zur Duplikation herangezogenen CDS unterscheiden sich in Abhängigkeit davon, ob die CDOs vorschüssig oder nachschüssig zahlen. Während die Duplikation bei vorschüssiger Zahlungsweise perfekt ist, benötigt – wie ausführlich demonstriert wurde und häufig implizit in der Literatur unterstellt wird – die Duplikation bei nachschüssiger Zahlungsweise eine flache und konstante Zinsstruktur.

Ausführlich wurde die Herleitung der Bewertungsformeln für vorschüssig und nachschüssig zahlende refinanzierte und nicht-refinanzierte CDOs besprochen. Darauf aufbauend lassen sich faire Risikoprämien der CDOs berechnen. Für eine Tranche  $j$  mit den Tranchenschwellen  $v_j$  und  $v_{j+1}$ , mit den vertraglich vereinbarten vorschüssigen Zahlungszeitpunkten  $t_{j,n}$  mit  $n=1, \dots, m$ , wobei  $t_{j,1}=0$ ,  $t_{j,m+1}=T_{CDS,j}$  und  $\Delta t_{j,n} = t_{j,n+1} - t_{j,n}$ , geschrieben auf ein Referenzportfolio mit  $N$  Krediten, mit den kreditspezifisch risikoneutral kalibrierten Hazard- und Hazard Rate-Funktionen  $H_{i,t}$  bzw.  $h_{i,t}$ , den Nominalwerten  $D_i$  und den Recovery Rates  $\delta_i$  erhält man die faire Risikoprämie:

$$RP_{Tr,j,vorschüssig} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.126)$$

mit:

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n}}^{t_{j,n+1}} B(0, t_{j,n+1}) \cdot E_{Q^*} \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) + (1 - \delta_i) \cdot D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) \right) \right) \cdot h_{i,t} \cdot e^{-H_{i,t}} \cdot dt,$$

$$\beta = \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot ((v_{j+1} - v_j) - EL_{Tr,j}(t_{j,n})).$$

Dabei stellt  $L_i(t) = D_i(1 - \delta_i)I_i(t)$  den Verlust des Kredites  $i$  und  $L_{Tr,j}$  die Verlustfunktion der Tranche nach Maßgabe der Verluste des Referenzportfolios im Zeitpunkt  $t$  dar.  $Q^*$  ist das risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß des erweiterten Wahrscheinlichkeitsraumes.

Für nachschüssig zahlende CDOs mit Teilprämienzahlungen mit den vertraglich vereinbarten Zahlungszeitpunkten  $t_{j,n}$  mit  $n=1, \dots, m$ , wobei  $t_{j,1} > 0$  und  $t_{j,m} = T_{CDS,j}$ , erhält man:

$$RP_{Tr,j,nachschüssig} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \quad (5.127)$$

mit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^N \int_0^{T_{CDS,j}} B(0,t) \cdot E_{Q^*} \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) + (1 - \delta_i) \cdot D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) \right) \right) \cdot h_{i,t} \cdot e^{-H_{i,t}} \cdot dt, \\ \beta &= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (v_{j+1} - v_j) - EL_{Tr,j}(t_{j,n}) \right), \\ \gamma &= \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^m \int_{t_{j,n-1}}^{t_{j,n}} B(0, t_{j,n}) (t - t_{j,n-1}) E_{Q^*} \left( L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) + (1 - \delta_i) D_i \right) - L_{Tr,j} \left( \sum_{b=1, b \neq i}^N L_b(t) \right) \right) \cdot h_{i,t} e^{-H_{i,t}} dt. \end{aligned}$$

Für homogene Referenzportfolios wurden für (5.126) und (5.127) Spezialfälle hergeleitet. Insbesondere wurde gezeigt, dass die Bewertungsformeln der CDOs in Bewertungsformeln für Basket CDS, insbesondere  $k^{\text{th}}$ -to Default Swaps, überführt werden können. Dazu wurden die Tranchenschwellen  $v_j$  und  $v_{j+1}$  unter Berücksichtigung der Recovery Rate in die kritischen Kreditausfallzahlen  $k_j$  und  $k_{j+1}$  transformiert. Im Falle vorschüssig zahlender CDOs wurde eine Bewertungsformel hergeleitet, die frei von numerisch und zeitaufwendig zu lösenden Integralen ist. Zudem kann anstelle der Referenzportfolioverlustverteilung mit der einfacher zu handhabenden Referenzportfolioereignisverteilung gearbeitet werden:

$$RP_{Tr,j,vorschüssig,D,\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (5.144)$$

mit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{n=1}^m \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} B(0, t_{j,n+1}) \left( Q''(N_{RP,t_{j,n}} < k) - Q''(N_{RP,t_{j,n+1}} < k) \right), \\ \beta &= \sum_{n=1}^m B(0, t_{j,n}) \cdot \Delta t_{j,n} \cdot \left( (k_{j+1} - k_j) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} \leq k_j) + \sum_{k=k_j+1}^{k_{j+1}} (k_{j+1} - k) \cdot Q''(N_{RP,t_{j,n}} = k) \right). \end{aligned}$$

Vorrangig – aber nicht ausschließlich – wurde, basierend auf dieser vereinfachten Gleichung, die kreditrisikoadäquate Cash Flow-Struktur einer synthetischen CDO-Transaktion, angefangen beim Originator, der das Kreditrisiko des Referenzportfolios ggf. bereits selbst in tranchierter Form mit Hilfe von Kreditderivaten an Dritte – insbesondere das Special Purpose Vehicle – überträgt, bis hin zu den CDO-Investoren, die für das übernommene Kreditrisiko (adäquate) Risikoprämien erhalten, in zeitlicher und betragsmäßiger Dimension dargestellt und diskutiert. Im Mittelpunkt der Diskussion stand die Aufrechterhaltung der Zahlungsfähigkeit der beteiligten Parteien, wobei der Schwerpunkt der Betrachtungen

auf dem Special Purpose Vehicle lag. Neben der Höhe der Risikoprämien für die einzelnen Tranchen in Abhängigkeit vom jeweiligen Credit Enhancement Level und von der entsprechenden Tranchenstärke, gemessen in Prozentpunkten, wurden die Risikoprämieinzahlungen und -auszahlungen auf der Ebene des Special Purpose Vehicles, gemessen in Währungsbeträgen, analysiert. Zu Beginn der Transaktion fallen die Risikoprämieinzahlungen deutlich geringer aus als die Risikoprämienauszahlungen. Ohne eine hinreichend hohe Cash Reserve, finanziert mit haftendem Eigenkapital, wäre das SPV ohne weitere Maßnahmen sofort zahlungsunfähig. Als Ursache wurde der erwartete Verlauf der Risikoprämieein- und -auszahlungen nach Maßgabe der Tranchenverluste identifiziert. Insgesamt sinken sowohl die Risikoprämieein- als auch die -auszahlungen in der Erwartung, jedoch mit Blick auf die Entwicklung der Bezugsgröße für die prozentual angegebene, konstant bleibende Risikoprämie unterschiedlich stark. Wie demonstriert wurde, ist über den Transaktionszeitraum hinweg betrachtet, abgesehen von Zinseffekten, die Summe der erwarteten Risikoprämieinzahlungen identisch mit der Summe der erwarteten Risikoprämienauszahlungen. Eine mit haftendem Eigenkapital finanzierte hinreichend hohe Cash Reserve wird in den frühen Perioden der Transaktion kontinuierlich abnehmen und erst in späteren Perioden wieder zunehmen. Alternative Finanzierungsmöglichkeiten der Risikoprämienzahlungsdifferenzen wurden angedacht, letztlich aber verworfen. In der Praxis kommen SPVs synthetischer Transaktionen jedoch fast vollständig ohne Eigenkapital aus. Die Lösung dieses Widerspruchs liegt in der Änderung des Transaktionswaterfalls, wodurch die Problematik der Risikoprämienzahlungsdifferenzen auf Dritte verschoben wird. Verdeutlicht wurde das anhand der bereits zuvor verwendeten PROMISE-K 2001-1 PLC-Transaktion der KfW.

Viele der vorgestellten Verfahren und Methoden sind auf alternative Modellsettings einerseits und klassische CDO-Transaktionen andererseits übertragbar. Im Rahmen von Verbriefungsprozessen können sie daher auch über synthetische CDO-Transaktionen hinaus für Originatoren und Ratingagenturen beim Transaktionsstructuring bzw. bei der Vergabe von Ratings für die CDO-Emissionen dienlich und hilfreich sein. Verfahren, die heterogene Referenzportfolios mit Hilfe der Durchschnittsbildung homogenisieren, sollten durch Modellkonzeptionen, welche die Heterogenität hinreichend genau erfassen, ersetzt werden. Transaktionsspezifika wie Portfolioreplenishments und (Replenishment-)Trigger sind in die Analysen mit einzubeziehen und sollten – mit Blick auf die Wahl der Höhe der jeweiligen Trigger – mit Bedacht eingesetzt und in ihrer Ausgestaltung zielgerecht formuliert

werden. Die durchgeführten quantitativen Analysen lassen sich in der Phase des Transaktionsstructurings hierzu als Hilfestellung heranziehen.

Investoren und externe Analysten können sich der vorgestellten Verfahren und Methodiken bedienen, um sich unabhängig von den Beurteilungen der Ratingagenturen ein Bild über den Risikogehalt potentieller CDO-Investments zu verschaffen und zu einer eigenständigen Einschätzung über die Höhe adäquater Risikoprämien zu gelangen. Ein wachsendes Verständnis aller Transaktionsbeteiligter über die Funktionsweise, den Risikogehalt und die Cash-Flow-Struktur in betragsmäßiger und zeitlicher Dimension von (synthetischen) CDO-Transaktionen trägt wesentlich zu einem funktionsfähigen CDO-Markt mit fair abgeschlossenen CDO-Kontrakten bei.

## Anlagenverzeichnis

Anlage 1: Herleitung der BROWNSchen Prozesse von Eigen- und Fremdkapital mit Hilfe von ITÔ's Lemma .....	366
Anlage 2: Lösung einer linearen stochastischen Differentialgleichung mittels ITÔ's Lemma .....	367
Anlage 3: Unternehmenswertkorrelation .....	370
Anlage 4: Lower-Partial Moments der Ordnungen null und eins im einfachen Unternehmenswertansatz für $t_H=T$ .....	371
Anlage 5: Ausfallwahrscheinlichkeiten mit Hazard Rate-Funktionen.....	373
Anlage 6: Faktorendpunktbedingte Erwartungswerte mit BROWNSchen Faktorbrücken .....	374
Anlage 7: Faktorendpunktbedingte Varianzen mit BROWNSchen Faktorbrücken.....	375
Anlage 8: Grenzwertbetrachtung der bedingten Ausfalldichte für $s=0$ .....	376
Anlage 9: Grenzwertbetrachtung der bedingten Ausfalldichte für $s=t_H$ .....	378
Anlage 10: Bedingte Ausfalldichte für den Spezialfall $\rho_i = 1$ .....	380
Anlage 11: Bedingte Ausfalldichte für den Spezialfall $\rho_i = 0$ .....	381
Anlage 12: Erwartungswert des Produkts zweier Punkte einer BROWNSchen Brücke.....	382
Anlage 13: Kreditrisikomodell nach HULL & WHITE .....	385
Anlage 14: Beispiel eines Produktraumes anhand eines diskretisierten Zins- und Ausfallindikatorprozesses .....	388
Anlage 15: Bootstrapping von Hazard Rate-Funktionen unter Berücksichtigung aufgelaufener Risikoprämienanteile .....	392
Anlage 16: Historische durchschnittliche kumulative Ausfallhäufigkeiten.....	394
Anlage 17: Adjustierte Generatoren basierend auf 1-jährigen Forward-Übergangsmatrizen .....	395
Anlage 18: Basket Credit Default Swap Spreads im Modellvergleich .....	396
Anlage 19: Erwartete Tranchenverluste und erwartete Risikoprämienzahlungen bei einer flachen Zinsstruktur von null .....	398
Anlage 20: Die Kontingenztafel als LP-Problem.....	400
Anlage 21: PROMISE-K 2001-1 PLC Information Memorandum (Auszüge).....	401

**Anlage 1: Herleitung der BROWNSchen Prozesse von Eigen- und Fremdkapital mit Hilfe von ITÔ's Lemma**

Das Eigenkapital eines Unternehmens  $i$  sei als Funktion in Abhängigkeit vom Unternehmenswert  $A_{i,t}$  und der Zeit  $t$  darstellbar:

$$E_{i,t} = E_i(A_i(t), t). \quad (2.14)$$

Eigenkapital und Unternehmenswert folgen jeweils einem stochastischen Prozess mit den folgenden stochastischen Differentialgleichungen:

$$dA_{i,t} = \mu_{A,i} \cdot A_{i,t} \cdot dt + \sigma_{A,i} \cdot A_{i,t} \cdot dW_{i,t}, \quad (2.10)$$

$$dE_{i,t} = \mu_{E,i} \cdot A_{i,t} \cdot dt + \sigma_{E,i} \cdot A_{i,t} \cdot dB_{i,t}. \quad (A1.1)$$

Dann folgt aus ITÔ's Lemma:<sup>1033</sup>

$$dE_{i,t} = \frac{\partial E_{i,t}}{\partial A_{i,t}} \cdot dA_{i,t} + \frac{\partial E_{i,t}}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 E_{i,t}}{\partial A_{i,t}^2} \cdot \sigma_{A,i}^2 \cdot A_{i,t}^2 \cdot dt. \quad (A1.2)$$

Durch Einsetzen von (2.10) in (A1.2) und Umstellen folgt:

$$dE_{i,t} = \frac{\partial E_{i,t}}{\partial A_{i,t}} \cdot [\mu_{A,i} A_{i,t} \cdot dt + \sigma_{A,i} A_{i,t} \cdot dW_{i,t}] + \frac{\partial E_{i,t}}{\partial t} \cdot dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_{i,t}}{\partial A_{i,t}^2} \sigma_{A,i}^2 A_{i,t}^2 \cdot dt \quad (A1.3)$$

$$= \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E_{i,t}}{\partial A_{i,t}^2} \sigma_{A,i}^2 A_{i,t}^2 + \frac{\partial E_{i,t}}{\partial A_{i,t}} \mu_{A,i} A_{i,t} + \frac{\partial E_{i,t}}{\partial t} \right]}_{\mu_{E,i,t} \cdot E_{i,t}} \cdot dt + \underbrace{\sigma_{A,i} A_{i,t} \frac{\partial E_{i,t}}{\partial A_{i,t}}}_{\sigma_{E,i,t} \cdot E_{i,t}} \cdot dW_{i,t}. \quad (2.16)$$

Für das Fremdkapital ergibt sich analog:

$$dD_{i,t} = \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{i,t}}{\partial A_{i,t}^2} \sigma_{A,i}^2 A_{i,t}^2 + \frac{\partial D_{i,t}}{\partial A_{i,t}} \mu_{A,i} A_{i,t} + \frac{\partial D_{i,t}}{\partial t} \right]}_{\mu_{D,i,t} \cdot D_{i,t}} \cdot dt + \underbrace{\sigma_{A,i} A_{i,t} \frac{\partial D_{i,t}}{\partial A_{i,t}}}_{\sigma_{D,i,t} \cdot D_{i,t}} \cdot dW_{i,t}. \quad (A1.4)$$

<sup>1033</sup> Für Einführung in die Anwendung von ITÔ's Lemma siehe S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 230-251.

## Anlage 2: Lösung einer linearen stochastischen Differentialgleichung mittels ITÔ's Lemma

Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f$  in Abhängigkeit von  $t$  und  $W_t$ . Dann lässt sich für infinitesimal kleine  $dt$  der Funktionswert  $f(t+dt, W_{t+dt})$  mit Hilfe einer TAYLOR-Reihe 2. Ordnung um das Entwicklungszentrum  $(t, W_t)$  approximieren:<sup>1034</sup>

$$f(t+dt, W_{t+dt}) - f(t, W_t) \cong \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f(t, W_t)}{\partial W_t} dW_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, W_t)}{\partial W_t^2} dW_t^2. \quad (\text{A2.1})$$

Durch formelles Integrieren beider Seiten von (A2.1) erhält man ITÔ's Lemma in Form einer stochastischen Integrationsgleichung, wobei  $dW^2$  durch  $dt$  ersetzt wurde:

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t \left[ \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, W_u)}{\partial W_u^2} \right] \cdot du + \int_0^t \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial W_u} \cdot dW_u. \quad (\text{A2.2})$$

Man setzt nun:

$$f(t, W_t) = e^{\mu_{A,i} \cdot t - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \cdot t + \sigma_{A,i} \cdot W_{t,i}}. \quad (\text{A2.3})$$

Für die partiellen Ableitungen aus (A2.2) erhält man folglich:

$$\frac{\partial f(t, W_t)}{\partial t} = \left( \mu_{A,i} - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \right) \cdot f(t, W_t), \quad (\text{A2.4})$$

$$\frac{\partial f(t, W_t)}{\partial W_t} = \sigma_{A,i} \cdot f(t, W_t), \quad (\text{A2.5})$$

$$\frac{\partial^2 f(t, W_t)}{\partial W_t^2} = \sigma_{A,i}^2 \cdot f(t, W_t). \quad (\text{A2.6})$$

Durch Einsetzen von (A2.4) bis (A2.6) in (A2.2) folgt, dass der stochastische Prozess (A2.3) die Lösung<sup>1035</sup> für die stochastische Integrationsgleichung

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^t \mu_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot du + \int_0^t \sigma_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot dW_u. \quad (\text{A2.7})$$

darstellt.

<sup>1034</sup> Vgl. hierzu und im Folgenden T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 117-122 u. 138-145.

<sup>1035</sup> Der stochastische Prozess (A2.3) stellt die einzige Lösung für (A2.7) dar. Gefolgert werden kann dies aus den linearen Koeffizienten von  $du$  und  $dW_t$  bezüglich  $A_{i,t}$ . Sie erfüllen regelmäßig die sog. LIPSCHITZ-Bedingung. Vgl. T. Mikosch (2004), Stochastic calculus, S. 138.

Fortsetzung von Anlage 2:

Durch Teilung der Zeitachse  $[0,t]$  in 2 disjunkte Teilabschnitte  $[0,s]$  und  $(s,t]$  mit  $0 < s < t$  sowie Ausnutzung der Eigenschaft der Linearität des ITÔ-Integrals bezüglich zweier benachbarter Integrationsintervalle erhält man für (A2.2) bzw. (A2.3):

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \int_0^s \left[ \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, W_u)}{\partial W_u^2} \right] \cdot du + \int_0^s \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial W_u} \cdot dW_u + \int_s^t \left[ \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, W_u)}{\partial W_u^2} \right] \cdot du + \int_s^t \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial W_u} \cdot dW_u, \quad (\text{A2.8})$$

$$f(t, W_t) = e^{\mu_{A,i} \cdot s - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \cdot s + \sigma_{A,i} \cdot W_{i,s}} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot (t-s) - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \cdot (t-s) + \sigma_{A,i} \cdot W_{i,(t-s)}}. \quad (\text{A2.9})$$

Definiert man nun

$$t - s =: T, \quad (\text{A2.10})$$

dann lässt sich aufgrund der MARKOV-Eigenschaft sowie der Stationarität der BROWNSchen Bewegung  $W_t$ <sup>1036</sup> für (A2.8) bzw. (A2.9) auch schreiben:

$$f(t, W_t) - f(0, W_0) = \underbrace{\int_0^s \left[ \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, W_u)}{\partial W_u^2} \right] \cdot du + \int_0^s \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial W_u} \cdot dW_u}_{f(s, W_s) - f(0, W_0)} + \underbrace{\int_0^T \left[ \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, W_u)}{\partial W_u^2} \right] \cdot du + \int_0^T \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial W_u} \cdot dW_u}_{f(T, W_T) - f(0, W_0)}, \quad (\text{A2.11})$$

$$f(t, W_t) = f(s, W_s) \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \cdot T + \sigma_{A,i} \cdot W_{i,T}}. \quad (\text{A2.12})$$

Stellt man nun (A2.11) unter analoger Anwendung von (A2.2) auf die ersten beiden Integrale von (A2.11) um, erhalten wir:

$$f(t, W_t) - f(s, W_s) = \int_0^T \left[ \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial u} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, W_u)}{\partial W_u^2} \right] \cdot du + \int_0^T \frac{\partial f(u, W_u)}{\partial W_u} \cdot dW_u. \quad (\text{A2.13})$$

<sup>1036</sup> Vgl. Definition 2-7.

Fortsetzung von Anlage 2:

Setzt man

$$f(t, W_t) = A_{i,T} \text{ und} \quad (\text{A2.14})$$

$$f(s, W_s) = A_{i,0}, \quad (\text{A2.15})$$

dann kann man für (A2.13) und (A2.12) abschließend schreiben:

$$A_{i,T} - A_{i,0} = \int_0^T \mu_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot du + \int_0^T \sigma_{A,i} \cdot A_{i,u} \cdot dW_u, \quad (2.11)$$

$$A_{i,T} = A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T - \frac{\sigma_{A,i}^2}{2} \cdot T + \sigma_{A,i} \cdot W_{i,T}}. \quad (2.12)$$

Schlussfolgernd lässt sich festhalten, dass (2.12) die stochastische Integrationsgleichung (2.11) eindeutig löst.

### Anlage 3: Unternehmenswertkorrelation

Werden die Werte der Vermögensgegenstände der Unternehmen  $i=1, \dots, N$  im Zeitpunkt  $T$  durch den Zufallsvektor  $\mathbf{A}_T$  (2.58) beschrieben, sind die logarithmierten Unternehmenswertänderungen bzgl. des Zeitpunkts  $T$  normalverteilt:

$$\ln \frac{A_{i,T}}{A_{i,0}} \sim N \left( \underbrace{\left( \mu_{A,i} - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2 \right)}_{\mu_{A,i}} \cdot T, \sigma_{A,i}^2 \cdot T \right). \quad (\text{A3.1})$$

Für die Korrelation zwischen den logarithmierten Unternehmenswertänderungen folgt:

$$\rho \left( \ln \left( \frac{A_{i,T}}{A_{i,0}} \right), \ln \left( \frac{A_{j,T}}{A_{j,0}} \right) \right) = \frac{E \left( \ln \left( \frac{A_{i,T}}{A_{i,0}} \right) \cdot \ln \left( \frac{A_{j,T}}{A_{j,0}} \right) \right) - [\mu'_{A,i} \cdot T] \cdot [\mu'_{A,j} \cdot T]}{[\sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}] \cdot [\sigma_{A,j} \cdot \sqrt{T}]}. \quad (\text{A3.2})$$

Für den Erwartungswert in Gleichung (A3.2) erhält man:

$$\begin{aligned} E(\cdot) &= [\mu'_{A,i} \cdot T] \cdot [\mu'_{A,j} \cdot T] \\ &+ [\mu'_{A,i} \cdot T] \cdot \sigma_{A,j} \cdot E(W_{j,T}) + [\mu'_{A,j} \cdot T] \cdot \sigma_{A,i} \cdot E(W_{i,T}) \\ &+ \sigma_{A,i} \cdot \sigma_{A,j} \cdot E(W_{i,T} \cdot W_{j,T}). \end{aligned} \quad (\text{A3.3})$$

Zur Berechnung von  $E(W_{i,T} \cdot W_{j,T})$  sind gem. Gleichung (2.62)  $W_{i,T} = \tilde{B}_{i,t}$  und  $W_{j,T} = \tilde{B}_{j,t}$  zu setzen:

$$E(W_{i,T} \cdot W_{j,T}) = \frac{1}{\sigma_{A,i} \cdot \sigma_{A,j}} \cdot \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(l)} \cdot E(B_{m,T} \cdot B_{l,T}). \quad (\text{A3.4})$$

Aus der Unabhängigkeit der BROWNSchen Prozesse  $B_{m,T}$  und  $B_{l,T}$  für  $l \neq m$  gem. Definition 2-12 folgt:

$$E(B_{m,T} \cdot B_{l,T}) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq l, \\ T & \text{für } m = l. \end{cases} \quad (\text{A3.5})$$

Rekursives Einsetzen von (A3.5) bis (A3.3) in (A3.2) ergibt schließlich:

$$\rho \left( \ln \left( \frac{A_{i,T}}{A_{i,0}} \right), \ln \left( \frac{A_{j,T}}{A_{j,0}} \right) \right) = \frac{\sum_{m=1}^M \sigma_{A,i}^{(m)} \cdot \sigma_{A,j}^{(m)}}{\sigma_{A,i} \cdot \sigma_{A,j}}. \quad (\text{2.64})$$

**Anlage 4: Lower-Partial Moments der Ordnungen null und eins im einfachen Unternehmenswertansatz für  $t_H=T$**

Den Ausgangspunkt der Betrachtung bildet die Dichtefunktion des Unternehmenswertes  $A_i$  in  $T$ . Da der logarithmierte Unternehmenswert normalverteilt ist mit

$$\ln A_{i,T} \sim N\left(\ln A_{i,0} + \left(\mu_{A,i} - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2\right) \cdot T, \sigma_{A,i}^2 \cdot T\right), \quad (\text{A4.1})$$

hat die Dichtefunktion folgende Form:<sup>1037</sup>

$$f_{A,T}(u) = \frac{1}{u \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma_{A,i}^2 \cdot T}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\ln u - \ln A_{i,0} - \mu_{A,i} \cdot T + \frac{1}{2} \sigma_{A,i}^2 \cdot T}{\sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}} \right)^2}. \quad (\text{A4.2})$$

(a) Lower Partial Moment der Ordnung null:<sup>1038</sup>

$$\begin{aligned} LPM_{D_{i,T}}^{(0)}(D_{i,T}^*) &= \int_{[0, D_{i,T}^*)} f_{D_{i,T}}(u) \cdot du = \int_{[0, D_{i,T}^*)} f_{A_{i,T}}(u) \cdot du \\ &= \underline{\underline{F_{SN}(-d_2)}} \end{aligned}$$

mit : (A4.3)

$$d_2 = \ln \frac{A_{i,0}}{D_{i,T}^*} + \left( \mu_{A,i} - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2 \right) \cdot T / \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}.$$

(b) Lower Partial Moment der Ordnung eins:

$$LPM_{D_{i,T}}^{(1)}(D_{i,T}^*) = \int_{[0, D_{i,T}^*)} (D_{i,T}^* - u) \cdot f_{A_{i,T}}(u) \cdot du. \quad (\text{A4.4})$$

Als Zwischenschritt ist zunächst zu ermitteln:

$$\int_{[0, D_{i,T}^*)} u \cdot f_{A_{i,T}}(u) \cdot du. \quad (\text{A4.5})$$

<sup>1037</sup> Zur Dichtefunktion der Lognormalverteilung siehe K. Shimizu und E. Crow (1988), Lognormal distribution, S. 2-4.

<sup>1038</sup> In (A4.3) wurde berücksichtigt, dass die Dichtefunktionen des Unternehmenswertes und des Assetwertes für  $t_H = T$  auf  $0 \leq u < D_i^{NW}$  identisch sind. Soll dagegen die Schranke  $D_{i,T}^* = D_{i,T}^{NW}$  berücksichtigt werden, ist zu beachten, dass die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse für  $A_{i,T} \geq D_i^{NW}$  auf der Stelle  $D_i^{NW}$  liegt.

Fortsetzung von Anlage 4:

Dazu wird der der Klammerausdruck in (A4.2) durch  $h$  substituiert:

$$h = \frac{\ln u - \ln A_{i,0} - \mu_{A,i} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2 \cdot T}{\sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}}, \quad (\text{A4.6})$$

$$du = dh \cdot \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T} \cdot u. \quad (\text{A4.7})$$

Man erhält für (A4.5) mit angepasster unterer und oberer Integrationsgrenze:

$$A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2 \cdot T} \cdot \int_{(-\infty, D_{i,T}^{**})} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} (h^2 - 2 \cdot h \cdot \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T})} \cdot dh$$

mit : (A4.8)

$$D_{i,T}^{**} = \frac{\ln D_{i,T}^* - \ln A_{i,0} - \mu_{A,i} \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A,i}^2 \cdot T}{\sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}}.$$

Nach quadratischer Ergänzung des Klammerausdruckes in (A4.8) durch  $\sigma_{A,i}^2 \cdot T$  wird dieser durch  $g$  substituiert:

$$g = h - \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T}, \quad (\text{A4.9})$$

$$dh = dg. \quad (\text{A4.10})$$

Man erhält für (A4.8) mit angepasster unterer und oberer Integrationsgrenze:

$$A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T} \cdot \int_{(-\infty, D_{i,T}^{**})} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} g^2} \cdot dg = A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T} \cdot F_{SN}(-d_1)$$

mit : (A4.11)

$$D_{i,T}^{***} = D_{i,T}^{**} - \sigma_{A,i} \cdot \sqrt{T} = -d_1.$$

Damit erhält man abschließend für das Lower Partial Moment der Ordnung eins:

$$\begin{aligned} LPM_{D_{i,T}}^{(1)}(D_{i,T}^*) &= D_{i,T}^* \cdot LPM_{D_{i,T}}^{(0)}(D_{i,T}^*) - A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T} \cdot F_{SN}(-d_1) \\ &= \underline{\underline{D_{i,T}^* \cdot F_{SN}(-d_2) - A_{i,0} \cdot e^{\mu_{A,i} \cdot T} \cdot F_{SN}(-d_1)}}. \end{aligned} \quad (\text{A4.12})$$

Für  $D_{i,T}^* = D_i^{NW}$  repräsentiert der erste Term in (A4.12) den Nominalwert, multipliziert mit der Ausfallwahrscheinlichkeit, d. h. den erwarteten Verlust im Falle einer Wiedergewinnung von null. Der zweite Term stellt folglich die Wiedergewinnung dar.

## Anlage 5: Ausfallwahrscheinlichkeiten mit Hazard Rate-Funktionen

Die Hazard Rate-Funktion  $h(t)$  gibt die instantane Ausfallwahrscheinlichkeit im Zeitpunkt  $t$  unter der Bedingung an, dass bis zum Zeitpunkt  $t$  das ausfalldefinierende Ereignis noch nicht eingetreten ist:

$$h_i(t) = \frac{f_{\tau_{FP,i}}(t)}{1 - F_{\tau_{FP,i}}(t)} \quad \text{für } t \geq 0. \quad (3.7)$$

Mit  $f_{\tau_{FP,i}}(t) = dF_{\tau_{FP,i}}(t)/dt$  folgt:

$$h_i(t) = \frac{dF_{\tau_{FP,i}}(t)}{dt(1 - F_{\tau_{FP,i}}(t))}. \quad (A5.1)$$

Umstellen liefert:

$$h_i(t) dt = \frac{-d(1 - F_{\tau_{FP,i}}(t))}{(1 - F_{\tau_{FP,i}}(t))}. \quad (A5.2)$$

Beide Seiten sind zu integrieren:

$$\int_0^t h_i(s) ds = \int_0^t -\frac{1}{(1 - F_{\tau_{FP,i}}(s))} d(1 - F_{\tau_{FP,i}}(s)). \quad (A5.3)$$

Mit  $\ln x$  als Stammfunktion von  $1/x$  folgt:

$$-\int_0^t h_i(s) ds = \ln(1 - F_{\tau_{FP,i}}(s)) \Big|_0^t. \quad (A5.4)$$

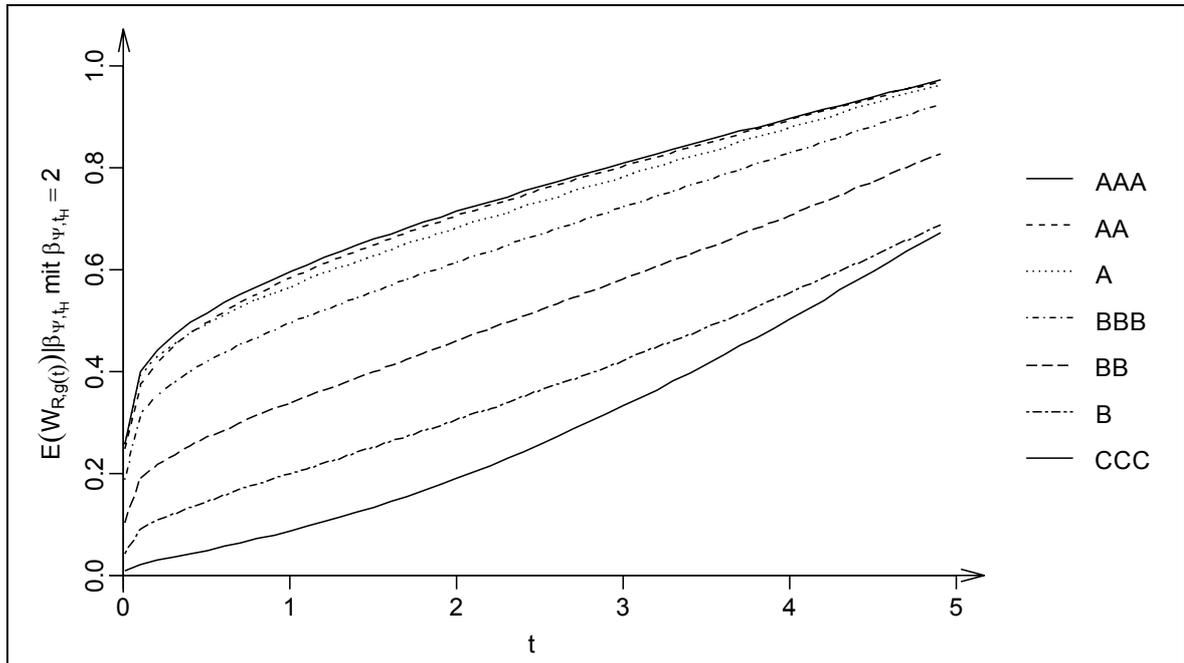
Mit  $F_{\tau_{FP,i}}(0) = 0$  ergibt sich:

$$-\int_0^t h_i(s) ds = \ln(1 - F_{\tau_{FP,i}}(t)). \quad (A5.5)$$

Mit der Exponentialfunktion als Umkehrung der Logarithmusfunktion erhält man schließlich nach kurzem Umstellen die Ausfallwahrscheinlichkeit:

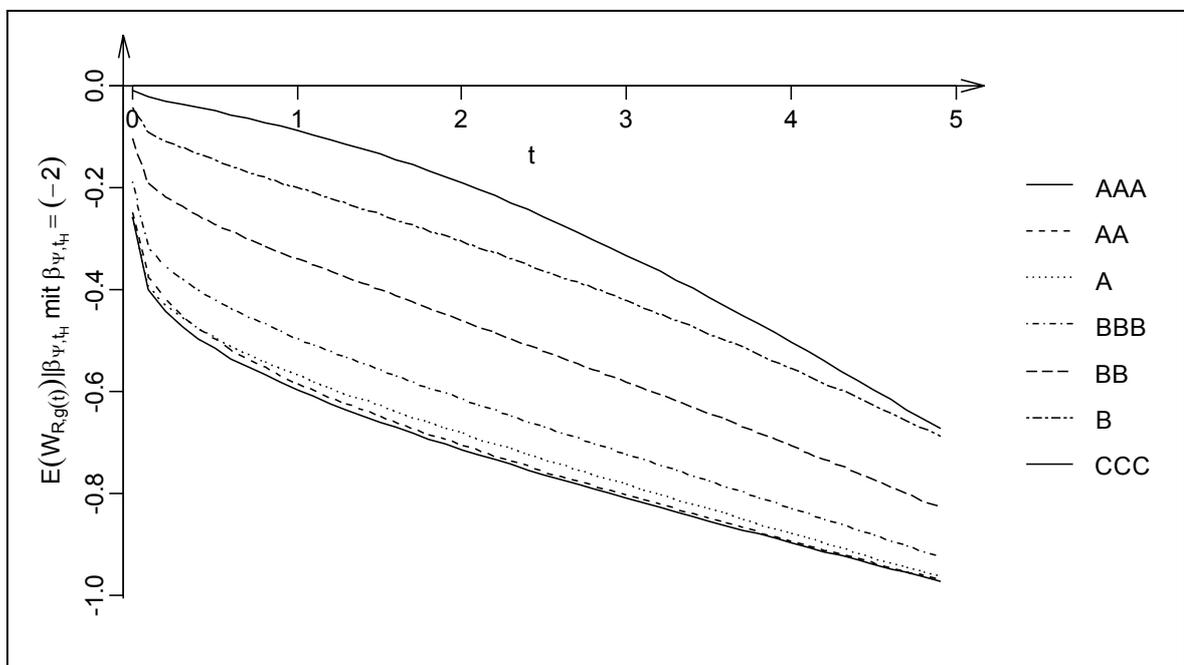
$$p_{i,t} = F_{\tau_{FP,i}}(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h_i(s) ds\right) \quad \text{für } t \in [0, T_i]. \quad (3.8)$$

## Anlage 6: Faktorendpunktbedingte Erwartungswerte mit BROWNSchen Faktorbrücken



**Abb. A - 1: Bedingte Erwartungswerte mit BROWNSchen Brücken als Faktoren (I)**

Faktorendpunktbedingte Erwartungswerte bei BROWNSchen Faktorbrücken. Der Endpunkt beträgt 2. Die Zeittransformationen erfolgen auf der Basis der Credit Curves vom Typ B. Die Faktorsensitivitäten sind ratingspezifisch gewählt.<sup>1039</sup>

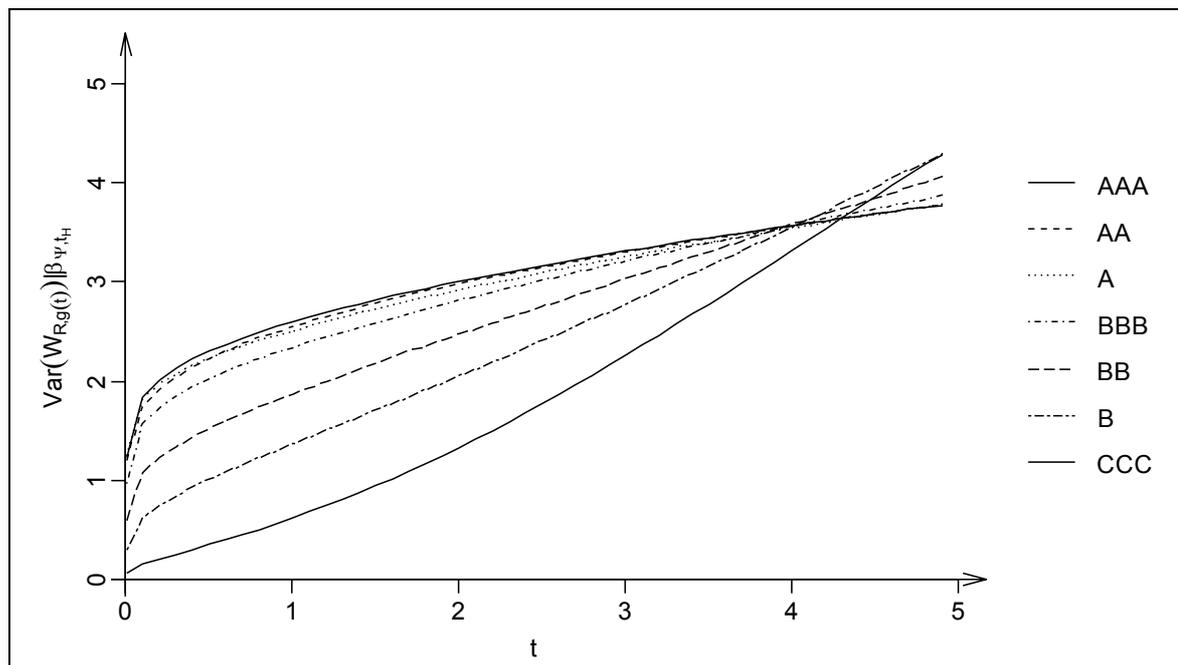


**Abb. A - 2: Bedingte Erwartungswerte mit BROWNSchen Brücken als Faktoren (II)**

Faktorendpunktbedingte Erwartungswerte bei BROWNSchen Faktorbrücken. Der Endpunkt beträgt (-2). Die Zeittransformationen erfolgen auf der Basis der Credit Curves vom Typ B. Die Faktorsensitivitäten sind ratingspezifisch gewählt.

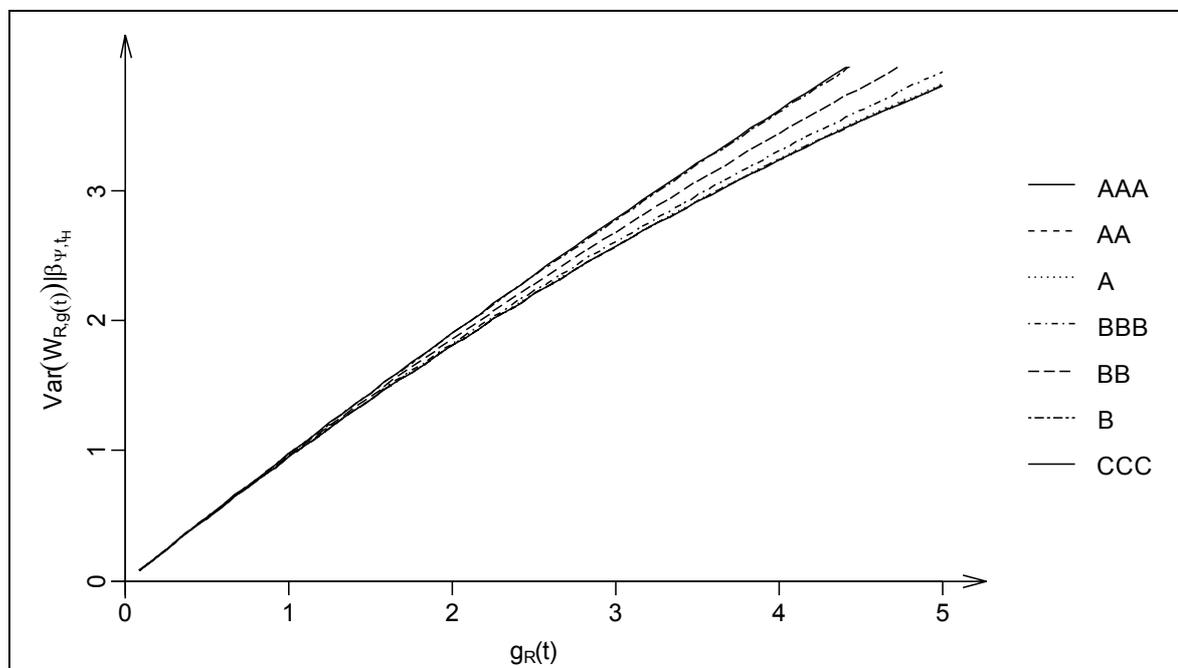
<sup>1039</sup> Bei identischen Korrelationen würden alle Graphen im Risikohorizont  $t_H=5$  im selben Punkt münden.

## Anlage 7: Faktorendpunktbedingte Varianzen mit BROWNSchen Faktorbrücken



**Abb. A - 3: Bedingte Varianzen mit BROWNSchen Brücken als Faktoren (I)**

Faktorendpunktbedingte Varianzen bei BROWNSchen Faktorbrücken, abgetragen gegen die originale Zeitachse. Die Zeittransformationen erfolgen auf der Basis der Credit Curves vom Typ B. Die Faktorsensitivitäten sind ratingspezifisch gewählt.<sup>1040</sup> Der Faktorendpunkt übt keinen Einfluss aus.



**Abb. A - 4: Bedingte Varianzen mit BROWNSchen Brücken als Faktoren (II)**

Faktorendpunktbedingte Varianzen bei BROWNSchen Faktorbrücken, abgetragen gegen die transformierte Zeitachse. Die Zeittransformationen erfolgen auf der Basis der Credit Curves vom Typ B. Die Faktorsensitivitäten sind ratingspezifisch gewählt.<sup>1041</sup> Der Faktorendpunkt übt keinen Einfluss aus.

<sup>1040</sup> Vgl. Tab. 3-6 für die ratingspezifischen Faktorsensitivitäten.

## Anlage 8: Grenzwertbetrachtung der bedingten Ausfalldichte für $s=0$

Ausgangspunkt ist die faktorendpunktbedingte Passage-Dichte einer BROWNSchen Bewegung für den Kredit  $i$ :

$$f_{W_i|W} (s) = -\frac{K_i \sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3 (t_H - s\rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H \psi})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s\sqrt{\rho_i(1-\rho_i)}\psi t_H - K_i \sqrt{t_H(1-\rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s\rho_i)} \right)}. \quad (3.100)$$

Zu untersuchen ist  $f_{W_i|W} (s)$  für  $s \searrow 0$ :

$$\lim_{s \searrow 0} f_{W_i|W} (s) = -\frac{K_i}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H \psi})^2}{t_H} - K_i^2 (1-\rho_i) \right)} \cdot \lim_{s \searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{K_i^2}{s} \right)}}{\sqrt{s^3}}. \quad (A8.1)$$

Damit wird die Grenzwertbetrachtung auf den Term  $\exp(-0.5K_i^2/s) \cdot s^{-3/2}$  reduziert. Für  $s=0$  erhält man den unbestimmten Ausdruck  $0/0$ . Die einfache Anwendung der Regel von L'HÔPITAL<sup>1042</sup> führt nicht zum Ziel, da sich dadurch die Grundstruktur des Terms nicht verändert. Der Exponent von  $s^{-3/2}$  verringert sich dabei regelmäßig um den Wert eins. Zusätzlich erhält man durch die Ableitung der Exponentialfunktion eine multiplikative Konstante. Daher sei zunächst der folgende Grenzwert betrachtet:

$$\lim_{s \searrow 0} \ln \left( \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{K_i^2}{s} \right)}}{\sqrt{s^3}} \right) = \lim_{s \searrow 0} \ln \left( \frac{s^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2} \left( \frac{K_i^2}{s} \right)}} \right) = \lim_{s \searrow 0} \left( -\frac{3s \ln(s) + K_i^2}{2s} \right). \quad (A8.2)$$

Mit

$$\lim_{s \searrow 0} 3s \ln(s) = 3 \lim_{s \searrow 0} \frac{\ln(s)}{1/s} \stackrel{\text{L'Hôpital}}{=} -3 \lim_{s \rightarrow 0} s = 0 \quad (A8.3)$$

folgt

$$\lim_{s \searrow 0} \ln \left( \frac{e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{K_i^2}{s} \right)}}{\sqrt{s^3}} \right) = -\infty. \quad (A8.4)$$

<sup>1041</sup> Vgl. Fn. 1040.

<sup>1042</sup> Vgl. zur Regel von L'HÔPITAL M. Abramowitz und I. Stegun (1972), Handbook of mathematical functions, S. 13.

Fortsetzung von Anlage 8:

Auf den eigentlich interessierenden Grenzwert lässt sich schließen, wenn man den Verlauf der Funktion des natürlichen Logarithmus betrachtet und in der Äquivalenz

$$\lim_{x \searrow y} \ln x = -\infty \Leftrightarrow y = 0 \quad (\text{A8.5})$$

die Substitution

$$x = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{K_i^2}{s}\right)}}{\sqrt{s^3}} \quad (\text{A8.6})$$

vornimmt. Da der natürliche Logarithmus von (A8.6) wegen (A8.5) genau dann gegen minus unendlich strebt, wenn sich der Ausdruck (A8.6) der Zahl Null nähert und sich gleichzeitig mit (A8.4) derselbe Grenzwert für  $s \searrow 0$  ergibt, folgt:

$$s \searrow 0 \Rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{K_i^2}{s}\right)}}{\sqrt{s^3}} \searrow 0. \quad (\text{A8.7})$$

Setzt man schließlich den Grenzwert von  $\exp(-0.5K_i^2/s) \cdot s^{-3/2}$  i. H. v. null in (A8.1) ein, erhält man den Grenzwert der faktorbedingten Passage-Dichte:

$$\lim_{s \searrow 0} f_{W_i|\psi}(s) = 0. \quad (\text{A8.8})$$

**Anlage 9: Grenzwertbetrachtung der bedingten Ausfalldichte für  $s=t_H$**

Ausgangspunkt ist die faktorendpunktbedingte Passage-Dichte einer BROWNSchen Bewegung für den Kredit  $i$ :

$$f_{W_i|W}(s) = -\frac{K_i \sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3 (t_H - s \rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 - \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H} \psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s \sqrt{\rho_i (1 - \rho_i)} \psi_{t_H} - K_i \sqrt{t_H (1 - \rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s \rho_i)} \right)}. \quad (3.100)$$

Zu untersuchen ist  $f_{W_i|W}(s)$  für  $s \nearrow t_H$ :

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = \lim_{s \nearrow t_H} \frac{-K_i \sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3 (t_H - s \rho_i)}} \cdot e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 - \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H} \psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s \sqrt{\rho_i (1 - \rho_i)} \psi_{t_H} - K_i \sqrt{t_H (1 - \rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s \rho_i)} \right)}. \quad (A9.1)$$

Vereinfachend wird angenommen, dass  $\rho_i \neq 0$  gilt. Dadurch lässt sich zunächst schreiben:

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = \frac{-K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3 (1 - \rho_i)}} \cdot \lim_{s \nearrow t_H} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 - \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H} \psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s \sqrt{\rho_i (1 - \rho_i)} \psi_{t_H} - K_i \sqrt{t_H (1 - \rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s \rho_i)} \right)}. \quad (A9.2)$$

Problematisch ist, dass für  $s=t_H$  im Exponenten der Zahl  $e$  zwei Terme durch null dividiert und anschließend voneinander abgezogen werden. Eine Separation dieser Terme führt zu:

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = \frac{-K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3 (1 - \rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 - \frac{K_i^2}{t_H} \right)} \cdot \lim_{s \nearrow t_H} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(t_H - s)(K_i - \sqrt{\rho_i t_H} \psi_{t_H})^2 - (s \sqrt{\rho_i (1 - \rho_i)} \psi_{t_H} - K_i \sqrt{t_H (1 - \rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s \rho_i)} \right)}. \quad (A9.3)$$

Wenn der Grenzwert des Exponenten der Zahl  $e$  existiert, dann kann man schreiben:

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = \frac{-K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3 (1 - \rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi^2 - \frac{K_i^2}{t_H} \right)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \lim_{s \nearrow t_H} \frac{(t_H - s)(K_i - \sqrt{\rho_i t_H} \psi_{t_H})^2 - (s \sqrt{\rho_i (1 - \rho_i)} \psi_{t_H} - K_i \sqrt{t_H (1 - \rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s \rho_i)} \right)}. \quad (A9.4)$$

Fortsetzung von Anlage 9:

Durch Ausmultiplizieren des Zählers und des Nenners im Exponenten der Zahl  $e$  folgt:

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = \frac{-K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3 (1-\rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi_{t_H}^2 - \frac{K_i^2}{t_H} \right)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \lim_{s \nearrow t_H} \frac{t_H \rho_i K_i^2 - s \rho_i K_i^2 + 2K_i \psi_{t_H} s \sqrt{\rho_i t_H} - 2K_i \psi_{t_H} t_H \sqrt{\rho_i t_H} + t_H^2 \rho_i \psi_{t_H}^2 - s^2 \rho_i \psi_{t_H}^2 + s^2 \rho_i^2 \psi_{t_H}^2 - s t_H \rho_i^2 \psi_{t_H}^2}{t_H^2 - s t_H + s^2 \rho_i - s t_H \rho_i} \right)} \quad (\text{A9.5})$$

Anhand des ausmultiplizierten Zählers und Nenners wird deutlich, dass man für  $s=t_H$  den unbestimmten Ausdruck  $0/0$  erhält. Die Grenzwertbetrachtung des Bruches erfolgt nach der Regel von L'HÔPITAL.<sup>1043</sup> Dazu sind die Ableitungen des Zählers und Nenners nach  $s$  durcheinander zu dividieren:

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = \frac{-K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3 (1-\rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi_{t_H}^2 - \frac{K_i^2}{t_H} \right)} \cdot e^{-\frac{1}{2} \left( \lim_{s \nearrow t_H} \frac{-\rho_i K_i^2 + 2K_i \psi_{t_H} \sqrt{\rho_i t_H} - 2s \rho_i \psi_{t_H}^2 + 2s \rho_i^2 \psi_{t_H}^2 - t_H \rho_i^2 \psi_{t_H}^2}{-t_H + 2s \rho_i - t_H \rho_i} \right)} \quad (\text{A9.6})$$

Bildung des Grenzwertes und Zusammenfassen der Exponentialfunktionen führt zu:

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = -\frac{K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3 (1-\rho_i)}} \cdot e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi_{t_H}^2 + \frac{K_i^2 - 2K_i \psi_{t_H} \sqrt{\rho_i t_H} + 2t_H \rho_i \psi_{t_H}^2 - t_H \rho_i^2 \psi_{t_H}^2}{t_H \rho_i - t_H} \right)} \quad (\text{A9.7})$$

Durch Aufspalten des Bruches im Exponenten der Zahl  $e$  erhält man:

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = -\frac{K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3 (1-\rho_i)}} \cdot e^{\frac{1}{2} \left( \rho_i \psi_{t_H}^2 + \frac{K_i^2 - 2K_i \psi_{t_H} \sqrt{\rho_i t_H} + t_H \rho_i \psi_{t_H}^2}{t_H \rho_i - t_H} + \frac{t_H \rho_i \psi_{t_H}^2 - t_H \rho_i^2 \psi_{t_H}^2}{t_H \rho_i - t_H} \right)} \quad (\text{A9.8})$$

Anwendung der Binomischen Formeln sowie Vereinfachungen ergeben schließlich:

$$\lim_{s \nearrow t_H} f_{W_i|W}(s) = -\frac{K_i}{\sqrt{2\pi t_H^3 (1-\rho_i)}} e^{\frac{1}{2} \left( \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H} \psi)^2}{t_H (\rho_i - 1)} \right)} \quad (\text{3.102})$$

<sup>1043</sup> Vgl. zur Regel von L'HÔPITAL M. Abramowitz und I. Stegun (1972), Handbook of mathematical functions, S. 13.

**Anlage 10: Bedingte Ausfalldichte für den Spezialfall  $\rho_i = 1$**

Ausgangspunkt ist die faktorendpunktbedingte Passage-Dichte einer BROWNSchen Bewegung für den Kredit  $i$ :

$$f_{W_i|\Psi}(s) = -\frac{K_i\sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3(t_H - s\rho_i)}} e^{\frac{1}{2}\left(\rho_i\psi^2 - \frac{(K_i - \sqrt{t_H}\psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s\sqrt{\rho_i(1-\rho_i)}\psi_{t_H} - K_i\sqrt{t_H(1-\rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s\rho_i)}\right)}. \quad (3.100)$$

Zunächst ist für  $\rho_i$  der Wert eins einzusetzen:

$$f_{W_i|\Psi}(s) = -\frac{K_i\sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3(t_H - s)}} e^{\frac{1}{2}\left(\psi_{t_H}^2 - \frac{(K_i - \sqrt{t_H}\psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s}\right)}. \quad (A10.1)$$

Umformen ergibt:

$$f_{W_i|\Psi}(s) = -\frac{K_i}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t_H}} e^{\frac{1}{2}\psi_{t_H}^2} \cdot \pi} s^{-\frac{3}{2}} (t_H - s)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(K_i - \sqrt{t_H}\psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} + \frac{K_i^2}{s}\right)}. \quad (A10.2)$$

Mit  $\sqrt{t_H}\psi_{t_H} = \beta_{i,t_H}$  folgt:

$$f_{W_i|\Psi}(s) = -\frac{K_i}{2\xi\pi} s^{-\frac{3}{2}} (t_H - s)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(K_i - \beta_{i,t_H})^2}{(t_H - s)} + \frac{K_i^2}{s}\right)}, \quad (3.88)$$

wobei

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_H}} e^{\frac{1}{2}\frac{\beta_{i,t_H}^2}{t_H}}. \quad (A10.3)$$

**Anlage 11: Bedingte Ausfalldichte für den Spezialfall  $\rho_i = 0$**

Ausgangspunkt ist die faktorendpunktbedingte Passage-Dichte einer BROWNSchen Bewegung für den Kredit  $i$ :

$$f_{W_i|\Psi}(s) = -\frac{K_i\sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3(t_H - s\rho_i)}} e^{\frac{1}{2}\left(\rho_i\Psi^2 - \frac{(K_i - \sqrt{\rho_i t_H}\Psi_{t_H})^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(s\sqrt{\rho_i(1-\rho_i)}\Psi_{t_H} - K_i\sqrt{t_H(1-\rho_i)})^2}{(t_H - s)(t_H - s\rho_i)}\right)}. \quad (3.100)$$

Zunächst ist für  $\rho_i$  der Wert null einzusetzen:

$$f_{W_i|\Psi, \rho_i=0}(s) = -\frac{K_i\sqrt{t_H}}{\sqrt{2\pi s^3(t_H)}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{K_i^2}{(t_H - s)} - \frac{K_i^2}{s} + \frac{(K_i\sqrt{t_H})^2}{(t_H - s)t_H}\right)}. \quad (A11.1)$$

Umformen ergibt die Passage-Dichte einer BROWNSchen Bewegung:<sup>1044</sup>

$$f_{W_i|\rho_i=0}(s) = -\frac{K_i}{\sqrt{2\pi s^3}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{K_i^2}{s}}. \quad (3.105)$$

---

<sup>1044</sup> Zum Konzept der Passage-Dichte einer BROWNSchen Bewegung siehe I. Karatzas und S. Shreve (2005), Brownian motion, S. 80.

## Anlage 12: Erwartungswert des Produkts zweier Punkte einer BROWNSchen Brücke

Ausgangspunkt ist eine BROWNSche Brücke gem. Definition 3-5 mit der Repräsentation:

$$X_t = \alpha \left(1 - \frac{t}{T}\right) + \beta \frac{t}{T} + (T-t) \int_0^t \frac{dB_s}{T-s} \quad \text{für } 0 \leq t < T. \quad (3.53)$$

Das Produkt von  $X_u$  und  $X_s$  mit  $X_u = X_{\psi, g_{i,t}}$ ,  $X_s = X_{\psi, g_{j,t}}$ ,  $T = t_H$ ,  $\beta = \beta_{\psi, t_H}$ ,  $u = g_{i,t}$ ,  $s = g_{j,t}$  sowie dem Startwert  $\alpha = 0$  liefert:

$$\begin{aligned} X_{\psi, g_{i,t}} X_{\psi, g_{j,t}} &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} \\ &+ \beta_{\psi, t_H} \frac{g_{i,t}}{t_H} (t_H - g_{i,t}) \int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s} \\ &+ (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) \int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s} \int_0^{g_{j,t}} \frac{dB_s}{t_H - s}. \end{aligned} \quad (A12.1)$$

Mit Bildung des Erwartungswertes folgt:

$$\begin{aligned} E\left(X_{\psi, g_{i,t}} X_{\psi, g_{j,t}}\right) &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} \\ &+ \beta_{\psi, t_H} \frac{g_{i,t}}{t_H} (t_H - g_{i,t}) E\left(\int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s}\right) \\ &+ (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) E\left(\int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s} \int_0^{g_{j,t}} \frac{dB_s}{t_H - s}\right). \end{aligned} \quad (A12.2)$$

Mit der Martingaleigenschaft des ITÔ-Integrals folgt für den ersten Erwartungswert in (A12.2) der Wert null.<sup>1045</sup> O. b. d. A. gelte  $g_{i,t} < g_{j,t}$ . Dann lässt sich der Term im zweiten Erwartungswertoperator wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} E\left(X_{\psi, g_{i,t}} X_{\psi, g_{j,t}}\right) &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} \\ &+ (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) E\left(\int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s} \cdot \left(\int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s} + \int_{g_{i,t}}^{g_{j,t}} \frac{dB_s}{t_H - s}\right)\right). \end{aligned} \quad (A12.3)$$

<sup>1045</sup> Vgl. S. Neftci (2000), Mathematics of financial derivatives, S. 220-224 u. 226 f.

Fortsetzung von Anlage 12:

Durch Multiplikation erhält man:

$$\begin{aligned}
 E\left(X_{\psi, g_{i,t}} X_{\psi, g_{j,t}}\right) &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} \\
 &+ (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) \left( E\left(\int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s}\right)^2 + E\left(\int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s} \int_{g_{i,t}}^{g_{j,t}} \frac{dB_s}{t_H - s}\right) \right).
 \end{aligned} \tag{A12.4}$$

Mit der Martingaleigenschaft des ITÔ-Integrals folgt für den zweiten Erwartungswert in (A12.4) unter Berücksichtigung der Unabhängigkeit der beiden dort aufgeführten ITÔ-Integrale der Wert null. Mit Blick auf den ersten Erwartungswert lässt sich mit Hilfe der ITÔ-Isometrie<sup>1046</sup> schließlich schreiben:

$$\begin{aligned}
 E\left(X_{\psi, g_{i,t}} X_{\psi, g_{j,t}}\right) &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} + (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) E\left(\int_0^{g_{i,t}} \frac{ds}{(t_H - s)^2}\right) \\
 &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} - (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) \int_0^{g_{i,t}} \frac{d(t_H - s)}{(t_H - s)^2}.
 \end{aligned} \tag{A12.5}$$

Durch Integration folgt:

$$\begin{aligned}
 E\left(X_{\psi, g_{i,t}} X_{\psi, g_{j,t}}\right) &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} + (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) \left[ (t_H - s)^{(-1)} \right]_0^{g_{i,t}} \\
 &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} + (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) \left( (t_H - g_{i,t})^{(-1)} - t_H^{(-1)} \right).
 \end{aligned} \tag{A12.6}$$

Vereinfachungen unter Aufhebung der Annahme  $g_{i,t} < g_{j,t}$  ergeben:

$$\begin{aligned}
 E\left(X_{\psi, g_{i,t}} X_{\psi, g_{j,t}}\right) &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} \\
 &+ (t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t}) \left( (t_H - \min(g_{i,t}, g_{j,t}))^{(-1)} - t_H^{(-1)} \right) \\
 &= \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2} \\
 &+ (t_H - \max(g_{i,t}, g_{j,t})) - \frac{(t_H - g_{i,t})(t_H - g_{j,t})}{t_H} \\
 &= \frac{\beta_{\psi, t_H}^2 g_{i,t} g_{j,t} + t_H^2 \min(g_{i,t}, g_{j,t}) - t_H g_{i,t} g_{j,t}}{t_H^2}.
 \end{aligned} \tag{A12.7}$$

<sup>1046</sup> Vgl. B. Øksendal (2003), Stochastic differential equations, S. 26, Lemma 3.1.5.

Fortsetzung von Anlage 12:

Ausklammern liefert abschließend:

$$E\left(X_{\psi, g_{i,t}} X_{\psi, g_{j,t}}\right) = \frac{\beta_{\psi, t_H}^2 g_{i,t} g_{j,t} + t_H \min(g_{i,t}, g_{j,t}) (t_H - \max(g_{i,t}, g_{j,t}))}{t_H^2}. \quad (3.117)$$

Für den Spezialfall des Erwartungswertes einer quadrierten BROWNSche Brücke

$$X_{\psi, g_{i,t}}^2 = \beta_{\psi, t_H}^2 \frac{g_{i,t}^2}{t_H^2} + 2\beta_{\psi, t_H} \frac{g_{i,t}}{t_H} (t_H - g_{i,t}) \int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s} + (t_H - g_{i,t})^2 \left( \int_0^{g_{i,t}} \frac{dB_s}{t_H - s} \right)^2 \quad (A12.8)$$

erhält man:

$$E\left(X_{\psi, g_{i,t}}^2\right) = \frac{\beta_{\psi, t_H}^2 g_{i,t}^2 + t_H g_{i,t} (t_H - g_{i,t})}{t_H^2}. \quad (A12.9)$$

### Anlage 13: Kreditrisikomodell nach HULL & WHITE

Das Modell nach HULL & WHITE ist ein zeitdiskretes Modell.<sup>1047</sup> Zunächst ist eine beliebige Zeitachse in  $n-1$  diskrete Zeitabschnitte von nicht notwendigerweise identischer Intervalllänge aufzuteilen:<sup>1048</sup>

$$\Delta t_j = t_j - t_{j-1} \quad \forall \quad j = 1, \dots, n. \quad (\text{A13.1})$$

Ein Kreditausfall kann ausschließlich zu den diskreten Zeitpunkten  $t_j$  erfasst werden. Dazu bedienen sich HULL & WHITE Standard-WIENER-Prozesse  $W_i(t)$  in Verbindung mit kredit-spezifischen (ratingspezifischen) diskreten Mengen von Punkten  $K_{i,j}$ , die als zeitdiskrete Ausfallschranken zu interpretieren sind. Erreicht oder durchschlägt der Standard-WIENER-Prozess  $W_i(t)$  in einem Zeitpunkt  $t_j$  den zugehörigen Punkt  $K_{i,j}$ , dann ist der Kredit  $i$  ausgefallen.

Für den ersten diskreten Zeitpunkt  $t_1$  ist das Modell unproblematisch. Sei  $K_{i,1}$  bekannt, dann ist unter Berücksichtigung der Normalverteilung der Ausprägung  $w_{i,t_1}$  des Standard-WIENER-Prozesses  $W_i(t)$  in  $t_1$  die Ausfallwahrscheinlichkeit gegeben durch:

$$p_{i,t_1} = \int_{-\infty}^{K_{i,1}} f_{NV,i,1}(u) du = F_{SN} \left( \frac{K_{i,1}}{\sqrt{\Delta t_1}} \right), \quad (\text{A13.2})$$

mit :

$$f_{NV,i,1}(w_{i,1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_1}} \exp \left( -\frac{w_{i,1}^2}{2\Delta t_1} \right). \quad (\text{A13.3})$$

Wird umgekehrt die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t_1}$  vorgegeben, dann kann der dazugehörige Punkt  $K_{i,1}$  der Ausfallschranke angegeben werden:

$$K_{i,1} = \sqrt{\Delta t_1} \cdot F_{SN}^{-1} \left( p_{i,t_1} \right). \quad (\text{A13.4})$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p_{i,t_1}$  lässt sich basierend auf den Credit Curves gem. (3.8) berechnen. Im Vergleich mit einer zeitstetigen (zeitvariablen) Ausfallschranke spiegelt sich demzufolge eine zeitraumbezogene Ausfallwahrscheinlichkeit in dem einzelnen Punkt  $K_{i,1}$  in  $t_1$  wider. Für ein hinreichend feines Zeitgitter sind die zeitstetige und die zeitdiskrete Ausfallschranke einander sehr ähnlich.

<sup>1047</sup> Vgl. hierzu und zum Folgenden J. Hull und A. White (2001), Valuing credit default swaps II, S. 13 f.

<sup>1048</sup> I. d. R. wird zur praktischen Umsetzung ein äquidistantes Zeitgitter verwendet werden.

Fortsetzung von Anlage 13:

Wesentlich komplizierter stellt sich die Kalibrierung der Punkte der Ausfallschranke in allen nachfolgenden diskreten Zeitpunkten dar. Ausgangspunkt bilden die marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t_j+\Delta t_j|t_j}$  für  $j > 1$  gem. (3.9). Das heißt, es werden die Wahrscheinlichkeiten dafür betrachtet, dass der Kredit  $i$  im Zeitintervall  $\Delta t_j$  ausfällt, unter der Bedingung, dass der Kredit  $i$  bis zum Zeitpunkt  $t_j$  überlebt hat.

Betrachtet wird nun eine beliebige Ausprägung  $w_{i,t_j}$  des Standard-WIENER-Prozesses  $W_i(t)$  im diskreten Zeitpunkt  $t_j$ . Weiterhin sei eine mögliche Ausprägung  $w_{i,t_{j-1}}$  des Standard-WIENER-Prozesses  $W_i(t)$  im vorhergehenden diskreten Zeitpunkt  $t_j$  angenommen. Für  $j=2$  ergibt sich die Dichte für  $w_{i,t_1} \vee w_{i,t_2}$  durch Multiplikation der Dichte  $f_{NV,i,1}$  an der Stelle  $w_{i,t_1}$  und der Dichtefunktion der Normalverteilung unter Berücksichtigung des Erwartungswertes  $w_{i,t_1}$  sowie der Varianz  $\Delta t_2$  an der Stelle  $w_{i,t_2}$ :

$$f(W_{i,1} = w_{i,1}, w_{i,2} = w_{i,2}) = f_{i,1}(w_{i,1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_2}} \exp\left(-\frac{(w_{i,2} - w_{i,1})^2}{2\Delta t_2}\right)$$

mit :

$$f_{i,1}(w_{i,1}) = f_{NV,i,1}(w_{i,1}). \quad (\text{A13.5})$$

Werden nun alle Ausprägungen  $w_{i,t_j}$  oberhalb des Punktes  $K_{i,1}$  der Ausfallschranke betrachtet, dann erhält man:

$$f_{i,2}(W_{i,2} = w_{i,2}, W_{i,1} > K_{i,1}) = \int_{K_{i,1}}^{\infty} f_{i,1}(u) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_2}} \exp\left(-\frac{(w_{i,2} - u)^2}{2\Delta t_2}\right) du. \quad (\text{A13.6})$$

Die Funktion (A13.6) lässt sich in allgemeiner Form für alle  $j=2, \dots, n$  schreiben. Gegebene Werte für  $K_{i,j}$  vorausgesetzt, erhält man:

$$f_{i,j}(W_{i,j} = w_{i,j}, W_{i,j-1} > K_{i,j-1}, W_{i,j-2} > K_{i,j-2}, \dots, W_{i,1} > K_{i,1}) =$$

$$\int_{K_{i,j-1}}^{\infty} f_{i,j-1}(u, W_{i,j-2} > K_{i,j-2}, \dots, W_{i,1} > K_{i,1}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_j}} \exp\left(-\frac{(w_{i,j} - u)^2}{2\Delta t_j}\right) du \quad (\text{A13.7})$$

für :

$j > 1.$

Fortsetzung von Anlage 13:

Durch Integration von (A13.7) bis zu den jeweiligen Punkten  $K_{i,j}$  der Ausfallschranke erhält man die marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t_j+\Delta t_j|t_j}$ :

$$\begin{aligned}
 & p_{i,t_j+\Delta t_j|t_j} \\
 &= \Pr \left[ W_{i,j} \leq K_{i,j}, W_{i,j-1} > K_{i,j-1}, W_{i,j-2} > K_{i,j-2}, \dots, W_{i,1} > K_{i,1} \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{K_{i,j}} f_{i,j} \left( u, W_{i,j-1} > K_{i,j-1}, W_{i,j-2} > K_{i,j-2}, \dots, W_{i,1} > K_{i,1} \right) du \quad (\text{A13.8}) \\
 &\text{für :} \\
 &j > 1.
 \end{aligned}$$

Einsetzen von (A13.7) in (A13.8) liefert:

$$\begin{aligned}
 p_{i,t_j+\Delta t_j|t_j} &= \int_{-\infty}^{K_{i,j}} \int_{K_{i,j-1}}^{\infty} f_{i,j-1}(u, \dots) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_j}} \exp\left(-\frac{(s-u)^2}{2\Delta t_j}\right) du \cdot ds \\
 &= \int_{K_{i,j-1}}^{\infty} f_{i,j-1}(u, \dots) \cdot \left[ \int_{-\infty}^{K_{i,j}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t_j}} \exp\left(-\frac{(s-u)^2}{2\Delta t_j}\right) ds \right] \cdot du \quad (\text{A13.9}) \\
 &= \int_{K_{i,j-1}}^{\infty} f_{i,j-1}(u, \dots) \cdot F_{SN}\left(\frac{K_{i,j}-u}{\sqrt{\Delta t_j}}\right) \cdot du.
 \end{aligned}$$

Bei Vorgabe der marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten  $p_{i,t_j+\Delta t_j|t_j}$  kann mit iterativen Verfahren auf die Punkte  $K_{i,j}$  der zeitdiskreten Ausfallschranke geschlossen werden.

Nachteilig ist, dass der Ansatz von HULL & WHITE schwer implementierbar ist. Die Integrale in (A13.7) und (A13.9) bedürfen einer numerischen Auswertung. Je mehr Zeitschritte verwendet werden, je höher sind die Dimensionen der auszuwertenden Integrale. Zudem sind iterative Verfahren zur Ermittlung der Ausfallschranke bei gegebenen marginalen Ausfallwahrscheinlichkeiten in (A13.9) rechentechnisch zeitintensiv und fehleranfällig. Approximationsfehler im Rahmen der Iterationsverfahren und der numerischen Auswertung der Integrale multiplizieren sich durch das iterative Einsetzen der bedingten Dichten in (A13.7). Angewendet auf die Credit Curves in Abb. 3-3 und Abb. 3-4 zeigt das Verfahren nach HULL & WHITE Schwächen bezüglich der Kalibrierung der Ausfallschranken, insbesondere für Kredite mit geringer bzw. geringster Bonität.<sup>1049</sup>

<sup>1049</sup> Für "CCC"-geratete Kredite konnte keine zeitvariable Ausfallschranke aufgrund des angesprochenen Multiplikatoreffektes der Approximationsfehler angepasst werden.

**Anlage 14: Beispiel eines Produktraumes anhand eines diskretisierten Zins- und Ausfallindikatorprozesses**

Betrachtet wird ein fixer Zeithorizont  $T=3$  sowie die diskreten Zeitpunkte  $t=0,1$  und 2. Sei  $\{r_t\}_{t=0,1,2}$  ein diskretisierter Prozess für den (Spot-)Zinssatz und  $\{I_t\}_{t=0,1,2}$  mit  $I_t = 1_{\{\tau \leq t\}}$  ein diskretisierter Ausfallindikatorprozess. Die Prozesse seien auf den gefilterten messbaren Räumen  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2})$  und  $(\hat{\Omega}, (\hat{\mathcal{F}}_t)_{t=0,1,2})$  definiert, mit:

$$\Omega = \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \text{ und } \hat{\Omega} = \{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \hat{w}_3\}, \quad (\text{A14.1})$$

sowie:

$$F_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad (\text{A14.2})$$

$$F_1 = \{\emptyset, \Omega, \{w_1, w_2\}, \{w_3, w_4\}\}, \quad (\text{A14.3})$$

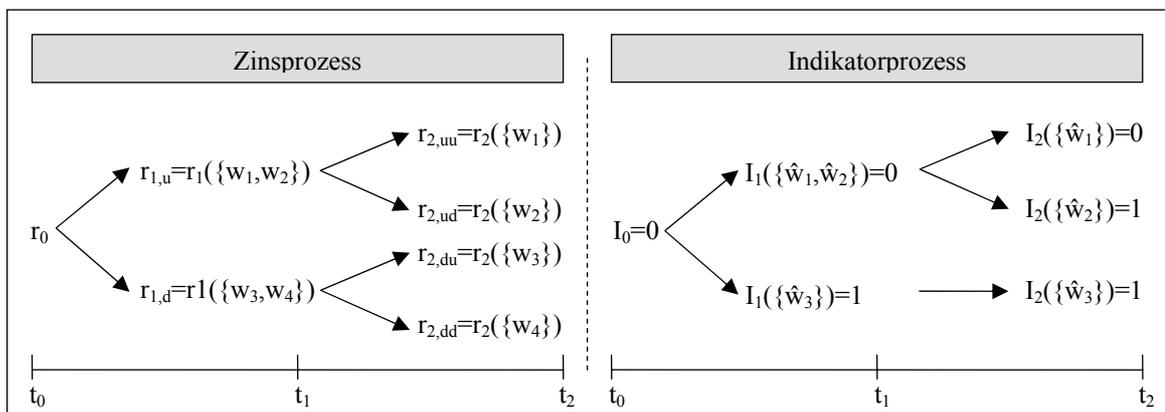
$$F_2 = \{\emptyset, \Omega, \{w_1\}, \{w_2\}, \{w_3\}, \{w_4\}, \{w_1\}^c, \{w_2\}^c, \{w_3\}^c, \{w_4\}^c, \\ \{w_1\} \cup \{w_2\}, \{w_1\} \cup \{w_3\}, \{w_1\} \cup \{w_4\}, \\ \{\{w_1\} \cup \{w_2\}\}^c, \{\{w_1\} \cup \{w_3\}\}^c, \{\{w_1\} \cup \{w_4\}\}^c\}, \quad (\text{A14.4})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_0 = \{\emptyset, \hat{\Omega}\}, \quad (\text{A14.5})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_1 = \{\emptyset, \hat{\Omega}, \{\hat{w}_1, \hat{w}_2\}, \{\hat{w}_3\}\}, \quad (\text{A14.6})$$

$$\hat{\mathcal{F}}_2 = \{\emptyset, \hat{\Omega}, \{\hat{w}_1\}, \{\hat{w}_2\}, \{\hat{w}_3\}, \{\hat{w}_1\}^c, \{\hat{w}_2\}^c, \{\hat{w}_3\}^c\}. \quad (\text{A14.7})$$

Die Zufallsvariablen  $r_t$  und  $I_t$  nehmen, anhand von Prozessbäumen betrachtet, die folgenden Werte an:



**Abb. A - 5: Zins- und Ausfallindikatorprozessbaum**

Fortsetzung von Anlage 14:

Das Produkt der beiden Zustandsräume  $\Omega$  und  $\hat{\Omega}$  gem. (A14.1) sieht wie folgt aus:

$$\Omega' = \Omega \times \hat{\Omega} = \left\{ \begin{array}{lll} (w_1, \hat{w}_1), & (w_1, \hat{w}_2), & (w_1, \hat{w}_3), \\ (w_2, \hat{w}_1), & (w_2, \hat{w}_2), & (w_2, \hat{w}_3), \\ (w_3, \hat{w}_1), & (w_3, \hat{w}_2), & (w_3, \hat{w}_3), \\ (w_4, \hat{w}_1), & (w_4, \hat{w}_2), & (w_4, \hat{w}_3). \end{array} \right\}. \quad (\text{A14.8})$$

Exemplarisch soll auf der Produktmenge  $\Omega'$  eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}'_1$  so definiert werden, dass Abbildungen der Form  $\xi_1: \Omega \times \hat{\Omega} \rightarrow \Omega$  und  $\xi_2: \Omega \times \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\Omega}$  gerade noch  $\mathcal{F}'_1$ - $\mathcal{F}_1$ - bzw.  $\mathcal{F}'_1$ - $\hat{\mathcal{F}}_1$ -messbar sind. Dazu sind gem. (5.28) und (5.29) Teilmengen der Form

$$\xi_1^{-1}(A_1) = \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : w \in A_1\} \quad \text{mit} \quad A_1 \in \mathcal{F}_1 \quad \text{und} \quad (\text{A14.9})$$

$$\xi_2^{-1}(A_2) = \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : \hat{w} \in A_2\} \quad \text{mit} \quad A_2 \in \hat{\mathcal{F}}_1 \quad (\text{A14.10})$$

zu konstruieren. Für (A14.9) erhält man:

$$\xi_1^{-1}(\emptyset) = \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : w \in \emptyset\} = \{\emptyset\}, \quad (\text{A14.11})$$

$$\xi_1^{-1}(\Omega) = \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : w \in \Omega\} = \{\Omega'\}, \quad (\text{A14.12})$$

$$\begin{aligned} \xi_1^{-1}(\{w_1, w_2\}) &= \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : w \in \{w_1, w_2\}\} \\ &= \{(w_1, \hat{w}_1) \dots (w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_1) \dots (w_2, \hat{w}_3)\}, \end{aligned} \quad (\text{A14.13})$$

$$\begin{aligned} \xi_1^{-1}(\{w_3, w_4\}) &= \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : w \in \{w_3, w_4\}\} \\ &= \{(w_3, \hat{w}_1) \dots (w_3, \hat{w}_3), (w_4, \hat{w}_1) \dots (w_4, \hat{w}_3)\}. \end{aligned} \quad (\text{A14.14})$$

Für (A14.10) erhält man:

$$\xi_2^{-1}(\emptyset) = \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : \hat{w} \in \emptyset\} = \{\emptyset\}, \quad (\text{A14.15})$$

$$\xi_2^{-1}(\hat{\Omega}) = \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : \hat{w} \in \hat{\Omega}\} = \{\Omega'\}, \quad (\text{A14.16})$$

$$\begin{aligned} \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_1, \hat{w}_2\}) &= \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : \hat{w} \in \{\hat{w}_1, \hat{w}_2\}\} \\ &= \{(w_1, \hat{w}_1) \dots (w_4, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2) \dots (w_4, \hat{w}_2)\}, \end{aligned} \quad (\text{A14.17})$$

$$\begin{aligned} \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_3\}) &= \{(w, \hat{w}) \in \Omega \times \hat{\Omega} : \hat{w} \in \{\hat{w}_3\}\} \\ &= \{(w_1, \hat{w}_3) \dots (w_4, \hat{w}_3)\}. \end{aligned} \quad (\text{A14.18})$$

Fortsetzung von Anlage 14:

Das Erzeugendensystem, bestehend aus den Mengen (A14.11) bis (A14.18), ist nicht durchschnittsstabil. Daher werden paarweise die folgenden Schnittmengen gebildet:

$$\begin{aligned}
 & \xi_1^{-1}(\emptyset) \cap \xi_2^{-1}(\emptyset) \\
 &= \xi_1^{-1}(\emptyset) \cap \xi_2^{-1}(\hat{\Omega}) = \xi_1^{-1}(\emptyset) \cap \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_1, \hat{w}_2\}) = \xi_1^{-1}(\emptyset) \cap \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_3\}) \\
 &= \xi_1^{-1}(\Omega) \cap \xi_2^{-1}(\emptyset) = \xi_1^{-1}(\{w_1, w_2\}) \cap \xi_2^{-1}(\emptyset) = \xi_1^{-1}(\{w_3, w_4\}) \cap \xi_2^{-1}(\emptyset) \\
 &= \{\emptyset\},
 \end{aligned} \tag{A14.19}$$

$$\xi_1^{-1}(\Omega) \cap \xi_2^{-1}(\hat{\Omega}) = \Omega', \tag{A14.20}$$

$$\xi_1^{-1}(\Omega) \cap \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_1, \hat{w}_2\}) = \{(w_1, \hat{w}_1) \dots (w_4, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2) \dots (w_4, \hat{w}_2)\}, \tag{A14.21}$$

$$\xi_1^{-1}(\Omega) \cap \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_3\}) = \{(w_1, \hat{w}_3) \dots (w_4, \hat{w}_3)\}, \tag{A14.22}$$

$$\xi_1^{-1}(\{w_1, w_2\}) \cap \xi_2^{-1}(\hat{\Omega}) = \{(w_1, \hat{w}_1) \dots (w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_1) \dots (w_2, \hat{w}_3)\}, \tag{A14.23}$$

$$\xi_1^{-1}(\{w_3, w_4\}) \cap \xi_2^{-1}(\hat{\Omega}) = \{(w_3, \hat{w}_1) \dots (w_3, \hat{w}_3), (w_4, \hat{w}_1) \dots (w_4, \hat{w}_3)\}, \tag{A14.24}$$

$$\xi_1^{-1}(\{w_1, w_2\}) \cap \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_1, \hat{w}_2\}) = \{(w_1, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2), (w_2, \hat{w}_1), (w_2, \hat{w}_2)\}, \tag{A14.25}$$

$$\xi_1^{-1}(\{w_1, w_2\}) \cap \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_3\}) = \{(w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_3)\}, \tag{A14.26}$$

$$\xi_1^{-1}(\{w_3, w_4\}) \cap \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_1, \hat{w}_2\}) = \{(w_3, \hat{w}_1), (w_3, \hat{w}_2), (w_4, \hat{w}_1), (w_4, \hat{w}_2)\}, \tag{A14.27}$$

$$\xi_1^{-1}(\{w_3, w_4\}) \cap \xi_2^{-1}(\{\hat{w}_3\}) = \{(w_3, \hat{w}_3), (w_4, \hat{w}_3)\}. \tag{A14.28}$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass das Erzeugendensystem  $\mathcal{C}$ , bestehend aus den Mengen (A14.19) bis (A14.28), durchschnittsstabil ist. Um ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $(\Omega', \mathcal{F}_1')$  mit  $\mathcal{F}_1' = \sigma(\mathcal{C})$  zu definieren, kann ein möglicher Kandidat zunächst auf dem einfacher zu handhabenden Erzeugendensystem  $\mathcal{C}$  mit einer offensichtlichen Funktion festgelegt und anschließend auf  $\sigma(\mathcal{C})$  erweitert werden. Sofern das Wahrscheinlichkeitsmaß existiert, ist es aufgrund der Durchschnittsstabilität von  $\mathcal{C}$  eindeutig. Die einfachere Handhabbarkeit von  $\mathcal{C}$  wird im vorliegenden Beispiel insbes. daran deutlich, dass den Teilmengen (A14.21) bis (A14.28) prägnante Interpretationen zukommen. Den Teilmengen (A14.21) bis (A14.24) lassen sich Ereignisse in den separaten Prozessbäumen von  $\{r_t\}_{t=0,1,2}$  und  $\{I_t\}_{t=0,1,2}$  (vgl. Abb. A - 5) zuordnen. In Reihenfolge erkennt man die Ereignisse „Kredit überlebt“, „Kredit fällt aus“, „Zinssatz steigt“ und „Zinssatz fällt“. Die Mengen (A14.25) bis (A14.28) repräsentieren Knotenpunkte im gemeinsamen Prozessbaum

Fortsetzung von Anlage 14:

(vgl. Abb. A - 6). Die  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{F}'_1 = \sigma(\mathcal{C})$  enthält darüber hinaus weitere, jedoch wesentlich komplizierter zu behandelnde Ereignisse. Beispiele sind die Ereignisse „Kredit überlebt bei fallendem Zinssatz oder Kredit fällt aus bei steigendem Zinssatz“ und „Kredit überlebt bei steigendem Zinssatz oder Kredit fällt aus bei fallendem Zinssatz“:<sup>1050</sup>

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'_1 = & \{ \emptyset, \Omega', \\
 & \{(w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_3)\}, \{(w_3, \hat{w}_3), (w_4, \hat{w}_3)\}, & (i) \\
 & \{(w_1, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2), (w_2, \hat{w}_1), (w_2, \hat{w}_2)\}, & (i) \\
 & \{(w_3, \hat{w}_1), (w_3, \hat{w}_2), (w_4, \hat{w}_1), (w_4, \hat{w}_2)\}, & (i) \\
 & \{(w_1, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2), (w_2, \hat{w}_1), (w_2, \hat{w}_2)\} \cup \{(w_3, \hat{w}_1), (w_3, \hat{w}_2), (w_4, \hat{w}_1), (w_4, \hat{w}_2)\}, & (ii) \\
 & \{ \{(w_1, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2), (w_2, \hat{w}_1), (w_2, \hat{w}_2)\} \cup \{(w_3, \hat{w}_1), (w_3, \hat{w}_2), (w_4, \hat{w}_1), (w_4, \hat{w}_2)\} \}^c, & (iii) \\
 & \{(w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_3)\} \cup \{(w_1, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2), (w_2, \hat{w}_1), (w_2, \hat{w}_2)\}, & (iv) \\
 & \{ \{(w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_3)\} \cup \{(w_1, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2), (w_2, \hat{w}_1), (w_2, \hat{w}_2)\} \}^c, & (v) \\
 & \{(w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_3)\} \cup \{(w_3, \hat{w}_1), (w_3, \hat{w}_2), (w_4, \hat{w}_1), (w_4, \hat{w}_2)\}, & (vi) \\
 & \{ \{(w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_3)\} \cup \{(w_3, \hat{w}_1), (w_3, \hat{w}_2), (w_4, \hat{w}_1), (w_4, \hat{w}_2)\} \}^c, & (vii) \\
 & \{(w_1, \hat{w}_3), (w_2, \hat{w}_3)\}^c, \{(w_3, \hat{w}_3), (w_4, \hat{w}_3)\}^c, & (viii) \\
 & \{(w_1, \hat{w}_1), (w_1, \hat{w}_2), (w_2, \hat{w}_1), (w_2, \hat{w}_2)\}^c, & (viii) \\
 & \{(w_3, \hat{w}_1), (w_3, \hat{w}_2), (w_4, \hat{w}_1), (w_4, \hat{w}_2)\}^c \}. & (viii)
 \end{aligned}
 \tag{A14.29}$$

Der gemeinsame Prozessbaum zur Produkt-Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t=0,1,2}$  sieht wie folgt aus:

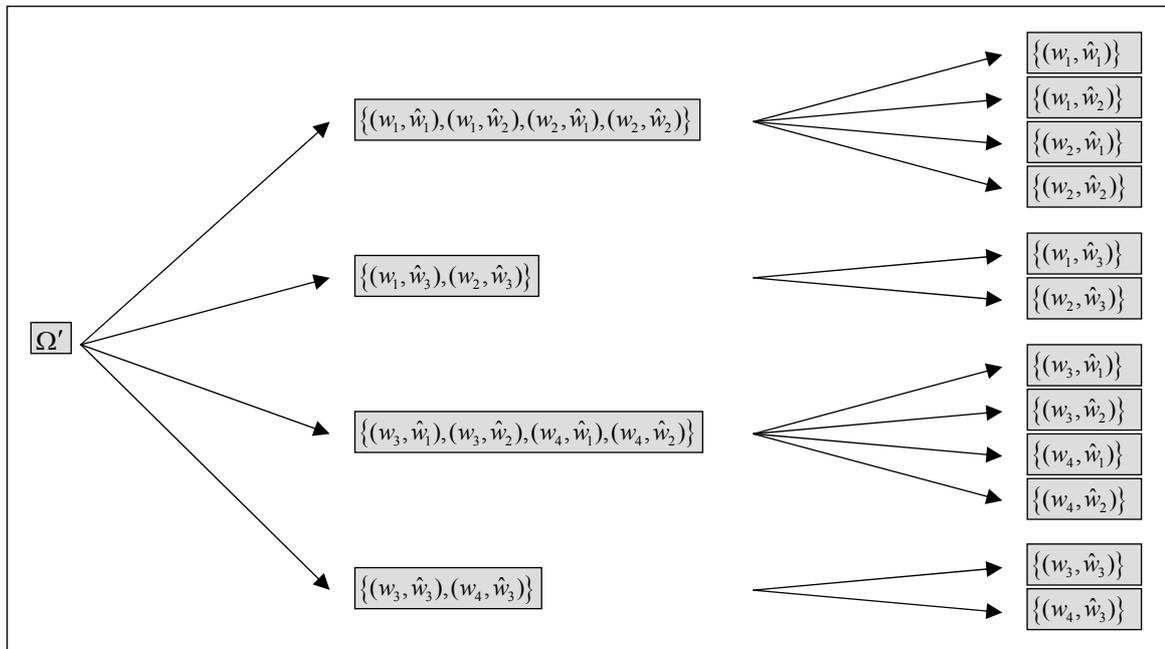


Abb. A - 6: Erweiterter (gemeinsamer) Prozessbaum

<sup>1050</sup> (i) Knoten, (ii) Kredit überlebt, (iii) Kredit fällt aus, (iv) Zinssatz steigt, (v) Zinssatz fällt, (vi) Kredit überlebt bei fallendem Zinssatz oder Kredit fällt aus bei steigendem Zinssatz, (vii) Kredit überlebt bei steigendem Zinssatz oder Kredit fällt aus bei fallendem Zinssatz, (viii) Komplementäre der Knoten.

**Anlage 15: Bootstrapping von Hazard Rate-Funktionen unter Berücksichtigung aufgelaufener Risikoprämienanteile**

Ausgangsbasis bilden die Gleichungen (5.93), (5.96) und (5.97) zum Bootstrapping von abschnittsweise konstanten Hazard Rate-Funktionen ohne Berücksichtigung aufgelaufener Risikoprämienanteile. Da der Protection Seller bei nachschüssiger Prämienzahlung im Falle eines Kreditereignisses unmittelbar vor einem oder im vereinbarten Zahlungszeitpunkt  $t_{i,j}$  einen Prämienanteil entsprechend des besicherten Zeitabschnittes  $[t_{i,j-1}, \tau_{FP,i}]$  erhält, sind die Gleichungen einer Modifikation zu unterziehen. Insbesondere ist das Premium Leg um aufgelaufene Prämienanteile zu ergänzen. Dazu wird in Analogie zur Vorgehensweise im Rahmen des Protection Legs die Zeitachse diskretisiert und in Abhängigkeit des jeweils betrachteten Zeitpunkts  $T_{CDS,j-1} + (T_{CDS,j} - T_{CDS,j-1}) \cdot k / v_j$  ein Prämienanteil modelliert:

$$RP_{CDS,i}^{j,k} = \Delta t_{i,j^*} \cdot RP_{CDS,i} \cdot \frac{\Delta t_{i,j^*} - \left( t_{i,j^*} - \left( T_{CDS,j-1} + \frac{T_{CDS,j} - T_{CDS,j-1}}{v_j} \cdot k \right) \right)}{\Delta t_{i,j^*}}. \quad (5.98)$$

Dabei stellt  $t_{i,j^*}$  jeweils den unmittelbar nachfolgenden Zahlungstermin dar. Erneut wird danach unterschieden, ob die Prämienzahlungszeitpunkte vor oder nach dem Fälligkeitszeitpunkt  $T_{CDS,i-1}$  des unmittelbar kürzer laufenden CDS anfallen. Gleichung (5.93) hat nun die folgende Form:

$$Premium-Leg' = Premium-Leg + \quad (A15.1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} RP_{CDS,i}^{j,k} \cdot B \left( 0, T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k \right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{j-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]} \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot (k-1)} \\ & - \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} RP_{CDS,i}^{j,k} \cdot B \left( 0, T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k \right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{j-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]} \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k} \\ & + \sum_{k=1}^{v_i} RP_{CDS,i}^{i,k} \cdot B \left( 0, T_{CDS,i-1} + \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot k \right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]} \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot (k-1)} \\ & - \sum_{k=1}^{v_i} RP_{CDS,i}^{i,k} \cdot B \left( 0, T_{CDS,i-1} + \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot k \right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]} \frac{\Delta T_{CDS,i}}{v_i} \cdot k} \end{aligned}$$

Fortsetzung von Anlage 15:

Wie zuvor lässt sich  $h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]}$  explizit nur dann ermitteln, wenn  $m^*=m$  und  $v_i=1$  gelten. Anstelle der Gleichung (5.96) erhält man nun:

$$h_{[T_{CDS,i-1}, T_{CDS,i}]} = -\frac{1}{\Delta T_{CDS,i}} \ln \frac{\chi' + \alpha' - \gamma'}{\beta'} \quad (\text{A15.2})$$

mit :

$$\alpha' = \alpha,$$

$$\beta' = \beta - B(0, T_{CDS,i}) \cdot RP_{CDS,i} \cdot \Delta t_{i,m} \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \cdot \Delta T_{CDS,n}},$$

$$\gamma' = \gamma + B(0, T_{CDS,i}) \cdot RP_{CDS,i} \cdot \Delta t_{i,m} \cdot e^{-\sum_{n=1}^{i-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \cdot \Delta T_{CDS,n}},$$

$$\chi' = \chi$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} RP_{CDS,i}^{j,k} \cdot B\left(0, T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k\right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{j-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \cdot \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]} \cdot \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k}$$

$$- \sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=1}^{v_j} RP_{CDS,i}^{j,k} \cdot B\left(0, T_{CDS,j-1} + \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot k\right) \cdot e^{-\sum_{n=1}^{j-1} h_{[T_{CDS,n-1}, T_{CDS,n}]} \cdot \Delta T_{CDS,n} - h_{[T_{CDS,j-1}, T_{CDS,j}]} \cdot \frac{\Delta T_{CDS,j}}{v_j} \cdot (k-1)}.$$

Für den ersten Zeitabschnitt, basierend auf dem CDS-Kontrakt mit der kürzesten Restlaufzeit  $T_{CDS,1}$ , vereinfacht sich (A15.2) zu:

$$h_{[0, T_{CDS,1}]} = -\frac{1}{T_{CDS,1}} \cdot \ln \frac{1 - \delta_1 - T_{CDS,1} \cdot RP_{CDS,1}}{1 - \delta_1}. \quad (\text{A15.3})$$

Der Bruch innerhalb der Logarithmusfunktion von (A15.3) ist, abgesehen vom Vorzeichenwechsel vor der Risikoprämie, das Reziproke des entsprechenden Bruchs aus Gleichung (5.97). Die Ursache liegt darin begründet, dass unter den getroffenen Vereinfachungen  $m^*=m$  und  $v_i=1$  die Risikoprämie auf jeden Fall gezahlt wird und somit sicher ist. In (5.97) hingegen geht die Risikoprämie im Kreditereignisfall vollständig verloren. Äquivalent könnte barwertig eine vorschüssige Prämie gezahlt werden.

## Anlage 16: Historische durchschnittliche kumulative Ausfallhäufigkeiten

In %	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0,00	0,00	0,03	0,07	0,11	0,20	0,30	0,47	0,54	0,61
AA	0,01	0,03	0,08	0,17	0,28	0,42	0,61	0,77	0,90	1,06
A	0,05	0,15	0,30	0,48	0,71	0,94	1,19	1,46	1,78	2,10
BBB	0,36	0,96	1,61	2,58	3,53	4,49	5,33	6,10	6,77	7,60
BB	1,47	4,49	8,18	11,69	14,77	17,99	20,43	22,63	24,85	26,61
B	6,72	14,99	22,19	27,83	31,99	35,37	38,56	41,25	42,90	44,59
CCC	30,95	40,35	46,43	51,25	56,77	58,74	59,46	59,85	61,57	62,92
Inv.	0,13	0,34	0,59	0,93	1,29	1,65	1,99	2,33	2,64	2,99
Spec.	5,56	11,39	16,86	21,43	25,12	28,35	31,02	33,32	35,24	36,94
Gesamt	1,73	3,51	5,12	6,48	7,57	8,52	9,33	10,04	10,66	11,27

**Tab. A - 1: Historische Ø kumulative Ausfallhäufigkeiten nach STANDARD & POOR'S<sup>1051</sup>**

Ergebnisse der ständigen Analysen durch STANDARD & POOR'S. Erfasster Zeitraum: 1981-2002. Anzahl der gerateten Unternehmen: 9.931. Geographischer Beobachtungsraum: International.

In %	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Aaa	0,00	0,00	0,00	0,04	0,12	0,21	0,30	0,40	0,52	0,64
Aa	0,02	0,03	0,07	0,16	0,26	0,36	0,46	0,57	0,65	0,73
A	0,02	0,09	0,22	0,36	0,51	0,68	0,86	1,07	1,31	1,56
Baa	0,22	0,61	1,08	1,69	2,25	2,81	3,38	3,94	4,58	5,26
Ba	1,28	3,51	6,09	8,76	11,36	13,74	15,66	17,60	19,46	21,29
B	6,51	14,16	21,03	27,04	32,31	36,73	40,97	44,33	47,17	50,01
Caa-C	23,83	37,12	47,43	55,05	60,09	65,22	69,26	73,88	76,50	78,54
Inv.	0,08	0,24	0,45	0,72	0,98	1,25	1,52	1,81	2,13	2,47
Spec.	4,99	10,05	14,66	18,67	22,18	25,18	27,73	30,00	31,99	33,92
Gesamt	1,59	3,19	4,64	5,90	6,96	7,85	8,62	9,32	9,96	10,60

**Tab. A - 2: Historische Ø kumulative Ausfallhäufigkeiten nach MOODY'S<sup>1052</sup>**

Ergebnisse der ständigen Analysen durch MOODY'S. Erfasster Zeitraum: 1970-2002. Anzahl der gerateten Unternehmen: ca. 16.000. Geographischer Beobachtungsraum: International.

Im Jahr 2002 veröffentlichte MOODY'S erstmalig einen Ratings Performance Report für europäische Anleiheemittenten. Die Anzahl an Emittenten ist jedoch wesentlich geringer. Von insgesamt ca. 16.000 Emittenten hatten 1.585 ihren Sitz in Europa.<sup>1053</sup> Daher wird im Rahmen dieser Arbeit auf die Ergebnisse der globalen Studie zurückgegriffen.

<sup>1051</sup> Vgl. B. Brady, D. Vazza und R. Bos (2003), Corporate defaults, S. 7 (STANDARD & POOR'S Studie).

<sup>1052</sup> Vgl. D. Hamilton et al. (2003), Default & recovery rates, S. 38 (MOODY'S Studie).

<sup>1053</sup> Vgl. D. Hamilton et al. (2002), European default & recovery rates, S. 6 (MOODY'S Studie).

## Anlage 17: Adjustierte Generatoren basierend auf 1-jährigen Forward-Übergangsmatrizen

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,0723	0,0683	0,0021	0,0013	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000
AA	0,0064	-0,0953	0,0829	0,0042	0,0004	0,0012	0,0002	0,0000
AA	0,0005	0,0229	-0,0914	0,0620	0,0037	0,0016	0,0004	0,0003
BBB	0,0003	0,0019	0,0484	-0,1185	0,0536	0,0083	0,0031	0,0029
BB	0,0003	0,0008	0,0031	0,0693	-0,1911	0,0929	0,0140	0,0106
B	0,0000	0,0008	0,0030	0,0022	0,0632	-0,2030	0,0708	0,0631
CCC	0,0014	0,0000	0,0039	0,0078	0,0178	0,1449	-0,5852	0,4095
D	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

**Tab. A - 3: Adjustierte<sup>1054</sup> Generator-Matrix für den Zeitabschnitt [0,1]**

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,0681	0,0648	0,0017	0,0008	0,0007	0,0002	0,0000	0,0000
AA	0,0064	-0,0913	0,0797	0,0037	0,0005	0,0010	0,0000	0,0000
AA	0,0002	0,0257	-0,0921	0,0588	0,0048	0,0022	0,0001	0,0004
BBB	0,0008	0,0010	0,0570	-0,1222	0,0507	0,0073	0,0031	0,0023
BB	0,0000	0,0009	0,0013	0,0880	-0,2161	0,0889	0,0145	0,0225
B	0,0001	0,0007	0,0034	0,0000	0,0863	-0,2378	0,0399	0,1074
CCC	0,0009	0,0000	0,0038	0,0220	0,0050	0,1753	-0,3918	0,1847
D	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

**Tab. A - 4: Adjustierte Generator-Matrix für den Zeitabschnitt [1,2]**

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D
AAA	-0,0698	0,0681	0,0006	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003
AA	0,0071	-0,0896	0,0775	0,0041	0,0000	0,0007	0,0000	0,0003
AA	0,0000	0,0242	-0,0845	0,0506	0,0052	0,0038	0,0006	0,0001
BBB	0,0006	0,0007	0,0584	-0,1157	0,0467	0,0050	0,0043	0,0000
BB	0,0000	0,0012	0,0000	0,0985	-0,2207	0,0856	0,0101	0,0254
B	0,0006	0,0000	0,0060	0,0008	0,1007	-0,2651	0,0405	0,1166
CCC	0,0012	0,0000	0,0000	0,0000	0,0181	0,2457	-0,4395	0,1744
D	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

**Tab. A - 5: Adjustierte Generator-Matrix für den Zeitabschnitt [2,3]**

<sup>1054</sup> Einzelne Elemente abseits der Hauptdiagonalen der nicht-adjustierten Generatoren wiesen Werte kleiner als eins auf. Das weist auf Nicht-Stationarität des MARKOV-Prozesses hin. Vereinfachend werden hier alle negativen Elemente abseits der Hauptdiagonalen auf null gesetzt. Die Diagonalelemente werden entsprechend (3.14) adjustiert. Eine Neuberechnung der Übergangsmatrizen mit Hilfe der so „adjustierten“ Generatoren hat lediglich Fehler in der 4. Stelle nach dem Komma ergeben.



Fortsetzung von Anlage 18:

Korrelation	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %
1 <sup>st</sup> -to-Default	4,779 %	4,535 %	4,272 %	3,996 %	3,706 %	3,402 %	3,083 %
2 <sup>nd</sup> -to-Default	0,613 %	0,745 %	0,867 %	0,974 %	1,065 %	1,114 %	1,189 %
3 <sup>rd</sup> -to-Default	0,062 %	0,116 %	0,185 %	0,266 %	0,357 %	0,454 %	0,555 %
4 <sup>th</sup> -to-Default	0,004 %	0,014 %	0,033 %	0,065 %	0,110 %	0,172 %	0,251 %
5 <sup>th</sup> -to-Default	0,000 %	0,001 %	0,004 %	0,011 %	0,024 %	0,048 %	0,088 %

**Tab. A - 7: Faire Basket Credit Default Swap-Sätze auf der Basis des semi-analytischen Modelansatzes**

Die CDS-Prämienzahlungen erfolgen vierteljährlich und nachschüssig. Teilprämienzahlungen sind berücksichtigt. Kompensationszahlungen erfolgen unmittelbar im Zeitpunkt des Kreditereignisses. Die Recovery Rate beträgt einheitlich 15 % und bezieht sich auf den Nominalwert. Die Zinsstruktur ist flach und beträgt 5 % p. a. Das Jahr wurde in 365 Zeitabschnitte zerlegt. Die numerische Integration über den Faktor  $\Psi$  erfolgt über das Intervall  $[-6, +6]$  in 120 Teilschritten.

Zum Vergleich sind die fairen Swap-Sätze, wie sie von OVERBECK & SCHMIDT auf der Basis der Simulation ermittelt worden sind, in Tab. A - 8 abgetragen. Für Korrelationen bis 40 % liegt weitgehende Übereinstimmung vor. Für darüber hinausgehende – jedoch unrealistische – Korrelationen, macht sich die Unabhängigkeitsapproximation im Rahmen des Faktoransatzes mit BROWNSchen Brücken bemerkbar.<sup>1058</sup> Die Swap-Sätze werden für den 1<sup>st</sup>-to Default Swap leicht zu hoch und für den 5<sup>th</sup>-to Default Swap leicht zu niedrig ausgewiesen. Ursache ist der approximationsbedingte leichte Verlust an Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Kreditausfällen.

Korrelation	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %
1 <sup>st</sup> -to-Default	4,791 %	4,563 %	4,296 %	3,953 %	3,620 %	3,252 %	2,845 %
2 <sup>nd</sup> -to-Default	0,625 %	0,799 %	0,941 %	1,055 %	1,131 %	1,201 %	1,259 %
3 <sup>rd</sup> -to-Default	0,058 %	0,130 %	0,201 %	0,296 %	0,398 %	0,523 %	0,635 %
4 <sup>th</sup> -to-Default	0,003 %	0,015 %	0,040 %	0,076 %	0,126 %	0,202 %	0,306 %
5 <sup>th</sup> -to-Default	0,000 %	0,003 %	0,006 %	0,013 %	0,030 %	0,057 %	0,118 %

**Tab. A - 8: Faire Basket Credit Default Swap-Sätze auf der Basis der Simulation**

Die Zahlen wurden durch Overbeck & Schmidt<sup>1059</sup> mit Hilfe von jeweils 10.000 Simulationsläufen ermittelt. Genaue Spezifikationen der Basket Credit Default Swaps haben die beiden Autoren leider nicht angegeben und konnten nur vermutet werden.

<sup>1058</sup> Vgl. Abschnitt 356.

<sup>1059</sup> Vgl. L. Overbeck und W. Schmidt (2005), Modeling default dependence, S. 18, Exhibit 7.

**Anlage 19: Erwartete Tranchenverluste und erwartete Risikoprämienzahlungen bei einer flachen Zinsstruktur von null**

EUR	Erwartete Tranchenverluste				Erwartete Risikoprämienzahlungen			
Zeit	C	B	A	Basket	C	B	A	Basket
0,00	0	0	0	0	11.099	9.316	354	12.373
0,25	3.280	0	0	3.280	10.579	9.316	354	12.335
0,50	8.102	1	0	8.103	9.814	9.316	354	12.278
0,75	14.283	12	0	14.295	8.834	9.316	354	12.205
1,00	21.672	109	0	21.781	7.663	9.311	354	12.117
1,25	29.915	540	0	30.455	6.356	9.292	354	12.014
1,50	38.556	1.809	0	40.365	4.986	9.236	354	11.898
1,75	46.492	4.437	0	50.929	3.727	9.119	354	11.773
2,00	53.490	9.033	0	62.523	2.618	8.915	354	11.637
2,25	59.052	15.823	0	74.875	1.736	8.614	354	11.491
2,50	63.059	24.551	1	87.611	1.100	8.227	354	11.341
2,75	65.854	35.275	6	101.135	657	7.752	354	11.182
3,00	67.605	47.166	21	114.792	380	7.224	354	11.021
3,25	68.670	60.013	66	128.749	211	6.654	354	10.856
3,50	69.287	73.471	175	142.933	113	6.057	354	10.689
3,75	69.629	87.193	410	157.232	59	5.448	354	10.520
4,00	69.811	100.877	863	171.551	30	4.842	354	10.352
4,25	69.904	113.886	1.626	185.416	15	4.264	353	10.188
4,50	69.953	126.721	2.873	199.547	7	3.694	353	10.021
4,75	69.977	138.376	4.648	213.001	4	3.177	352	9.863
5,00	69.988	149.090	7.076	226.154	0	0	0	0
∑	---	---	---	---	69.988	149.090	7.076	226.154
∑	---	---	---	---	226.154			---

**Tab. A - 9: Erwartete Tranchenverluste und Risikoprämienzahlungen bei vorschüssiger Zahlungsweise und flacher Zinsstruktur von null (I)**

Referenzportfolio: 105 Kredite, NW=10.000 EUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung, Rating „BB“, Faktorsensitivität  $\rho=20\%$ . Zinsstruktur: flach i. H. v. null. Hazard Rate-Funktion: vgl. Tab. 5-6. Tranchen: (0 EUR, 70.000 EUR] (Tranche C), (70.000 EUR, 280.000 EUR] (Tranche B), (280.000 EUR, 1.050.000 EUR] (Tranche A). CDO-Transaktion: 5 Jahre Laufzeit, vierteljährliche vorschüssige Zahlungsweise. Angegeben sind die erwarteten Tranchenverluste sowie die erwarteten Risikoprämienzahlungen unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß.

Fortsetzung von Anlage 19:

EUR	Erwartete Tranchenverluste				Erwartete Risikoprämienzahlungen			
Zeit	B3	B2	B1	B	B3	B2	B1	B
0,00	0	0	0	0	5.563	3.281	1.366	9.316
0,25	0	0	0	0	5.563	3.281	1.366	9.316
0,50	0	0	0	1	5.563	3.281	1.366	9.316
0,75	12	0	0	12	5.562	3.281	1.366	9.316
1,00	109	0	0	109	5.554	3.281	1.366	9.311
1,25	538	2	0	540	5.520	3.281	1.366	9.292
1,50	1.793	16	0	1.809	5.420	3.280	1.366	9.236
1,75	4.356	80	1	4.437	5.217	3.277	1.366	9.119
2,00	8.726	303	4	9.033	4.869	3.267	1.366	8.915
2,25	14.908	894	21	15.823	4.378	3.239	1.366	8.614
2,50	22.348	2.126	77	24.551	3.787	3.181	1.365	8.227
2,75	30.659	4.379	237	35.275	3.126	3.076	1.361	7.752
3,00	38.756	7.803	606	47.166	2.483	2.915	1.354	7.224
3,25	46.180	12.491	1.343	60.013	1.893	2.696	1.341	6.654
3,50	52.536	18.298	2.637	73.471	1.388	2.423	1.315	6.057
3,75	57.646	24.877	4.670	87.193	982	2.116	1.275	5.448
4,00	61.539	31.777	7.561	100.877	672	1.792	1.218	4.842
4,25	64.303	38.364	11.219	113.886	454	1.483	1.147	4.264
4,50	66.300	44.652	15.770	126.721	294	1.188	1.058	3.694
4,75	67.610	50.017	20.749	138.376	191	937	961	3.177
5,00	68.478	54.557	26.055	149.090	0	0	0	0
$\Sigma$	---	---	---	---	68.479	54.556	26.055	149.090
$\Sigma$	---	---	---	---	149.090			---

**Tab. A - 10: Erwartete Tranchenverluste und Risikoprämienzahlungen bei vorschüssiger Zahlungsweise und einer flachen Zinsstruktur von null (II)**

Referenzportfolio: 105 Kredite, NW=10.000 EUR,  $\delta=30\%$ ,  $T=5$  Jahre, endfällige Tilgung, Rating „BB“, Faktorsensitivität  $\rho=20\%$ . Zinsstruktur: flach i. H. v. null. Hazard Rate-Funktion: vgl. Tab. 5-6. Tranchen: (70.000 EUR, 280.000 EUR] (Tranche B), (70.000 EUR, 140.000 EUR] (Tranche B3), (140.000 EUR, 210.000 EUR] (Tranche B2), (210.000 EUR, 280.000 EUR] (Tranche B1), CDO-Transaktion: 5 Jahre Laufzeit, vierteljährliche vorschüssige Zahlungsweise. Angegeben sind die erwarteten Tranchenverluste sowie die erwarteten Risikoprämienzahlungen unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß.

## Anlage 20: Die Kontingenztafel als LP-Problem

Für ein Portfolio mit drei Schuldtiteln ist ein LP-Modell mit 8 Veränderlichen (Elementarwahrscheinlichkeiten) aufzustellen. Neben der trivialen Anforderung, dass die Elementarwahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1 liegen, sind bei gegebenen (bivariaten) Randverteilungen 7 Nebenbedingungen zu beachten. Daraus resultiert ein Freiheitsgrad. Die Nebenbedingungen lassen sich wahlweise mit Hilfe der Ausfall- oder den Überlebenswahrscheinlichkeiten formulieren. In diesem Beispiel wird dem letzteren Weg gefolgt. Als Zielfunktion kommt prinzipiell jede der Elementarwahrscheinlichkeiten in Betracht. Hier wird die gemeinsame Überlebenswahrscheinlichkeit  $\pi_{000}$  maximiert bzw. minimiert:

Zielfunktion:

$$\boldsymbol{\pi}^t \cdot \mathbf{x} \rightarrow \text{Max! / Min!} \quad (\text{A20.1})$$

mit :

$$\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_8)^t,$$

$$\mathbf{x} = (1, 0, \dots, 0)^t,$$

$$\pi_1 = \pi_{000}, \pi_2 = \pi_{001}, \pi_3 = \pi_{010}, \dots, \pi_8 = \pi_{111}.$$

Nebenbedingungen in Form von Gleichungen (Randverteilungen):

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} \quad (\text{A20.2})$$

mit :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{p} = (\bar{p}_{j,k}, \bar{p}_{i,k}, \bar{p}_{i,j}, \bar{p}_k, \bar{p}_j, \bar{p}_i, 1)^t.$$

Nebenbedingungen in Form von Ungleichungen (Wertebereich der Wahrscheinlichkeiten):

$$\boldsymbol{\pi} \leq \mathbf{1}, \quad (\text{A20.3})$$

$$\boldsymbol{\pi} \geq \mathbf{0}. \quad (\text{A20.4})$$

## **Anlage 21: PROMISE-K 2001-1 PLC Information Memorandum (Auszüge)**

### THE NOTES

The following is the text of the Terms and Conditions applicable to each Class of Notes which will be attached to each Global Note. In case of any overlap or inconsistency in the definition of a term or expression in the Terms and Conditions and elsewhere in this Information Memorandum, the definition in the Terms and Conditions will prevail.

THE PAYMENT OF PRINCIPAL OF AND, DUE TO POTENTIAL PRINCIPAL REDUCTIONS, INTEREST ON THE NOTES IS CONDITIONAL UPON THE PERFORMANCE OF THE REFERENCE CLAIMS AS SET OUT IN SECTION 8 (LOSS ALLOCATION) AND SECTION 9 (UNJUSTIFIED LOSS ALLOCATION). THERE IS NO GUARANTEE THAT THE NOTEHOLDERS SHALL RECEIVE THE FULL PRINCIPAL AMOUNT OF THE NOTES AND INTEREST THEREON AND ULTIMATELY THE OBLIGATIONS OF THE ISSUER TO PAY PRINCIPAL UNDER THE NOTES COULD EVEN BE REDUCED TO EUR 1 PER NOTE AS A RESULT OF LOSSES INCURRED IN RESPECT OF THE REFERENCE CLAIMS. NEITHER THE NOTEHOLDERS NOR THE ISSUER SHALL HAVE ANY RIGHT TO OR INTEREST IN ANY REFERENCE CLAIM EVEN IN THE CASE THAT A REALISED LOSS IN RESPECT OF SUCH REFERENCE CLAIM HAS BEEN ALLOCATED TO THE NOTES IN ACCORDANCE WITH THE LOSS ALLOCATION. THE NOTES REPRESENT OBLIGATIONS OF THE ISSUER ONLY, AND DO NOT REPRESENT AN INTEREST IN OR OBLIGATIONS OF THE TRUSTEE, THE BANK, KFW OR ANY OF THEIR RESPECTIVE AFFILIATES OR ANY AFFILIATE OF THE ISSUER OR ANY OTHER THIRD PERSON OR ENTITY. NEITHER THE NOTES NOR THE REFERENCE CLAIMS WILL BE INSURED OR GUARANTEED BY ANY GOVERNMENTAL AGENCY OR INSTRUMENTALITY OR BY THE BANK, THE TRUSTEE OR KFW OR ANY OF THEIR RESPECTIVE AFFILIATES OR BY ANY OTHER PERSON OR ENTITY EXCEPT AS DESCRIBED HEREIN.

#### 1. Notes

##### 1.1 Principal Amounts; Definitions

PROMISE-K 2001-1 PLC, incorporated under the laws of Ireland as a public limited company with its registered office in Dublin, Ireland (the "Issuer") issues the following classes of credit linked notes in bearer form (each a "Class", and collectively, the "Notes") pursuant to these terms and conditions (the "Terms and Conditions"):

(a) Class A+ Floating Rate Credit Linked Notes (the "Class A+ Notes") which are issued in an initial aggregate principal amount of EUR 250,000 and divided into 25 Class A+ Notes, each having a principal amount of EUR 10,000,

(b) Class A Floating Rate Credit Linked Notes (the "Class A Notes") which are issued in an initial aggregate principal amount of EUR 10,000,000 and divided into 100 Class A Notes, each having a principal amount of EUR 100,000,

(c) Class B Floating Rate Credit Linked Notes (the "Class B Notes") which are issued in an initial aggregate principal amount of EUR 11,000,000 and divided into 110 Class B Notes, each having a principal amount of EUR 100,000,

(d) Class C Floating Rate Credit Linked Notes (the "Class C Notes") which are issued in an initial aggregate principal amount of EUR 26,500,000 and divided into 265 Class C Notes, each having a principal amount of EUR 100,000, and

(e) Class D Floating Rate Credit Linked Notes (the "Class D Notes") which are issued in an initial aggregate principal amount of EUR 10,000,000 and divided into 100 Class D Notes, each having a principal amount of EUR 100,000.

Terms used but not defined in the Terms and Conditions have the same meaning as in Appendix A, B or C attached hereto, each of which forms an integral part of the Terms and Conditions. The holders of the Notes are referred to as the "Noteholders".

## Fortsetzung von Anlage 21:

### 1.2 Global Notes

Each Class of Notes is initially represented by a temporary global bearer note (the "Temporary Global Note") without interest coupons. The Temporary Global Notes shall be exchangeable, as provided in Section 1.3 (Notes — Exchange of Temporary Global Notes) for permanent global bearer notes (each a "Permanent Global Note") without interest coupons representing each such Class. Each Permanent Global Note shall be kept in custody by The Chase Manhattan Bank London Branch or any successor as common depository for Euroclear Bank S.A./N.V. as operator of the Euroclear System ("Euroclear") and Clearstream Banking, société anonyme ("Clearstream, Luxembourg"), until all obligations of the Issuer under the Class represented by it have been satisfied.

Definitive Notes and interest coupons shall not be issued.

Each Permanent Global Note and each Temporary Global Note is also referred to herein as a "Global Note".

Copies of the form of the Global Notes are available free of charge at the specified offices of the Principal Paying Agent and the Luxembourg Intermediary.

### 1.3 Exchange of Temporary Global Notes

The Temporary Global Notes shall be exchanged for the Permanent Global Notes on a date (the "Exchange Date") not earlier than 40 calendar days and not later than 180 calendar days after the date of issue of the Temporary Global Notes upon delivery by the relevant Euroclear Participant or Clearstream, Luxembourg Participant to Euroclear or Clearstream, Luxembourg, as relevant, and by Euroclear or Clearstream, Luxembourg to the Principal Paying Agent, of certificates in the form which forms part of the Temporary Global Notes and are available from the Principal Paying Agent for such purpose, to the effect that the beneficial owner or owners of the Notes represented by the relevant Temporary Global Note is not a U.S. person or are not U.S. persons other than certain financial institutions or certain persons holding through such financial institutions. Each Permanent Global Note delivered in exchange for the relevant Temporary Global Note shall be delivered only outside of the United States. "United States" means, for the purposes of this Section 1.3, the United States of America (including the States thereof and the District of Columbia) and its possessions (including Puerto Rico, the U.S. Virgin Islands, Guam, American Samoa, Wake Island and the Northern Mariana Islands). Any exchange of a Temporary Global Note pursuant to this Section 1.3 shall be made free of charge to the Noteholders.

### 1.4 Execution

Each Global Note is manually signed by or on behalf of the Issuer.

## 2. Rights and Obligations under the Notes

### 2.1 Status of the Notes

The Notes constitute direct and unsubordinated obligations of the Issuer, ranking *pari passu* among themselves and at least *pari passu* with all other current and future unsubordinated obligations of the Issuer, subject to the Loss Allocation, the Collateral and the Noteholder Collateral pursuant to Section 3 (Collateral; Noteholder Collateral), the redemption of the Notes in accordance with Section 10.1 (Redemption — Scheduled Maturity) and Section 10.3 (Redemption — Early Amortisation), if applicable.

The payment of principal of and, due to potential principal reductions, interest on the Notes is conditional upon the performance of the Reference Claims as set out in Section 8 (Loss Allocation) and Section 9 (Unjustified Loss Allocation). There is no guarantee that the Noteholders shall receive the full principal amount of the Notes and interest thereon and ultimately the obligations of the Issuer to pay principal under the Notes could even be reduced to EUR 1 per Note as a result of losses incurred in respect of the Reference Claims.

### 2.2 Obligations under the Notes

The Notes represent obligations of the Issuer only, and do not represent an interest in or obligations of the Trustee, the Bank, KfW or any of their respective affiliates or any affiliate of the Issuer or any other third person or entity. Neither the Notes nor the Reference Claims will be insured or guaranteed by any govern-

## Fortsetzung von Anlage 21:

mental agency or instrumentality or by the Bank, the Trustee or KfW or any of their respective affiliates or by any other person or entity except as described herein.

### 2.3 Limited Recourse

The Issuer's ability to satisfy its payment obligations under the Notes is dependent upon it receiving in full the amounts payable to it under the Certificates and under the other Transaction Documents or the amount of the proceeds resulting from enforcement of the security granted by the Issuer to the Trustee over the Certificates and its other assets pursuant to the Trust Agreement and the Irish Security Agreement or, as the case may be, the amount of proceeds resulting from enforcement of the security granted by the Issuer to the manager, as the initial holder of the Notes, pursuant to the Noteholder Security Agreement. If the Trustee enforces the claims under the Notes, such enforcement will be limited to those assets of the Issuer over which the Trustee was granted security. To the extent that such assets, or the proceeds of the realisation thereof, prove ultimately insufficient to satisfy the claims of all Noteholders in full, then any shortfall arising shall be extinguished and neither any Noteholder nor the Trustee shall have any further claims against the Issuer. Such assets and proceeds shall be deemed to be "ultimately insufficient" at such time when no further assets are available and no further proceeds can be realised therefrom to satisfy any outstanding claims of the Noteholders, and neither assets nor proceeds will be so available thereafter.

### 2.4 No Interest in Reference Claims

Neither the Noteholders nor the Issuer shall have any right to or interest in any Reference Claim even in the case that a Realised Loss in respect of such Reference Claim has been allocated to the Notes in accordance with the Loss Allocation.

## 3. Collateral; Noteholder Collateral

The Issuer shall:

(i) pledge (Pfandrecht) all its present and future claims and rights against KfW under the Certificates as well as all its present and future claims and rights under the other Transaction Documents (other than the Irish Account Agreement, the Administration Agreement and the Irish Security Agreement) and in respect of the Issuer's German Account to the Trustee to secure the Trustee Claim under the Trust Agreement. The Trustee Claim entitles the Trustee to demand that all present and future obligations of the Issuer under the Notes be fulfilled, as set out in Appendix A to the Terms and Conditions; and

(ii) charge all its present and future right, title and interest in the administration agreement (the "Administration Agreement") between the Issuer and SPV Management (Dublin) Limited as corporate administrator of the Issuer (the "Administrator") dated May 30, 2001 to the Trustee as security for the Trustee Claim pursuant to an Irish security agreement (the "Irish Security Agreement") between the Issuer and the Trustee dated May 30, 2001 (together with the rights and claims pledged as set out under (i), the "Collateral").

In addition to the Collateral, the Issuer will on the Closing Date grant a Second Pledge for each Note of a Class over all its present and future rights and claims under the corresponding Certificate to secure the Issuer's obligations under such Note (together, the "Noteholder Collateral") pursuant to an agreement (the "Noteholder Security Agreement") between the Issuer and the manager, as the initial holder of the Notes, dated May 30, 2001. The text of the Noteholder Security Agreement is attached as Appendix D to the Terms and Conditions and constitutes an integral part of the Terms and Conditions. The Second Pledges securing the Notes of a particular Class shall rank *pari passu* among each other. The First Pledge on any Certificate under the Trust Agreement shall rank senior to all Second Pledges in respect of such Certificate created by the Noteholder Security Agreement. The Second Pledges in respect of any Certificate may not be exercised as long as the First Pledge in respect of such Certificate validly exists.

Notwithstanding the Collateral and/or the Noteholder Collateral, the amount of principal of and, due to potential principal reductions, interest on the Notes may be reduced as a result of Realised Losses incurred with respect to the Reference Claims and only the obligations of the Issuer to pay any amount of principal and interest determined to be due to the Noteholders in accordance with the Terms and Conditions, which may be reduced by such Realised Losses, shall have the benefit of the Collateral and/or the Noteholder Collateral.

## Fortsetzung von Anlage 21:

### 4. Reference Pool

The payment of principal of and, due to potential principal reductions, interest on the Notes is conditional upon the performance of a reference pool of certain claims (the "Reference Pool") as set out in Section 8 (Loss Allocation) and Section 9 (Unjustified Loss Allocation). The Reference Pool is constituted in accordance with and must comply with certain requirements and conditions (the "Reference Pool Provisions ") set out in Appendix B attached to the Terms and Conditions. The Reference Pool Provisions constitute an integral part of the Terms and Conditions.

### 5. Trustee

#### 5.1 Trust Agreement

(...)

#### 5.2 Obligation to Maintain a Trustee

(...)

### 6. Payments

#### 6.1 General

Payments in respect of the Notes shall be made by wire transfer of same day funds to, or to the order of, Euroclear and Clearstream, Luxembourg, as relevant, for credit to the accounts held by the relevant Euroclear Participants and Clearstream, Luxembourg Participants for subsequent transfer to the holders of the Notes.

#### 6.2 Payments of Interest on Temporary Global Notes

Payments of interest in respect of any Notes represented by a Temporary Global Note shall be made by wire transfer of same day funds to, or to the order of, Euroclear and Clearstream, Luxembourg, as relevant, for credit to the relevant Euroclear Participants and Clearstream, Luxembourg Participants for subsequent transfer to the holders of the Notes upon due certification as provided in Section 1.3 (Notes — Exchange of Temporary Global Notes).

#### 6.3 Discharge

All payments in respect of any Note made by the Issuer to Euroclear and Clearstream, Luxembourg, as relevant, shall discharge the liability of the Issuer under such Note to the extent of the sums so paid.

#### 6.4 Business Day

If the date for any payment in respect of any Note is not a Business Day, such payment shall not be made until the next succeeding day which is a Business Day unless it would thereby fall into the next calendar month, in which case the payment shall be made on the immediately preceding Business Day. "Business Day" means a day which is a TARGET Settlement Day and a Frankfurt Business Day. "TARGET Settlement Day" means a day on which TARGET (the Trans-European Automated Real-time Gross settlement Express Transfer system) is open. "Frankfurt Business Day" means a day on which commercial banks are open for general business (including dealings in foreign exchange and foreign currency deposits) and foreign exchange markets settle payments in Frankfurt am Main.

### 7. Payments of Interest

#### 7.1 Accrual Basis

The Note Principal Amount shall bear interest from May 30, 2001 (the "Issue Date") until the close of the day (both days inclusive) preceding the day on which such amount has been redeemed in full or reduced to EUR 1 by allocation of Realised Losses pursuant to the Loss Allocation. "Note Principal Amount" of any Note means with respect to any date an amount (rounded, if necessary, to the nearest EUR 0.01, with EUR 0.005 being rounded upwards) equal to the initial principal amount of such Note as, on or before such date, (i) reduced by any Realised Losses allocated to such Note, (ii) increased by any Late Recoveries or as a result of any Unjustified Loss Allocation procedure, and (iii) reduced by any amounts paid on such Note in respect

## Fortsetzung von Anlage 21:

of principal. "Class Principal Amount" means, with respect to each Class, the aggregate of the Note Principal Amounts of such Class.

### 7.2 Interest Payment Dates

Without prejudice to Section 13, third paragraph, payments of interest on the Notes to the Noteholders shall become due and payable quarterly in arrear, on each 30th day of March, June, September and December of each year (each, an "Interest Payment Date"), subject to Section 6.4 (Business Day). The first Interest Payment Date shall be September 30, 2001.

### 7.3 Interest Amount

The amount of interest payable in respect of each Note on any Interest Payment Date (the "Interest Amount") shall be calculated by applying the Interest Rate for the relevant Interest Accrual Period to its Note Principal Amount outstanding as of the immediately preceding Interest Payment Date or the Issue Date (in the case of the first Interest Payment Date), and multiplying the result by the actual number of days in the relevant Interest Accrual Period divided by 360 and rounding the result to the nearest EUR 0.01 (with EUR 0.005 being rounded upwards).

### 7.4 Interest Accrual Periods

"Interest Accrual Period" means, in respect of the first Interest Payment Date, the period commencing on (and including) the Issue Date and ending on (but excluding) the first Interest Payment Date and in respect of any subsequent Interest Payment Date, the period commencing on (and including) the immediately preceding Interest Payment Date and ending on (but excluding) such Interest Payment Date.

### 7.5 Interest Rates

The interest rate payable on the Notes for each Interest Accrual Period (each, an "Interest Rate") shall be

in the case of the Class A+ Notes, EURIBOR plus 0.25% per annum,  
in the case of the Class A Notes, EURIBOR plus 0.45% per annum,  
in the case of the Class B Notes, EURIBOR plus 0.65% per annum,  
in the case of the Class C Notes, EURIBOR plus 1.30% per annum, and  
in the case of the Class D Notes, EURIBOR plus 3.50% per annum.

"EURIBOR" for each Interest Accrual Period means the rate for deposits in euro for a period of three months (with respect to the first Interest Accrual Period interpolated between 3 and 4 months) which appears on Bridge Telerate Page 248 of the Associated Press-Dow Jones Telerate Service (or such other page as may replace such page on that service for the purpose of displaying Brussels interbank offered rate quotations of major banks) as of 11:00 a.m. (Brussels time) on the second TARGET Settlement Day immediately preceding the commencement of such Interest Accrual Period (each, a "EURIBOR Determination Date"), all as determined by the Principal Paying Agent.

(...)

In the event that the Principal Paying Agent is on any EURIBOR Determination Date required but unable to determine EURIBOR for the relevant Interest Accrual Period in accordance with the above, EURIBOR for such Interest Accrual Period shall be the EURIBOR as determined on the previous EURIBOR Determination Date.

### 7.6 Determinations; Notifications

(...)

## 8. Loss Allocation

### 8.1 Order and Conditions

On each Interest Payment Date the aggregate amount of any Realised Losses shall be allocated as follows (the "Loss Allocation"):

## Fortsetzung von Anlage 21:

first, to reduce the Outstanding Threshold Amount,

second, after the Outstanding Threshold Amount has been reduced to zero, to reduce equally the Note Principal Amounts of the Class D Notes,

third, after the Note Principal Amount of the Class D Notes has been reduced to EUR 1 per Note, to reduce equally the Note Principal Amounts of the Class C Notes,

fourth, after the Note Principal Amount of the Class C Notes has been reduced to EUR 1 per Note, to reduce equally the Note Principal Amounts of the Class B Notes,

fifth, after the Note Principal Amount of the Class B Notes has been reduced to EUR 1 per Note, to reduce equally the Note Principal Amounts of the Class A Notes,

sixth, after the Note Principal Amount of the Class A Notes has been reduced to EUR 1 per Note, to reduce equally the Note Principal Amounts of the Class A+ Notes, provided that only the product of the Realised Losses and the A+ Factor shall be allocated to the Class A+ Notes on such Interest Payment Date, whereby "A+ Factor" means 250 divided by 895,000;

provided that (i) the Bank has duly notified the Trustee pursuant to Section 8.4 (Loss Allocation — Notice to Trustee) and (ii) such Loss Allocation shall be made in accordance with the terms of the Trustee's confirmation pursuant to Clause 8(3) of the Trust Agreement. Realised Losses may not be allocated pursuant to the Loss Allocation if and for as long as the Issuer is in breach of its obligation to maintain a trustee pursuant to Section 5 (Trustee) or the Bank or the Issuer is in breach of its obligations under the Trust Agreement and such breach of the Trust Agreement may affect the exercise of the Trustee's rights and obligations under the Trust Agreement to the detriment of the Transaction Creditors, provided that such Realised Losses may be allocated pursuant to the Loss Allocation once such breach has been remedied but only to the extent that no such breach has resulted in or increased any such Realised Loss.

Reference Claims in respect of which any of the Eligibility Criteria, Replenishment Conditions, Servicing Standards or, if relevant, requirements for transfer of such Reference Claim pursuant to Provision 8(A) of the Reference Pool Provisions (Transfers) is not complied with shall not qualify for allocation of Realised Losses pursuant to the Loss Allocation, subject to certain limited exceptions, as set out in Provision 9 of the Reference Pool Provisions (Non-compliance).

The allocation of Realised Losses to any Note shall not be affected by the invalidity or unenforceability of any other Note ranking equal or junior to such Note for the purposes of the Loss Allocation. If any Note remains outstanding after any other Note, ranking equal or junior to such outstanding Note for the purposes of the Loss Allocation, has, for any reason, been redeemed, other than in accordance with the Terms and Conditions, in full or in part (as opposed to any reduction of the principal amount by the Loss Allocation), each such redeemed Note shall be deemed to remain outstanding for the purposes of the Loss Allocation in respect of such Note.

"Realised Loss" means, with respect to a Liquidated Reference Claim, the Outstanding Nominal Amount of such Liquidated Reference Claim as of the end of the Collection Period during which it became a Liquidated Reference Claim, provided that in connection with payment rescheduling or debt restructuring of a Reference Claim any amount of principal foregone as part thereof in accordance with the Servicing Standards, shall be included in the Realised Loss with respect to such Reference Claim.

For the avoidance of doubt, Realised Loss shall not include any accrued interest on or enforcement costs in respect of a Liquidated Reference Claim.

"Collection Period" means with respect to the first Interest Payment Date the period from the Cut-off Date until the last Frankfurt Business Day of the calendar month immediately preceding the month in which the first Interest Payment Date occurs (both days inclusive), and with respect to any subsequent Interest Payment Date the period from the calendar day immediately following the last day of the previous Collection Period until the last Frankfurt Business Day of the calendar month immediately preceding the month in which the relevant Interest Payment Date occurs (both days inclusive) and "related Collection Period" means in connection with an Interest Payment Date or a Determination Date the Collection Period immediately preceding such Interest Payment Date or Determination Date.

## Fortsetzung von Anlage 21:

"Outstanding Threshold Amount" means, in respect of any Interest Payment Date, EUR 47,500,000 minus any Realised Losses previously allocated to the Outstanding Threshold Amount pursuant to this Section 8.1 (such Realised Losses as reduced by any Late Recoveries and as a result of the Unjustified Loss Allocation procedure).

"Liquidated Reference Claim" means a Reference Claim:

- (i) in respect of which a Credit Event had occurred and was not remedied before a Credit Event Notice has been given pursuant to (ii) below,
- (ii) in respect of which a Credit Event Notice has been given regarding such Credit Event, and
- (iii) in respect of which the Bank has notified the Trustee as set out in Section 8.4 (Loss Allocation — Notice to Trustee).

"Defaulted Reference Claim" means a Reference Claim, other than a Liquidated Reference Claim:

- (i) in respect of which a Credit Event had occurred and was not remedied before a Credit Event Notice has been given pursuant to (ii) below, and
- (ii) in respect of which a Credit Event Notice has been given regarding such Credit Event.

"Credit Event" means with respect to a Reference Claim the occurrence, after the Issue Date, of (i) Bankruptcy, or (ii) Failure to Pay. Without prejudice to the Eligibility Criteria and the Replenishment Conditions, if an occurrence would otherwise constitute a Credit Event, such occurrence will constitute a Credit Event whether or not such occurrence arises directly or indirectly from (a) any lack or alleged lack of authority or capacity of a Debtor (as defined in Provision 4(e) of the Reference Pool Provisions) to enter into any Reference Transaction underlying a Reference Claim, and (b) any actual or alleged unenforceability, illegality, impossibility or invalidity with respect to any Reference Claim, however described.

"Bankruptcy" means the Debtor: (a) is dissolved (other than pursuant to a consolidation, amalgamation or merger); (b) becomes insolvent or is unable to pay its debts or fails or admits in writing its inability generally to pay its debts as they become due; (c) makes a general assignment, arrangement or composition with or for the benefit of its creditors; (d) institutes or has instituted against it proceedings seeking a judgement of insolvency or bankruptcy or any other relief under any bankruptcy or insolvency law or other similar law affecting creditors' rights, or a petition is presented for its winding-up or liquidation, and, in the case of any such proceeding or petition instituted or presented against it, such proceedings or petition (i) results in a judgement of insolvency or bankruptcy or the entry of an order for relief or the making of an order for its winding-up or liquidation or (ii) is not dismissed, discharged, stayed or restrained in each case within 30 calendar days of the institution or presentation thereof; (e) has a resolution passed for its winding-up, official management or liquidation (other than pursuant to a consolidation, amalgamation or merger); (f) seeks or becomes subject to the appointment of an administrator, provisional liquidator, conservator, receiver, trustee, custodian or other similar official for it or for all or substantially all its assets; (g) has a secured party take possession of all or substantially all its assets or has a distress, execution, attachment, sequestration or other legal process levied, enforced or sued on or against all or substantially all its assets and such secured party maintains possession, or any such process is not dismissed, discharged, stayed or restrained, in each case within 30 calendar days thereafter; (h) causes or is subject to any event with respect to it which, under the applicable laws of any jurisdiction, has an analogous effect to any of the events specified under clauses (a) to (g) (inclusive); or (i) takes any action in furtherance of, or indicating its consent to, approval of, or acquiescence in, any of the foregoing acts.

"Failure to Pay" means, with respect to a Reference Claim that a due payment in an aggregate amount of not less than EUR 2,500, or, if lower, 50% of the Outstanding Nominal Amount of such Reference Claim has not been made when due within 90 calendar days from the relevant due date (after giving effect to any grace period applicable on the Issue Date or the Replenishment Date on which such Reference Claim was added to the Reference Pool, as relevant, but irrespective of any extension thereof after the Issue Date or the relevant Replenishment Date, as the case may be), provided that a payment of any amount shall have been "made" if the related payment obligation of the Debtor pursuant to the underlying Reference Transaction has been fully satisfied in such amount.

## Fortsetzung von Anlage 21:

"Credit Event Notice" means an irrevocable notice by the Bank to the Trustee that a Credit Event has occurred and was not remedied. A Credit Event Notice must be given by the Bank as soon as practicable, but not later than 90 calendar days, after the relevant Bank Entity has become aware of the occurrence of the Credit Event, and must contain a description in reasonable detail of the facts relevant to the determination that a Credit Event has occurred and specify the date when the Credit Event occurred and the Reference Claim in respect of which the Credit Event occurred. A Credit Event Notice may be delivered between 9:00 a.m. and 4:00 p.m. (Frankfurt time) on any Frankfurt Business Day by mail, telefax or e-mail in accordance with the Trust Agreement. If a Credit Event Notice is delivered to the Trustee after 4:00 p.m. (Frankfurt time) on a Frankfurt Business Day or on a day which is not a Frankfurt Business Day, such Credit Event Notice shall be deemed delivered on the immediately following Frankfurt Business Day.

### 8.2 Late Recoveries

Any payment a Bank Entity receives on a Liquidated Reference Claim during a Collection Period and which is allocable to the principal amount of the Liquidated Reference Claim pursuant to Provision 7 of the Reference Pool Provisions (Allocations of Payments and Foreclosure Proceeds; Set-off) in respect of which Realised Losses had been allocated to the Notes and/or the Outstanding Threshold Amount (each, a "Late Recovery"), shall be allocated as of the following Interest Payment Date (after the Loss Allocation on such date in accordance with Section 8.1 (Loss Allocation - Order and Conditions)) to reverse previous Loss Allocations in an order which is the reverse of the order of the Loss Allocation set forth in Section 8.1 (Loss Allocation - Order and Conditions). Accordingly, the amount of such Late Recoveries shall be allocated, in such reverse order, to increase the Note Principal Amounts of the Notes of the relevant Class or Classes and/or the Outstanding Threshold Amount, provided that the allocation of any Late Recoveries to reverse any Loss Allocation to the Class A+ Notes shall increase the Note Principal Amount of the Class A+ Notes in an amount equal to the product of such Late Recoveries and the A+ Factor.

For the avoidance of doubt,

(i) for the period from the allocation of Realised Losses to any Notes pursuant to the Loss Allocation until the allocation of related Late Recoveries pursuant to this Section 8.2, the Noteholders shall receive no additional payment of interest in respect of the increase of the Note Principal Amounts pursuant to this Section 8.2 or otherwise on the account of the amount of such Late Recoveries;

(ii) Late Recoveries shall constitute Collections on the relevant Reference Claims; and

(iii) the Noteholders shall have no rights with respect to any Late Recoveries after the final redemption of their Notes.

### 8.3 Determinations

Any Realised Losses in respect of a Collection Period and their allocation on the related Interest Payment Date shall be determined by the Bank not later than on the relevant Determination Date. The Trustee is obliged under the Trust Agreement duly to protect the interests of the Noteholders subject to and in accordance with Clause 2(1) of the Trust Agreement.

### 8.4 Notice to Trustee

(...)

## 9. Unjustified Loss Allocation

### 9.1 Reversal of Realised Loss

On the Interest Payment Date following the determination of an Unjustified Loss Allocation:

(i) the amount of such Unjustified Loss Allocation shall be allocated pursuant to Section 8.2 (Loss Allocation - Late Recoveries) in the same way as Late Recoveries, and

(ii) the Issuer shall, in respect of each Interest Payment Date since the Interest Payment Date on which the Unjustified Loss Allocation was made, pay the amount of interest which would have been payable on any Class of Notes on such Interest Payment Date if such Unjustified Loss Allocation had not occurred, increased

## Fortsetzung von Anlage 21:

in each case by default interest at a rate of 6% per annum on the amount by which the Note Principal Amounts of each relevant Class of Notes are increased in accordance with Section 8.2 (Loss Allocation- Late Recoveries) as a result of such Unjustified Loss Allocation.

Noteholders shall have no rights with respect to an Unjustified Loss Allocation after the final redemption of their Notes.

"Unjustified Loss Allocation" means any Loss Allocation or any part thereof which was not made in compliance with Section 8 (Loss Allocation).

### 9.2 Collections

For the avoidance of doubt, any payment or other reduction of the principal amount (in accordance with Provision 7 of the Reference Pool Provisions (Allocations of Payments and Foreclosure Proceeds; Set-off) of a Reference Claim for which an Unjustified Loss Allocation has been determined shall constitute a Collection on such Reference Claim.

### 9.3 Determinations

Unjustified Loss Allocation for a given Collection Period, if any, shall be determined and the reinstatement of the Outstanding Threshold Amount and/or the Note Principal Amount of any Note shall be calculated by the Bank in accordance with the Trust Agreement not later than on the relevant Determination Date.

## 10. Redemption

### 10.1 Scheduled Maturity

The Notes shall be redeemed on the Interest Payment Date falling in June 2006 (the "Scheduled Maturity Date") at their Note Principal Amount as of the Scheduled Maturity Date, unless redeemed earlier in accordance with Section 11 (Early Redemption for Default), Section 12 (Early Redemption by the Issuer) or Section 10.3 (Redemption — Early Amortisation) or unless any Reference Claim (other than a Liquidated Reference Claim or a Non-qualifying Reference Claim) is overdue and outstanding as to principal as of the end of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date (each, an "Overdue Reference Claim"). If any Reference Claim qualifies as an Overdue Reference Claim, the redemption of the Notes shall be subject to the following:

(a) the Outstanding Nominal Amount of each Overdue Reference Claim as of the end of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date shall be deemed to be a Realised Loss, if the sum of (A) such deemed Realised Losses, and (B) any other Realised Losses to be allocated as of the Scheduled Maturity Date does not exceed the Outstanding Threshold Amount as of the end of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date;

(b) if the sum of the amounts referred to in (a)(A) and (B) above, exceeds the Outstanding Threshold Amount as of the end of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date, the Bank shall have the right to determine Appraised Loss for one or more Overdue Reference Claims, provided that the sum of (i) the Appraised Losses and (ii) the Outstanding Nominal Amounts of any Overdue Reference Claims as of the end of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date for which Appraised Losses have not been determined, if any, shall be deemed to be Realised Losses if, on such basis, (A) the aggregate amount of the Realised Losses so determined together with (B) all other Realised Losses to be allocated as of the Scheduled Maturity Date does not exceed the Outstanding Threshold Amount as of the end of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date;

(c) if the Overdue Reference Claims cannot be allocated pursuant to (a) or (b) above, the redemption of those Notes, to which the Outstanding Nominal Amounts of those Overdue Reference Claims would be allocated pursuant to the Loss Allocation if those amounts were Realised Losses, shall be deferred so that the aggregate outstanding Note Principal Amounts of such Notes immediately after the Scheduled Maturity Date are in an amount equal to the aggregate Outstanding Nominal Amount of the Overdue Reference Claims minus the Outstanding Threshold Amount as of the end of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date; and

## Fortsetzung von Anlage 21:

(d) if one or more Classes of Notes remain outstanding pursuant to paragraph (c) above, the Terms and Conditions shall continue to apply to such Classes of Notes, provided that on each Interest Payment Date following the Scheduled Maturity Date, such Classes of Notes shall be redeemed sequentially, starting with the most senior Class or Classes of Notes for the purposes of the Loss Allocation and provided that next Class or Classes shall be redeemed only after the Class or Classes more senior for the purposes of the Loss Allocation have been fully redeemed, as follows: the Note Principal Amount of each Note of the relevant Class, as reduced by the Loss Allocation as of such Interest Payment Date, shall be repaid in an amount equal to the excess of (A) the aggregate Note Principal Amounts of all Notes as of the calendar day preceding such Interest Payment Date reduced by Realised Losses allocated to such Notes as of such Interest Payment Date and increased by any Late Recoveries or as a result of any Unjustified Loss Allocation procedure as of such Interest Payment Date over (B) the amount of the aggregate Outstanding Nominal Amounts of all Defaulted Reference Claims and/or Overdue Reference Claims as of the end of the Collection Period immediately preceding such Interest Payment Date.

provided that such amount shall

(A) in the case of the Class A+ Notes be multiplied by the A+ Factor; and

(B) in each case, be divided by the number of Notes of such Class and rounded to the nearest EUR 0.01 (with EUR 0.005 being rounded upwards).

"Outstanding Nominal Amount" means (i) with respect to a Reference Claim other than a Guarantee Reference Claim, the initial principal amount of such Reference Claim as of the Cut-off Date or the Replenishment Date on which it was added to the Reference Pool, as relevant, as reduced by the Collections in respect of such Reference Claim and any amounts of principal foregone and (ii) with respect to a Guarantee Reference Claim, the sum of the amount of the Indemnification Guarantee Reference Claim and the amount of the Contingent Guarantee Reference Claim under such Guarantee Reference Claim.

"Guarantee Reference Claim" means at any time the Indemnification Guarantee Reference Claim or the Contingent Guarantee Reference Claim under a Reference Guarantee at such time or, in the case of a Reference Guarantee which is partly drawn and partly still available for drawing, the Indemnification Guarantee Reference Claim and the Contingent Guarantee Reference Claim under such Reference Guarantee, taken together. "Indemnification Guarantee Reference Claim" means the claim of the relevant Bank Entity under a Reference Guarantee for repayment of the amount for which such Reference Guarantee has been drawn.

"Contingent Guarantee Reference Claim" means the potential Indemnification Guarantee Reference Claim with respect to a Guarantee Reference Claim corresponding to the portion of the underlying Reference Guarantee not drawn and still available for drawing.

"Collections " means with respect to a Reference Claim, all payments (including prepayments, foreclosure proceeds and Late Recoveries) allocable to the principal amount of such Reference Claim pursuant to Provision 7 of the Reference Pool Provisions (Allocations of Payments and Foreclosure Proceeds; Set-off), and any other reductions of the principal amount, including by way of set-off, of such Reference Claim, provided that each direct debit (the "Direct Debit") (Lastschriftinzugsverfahren) shall constitute a Collection at the time it is made, provided that if it is claimed back (Lastschriftückbelastung) within 6 calendar weeks thereafter, it shall cease to constitute a Collection and the Outstanding Nominal Amount of the relevant Reference Claim shall be re-increased by the amount claimed back (the "Direct Debit Increase"). If as a result of a Direct Debit Increase the Aggregate Principal Balance would exceed the Maximum Aggregate Principal Balance, the Reference Claims added to the Reference Pool pursuant to Provision 5 of the Reference Pool Provisions (Replenishments) after such Direct Debit has been made shall be removed (in whole or in part) in the reverse chronological order from the Reference Pool, provided that if only some but not all of the Reference Claims added to the Reference Pool at the same time need to be so removed, the Bank may, at its sole discretion, choose among such Reference Claims the Reference Claims (or portion thereof) to be removed.

"Appraised Loss" means, with respect to any Reference Claim, the excess of (A) the Outstanding Nominal Amount of such Reference Claim at any time over (B) its Appraised Value at such time.

"Appraised Value" means, with respect to a Reference Claim, the aggregate amount of the expected future recoveries allocable to the principal amount of such Reference Claim in accordance with the Reference Pool Provisions and the Servicing Standards plus, in the case of a Guarantee Reference Claim, the amount of any

## Fortsetzung von Anlage 21:

Contingent Guarantee Reference Claim which is expected not to become an Indemnification Guarantee Reference Claim, determined as the arithmetic mean of amounts determined by two independent experts appointed for this purpose by the Trustee in accordance with the Trust Agreement, provided that for the determination of an Appraised Value otherwise that for the purposes of Section 10.2 (Legal Maturity) an amount determined by one independent expert appointed for this purpose by the Trustee in accordance with the Trust Agreement shall suffice.

### 10.2 Legal Maturity

In the event that any Defaulted Reference Claim for which no Realised Loss has been determined remains outstanding as of the end of the Collection Period immediately preceding the Interest Payment Date falling in June 2008 (the "Legal Maturity Date"), the Issuer shall:

- (i) cause the determination of the Appraised Loss in respect of each such Defaulted Reference Claim;
- (ii) cause the Bank to determine whether any such Appraised Loss shall constitute a Realised Loss to be allocated to the Outstanding Threshold Amount and to the remaining outstanding Notes in accordance with the Loss Allocation on the Legal Maturity Date, and
- (iii) redeem the remaining outstanding Notes at their Note Principal Amounts on the Legal Maturity Date.

### 10.3 Early Amortisation

(a) Without prejudice to the provisions of Section 10.1 (Scheduled Maturity) and Section 12.1 (Early Redemption by the Issuer-Certificate Termination), on each Interest Payment Date following the occurrence of an Early Amortisation Event and the reduction of the Aggregate Principal Balance to an amount below the aggregate of the Class Principal Amounts of all Classes of Notes and the Outstanding Threshold Amount, if any, the Issuer shall redeem the Class A+ Notes, then, after the Class A+ Notes are fully redeemed, the Class A Notes, then, after the Class A Notes are fully redeemed, the Class B Notes, then, after the Class B Notes are fully redeemed, the Class C Notes, then, after the Class C Notes are fully redeemed, the Class D Notes, in this order sequentially, in each case after any Loss Allocation on such Interest Payment Date, in an amount equal to the excess of (A) the sum of (i) the Class Principal Amount of the Class A+ Notes divided by the A+ Factor and (ii) the aggregate Note Principal Amounts of all Notes (excluding the Class A+ Notes) in all cases as of the calendar day preceding such Interest Payment Date and as reduced by Realised Losses allocated to such Notes as of such Interest Payment Date and increased by any Late Recoveries or as a result of any Unjustified Loss Allocation procedure as of such Interest Payment Date over (B) the amount of the aggregate Outstanding Nominal Amounts of all Reference Claims (other than Liquidated Reference Claims) as of the end of the Collection Period immediately preceding such Interest Payment Date; provided that such excess amount shall in the case of the Class A+ Notes be multiplied by the A+ Factor.

An "Early Amortisation Event" occurs when the cumulative Realised Losses (as reduced by any Late Recoveries and as a result of the Unjustified Loss Allocation procedure) exceed 1.2% of the Maximum Aggregate Principal Balance.

Section 10.3(a) shall not be affected if after the occurrence of an Early Amortisation Event and the reduction of the Aggregate Principal Balance to an amount below the aggregate of the Class Principal Amounts of all Classes of Notes and the Outstanding Threshold Amount there is any change (including as a result of any Late Recoveries or Unjustified Loss Allocation procedure) in the circumstances which gave rise to such Early Amortisation Event.

(b) On each relevant Determination Date the Bank will, pursuant to the Trust Agreement, determine the amounts of principal payable on each Class of Notes and on each Note on the related Interest Payment Date. The amount of principal payable on each Note of a particular Class of Notes on an Interest Payment Date shall equal the aggregate amount of principal payable on such Class of Notes on such Interest Payment Date divided by the number of Notes of such Class of Notes then outstanding. The amounts of principal payable on the Notes shall be rounded to the nearest EUR 0.01 (with EUR 0.005 being rounded upwards).

## Fortsetzung von Anlage 21:

### 11. Early Redemption for Default

#### 11.1 Default Events

Each Noteholder may declare due the Notes held by it by delivery of a written notice to the Issuer with a copy to the Trustee if a Default Event with respect to any Note held by it occurred.

"Default Event" means either of the following:

(i) the Issuer fails to make any payment due to be made under the Notes within 30 Business Days from the relevant due date,

(ii) the Issuer or its assets become subject to bankruptcy, examinership, insolvency, moratorium or similar proceedings, which affect or prejudice the performance of obligations under the Notes, or there is a refusal to institute such proceedings for lack of assets, or

(iii) the delivery of a notice by the Trustee to the Noteholders pursuant to Section 15 (Form of Notices) that it will resign as Trustee pursuant to the Trust Agreement for good cause (aus wichtigem Grund) upon the expiry of 30 calendar days after the delivery of such notice, unless the cause for such resignation will have been remedied to the Trustee's satisfaction within that period.

#### 11.2 Method and Amount

In the event that any Noteholder exercises its right pursuant to Section 11.1 (Early Redemption for Default — Default Events) the Issuer shall redeem all of the Notes (but not some only) within 10 Business Days following the Termination Date in the amount equal to the Note Principal Amounts as of the Termination Date as reduced by Realised Losses to be determined and allocated pursuant to the Loss Allocation as of the Termination Date (as reduced by Late Recoveries and as a result of the Unjustified Loss Allocation procedure) as if such date were an Interest Payment Date (with the related Collection Period ending on the Termination Date) plus accrued interest thereon; provided that, if as of the Termination Date, the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Defaulted Reference Claims exceeds the Outstanding Threshold Amount (as reduced by any such Loss Allocation as of the Termination Date), the Issuer may, at its option, so redeem the Notes subject to the following:

(a) the redemption of each Note, to which any subsequent Realised Losses in respect of such Defaulted Reference Claim(s) are to be allocated pursuant to the Loss Allocation, shall be deferred in an amount equal to the amount by which the Note Principal Amount of such Note would be reduced if the aggregate amount of such Realised Losses were equal to the aggregate Outstanding Nominal Amount of such Defaulted Reference Claims as of the Termination Date; and

(b) the Issuer shall procure that Appraised Losses in respect of the Defaulted Reference Claims referred to in (a) above are determined within 30 calendar days of the Termination Date. Each such Appraised Loss shall constitute a Realised Loss to be allocated pursuant to the Loss Allocation. Not later than on the fifth Business Day following the expiry of such 30 calendar day period: (i) each such Realised Loss shall be allocated pursuant to the Loss Allocation, and (ii) the Issuer shall redeem the remaining outstanding Notes at the then outstanding Note Principal Amounts following such Loss Allocation together with accrued interest thereon to the date of redemption.

"Termination Date" means the date on which the first early redemption notice from a Noteholder pursuant to Section 11.1 (Early Redemption for Default — Default Events) is received by the Issuer.

### 12. Early Redemption by the Issuer

#### 12.1 Certificate Termination

The Issuer shall redeem the Notes (all Classes but not some only, in whole but not in part except by operation of Section 12.2) on the Interest Payment Date on which the Certificate Termination occurs, in each case, at the then current Note Principal Amount as of the relevant Interest Payment Date (the "Early Redemption Date") in accordance with this Section 12 (the "Early Redemption").

"Certificate Termination" occurs on the Interest Payment Date on which the payment of principal under the Certificates becomes due:

## Fortsetzung von Anlage 21:

(A) as a result of the termination of the Bank Swap (in whole or in the part of the Bank Swap providing for payments in respect of Realised Losses allocated to the Class A through Class D Notes) as of such Interest Payment Date at the option of the Bank (i) following the Collection Period during which a Regulatory Event occurred or (ii) following the Collection Period during which an Early Amortisation Event occurred, (iii) on or after the 4th anniversary of the Issue Date or (iv) following the Collection Period during which the aggregate Outstanding Nominal Amount of the Reference Claims has been reduced to less than 10% of the Maximum Aggregate Principal Balance,

(B) immediately following the Collection Period during which the termination of the Bank Swap occurred because of the occurrence of a Serious Cause or Insolvency, or

(C) as a result of the exercise by KfW of its pre-payment option under the Certificates as of such Interest Payment Date following the occurrence of a Tax Event.

"Tax Event" means any enactment of or supplement or amendment to, or change in, the laws of the Federal Republic of Germany or Ireland, or an official communication of previously not existing or not publicly available official interpretation of such laws, or a change in the official interpretation, implementation or application of such laws, in each case that becomes effective on or after the Issue Date, as a result of which, in the determination of KfW, for reasons outside its control KfW and/or the Issuer would be required to pay any additional amounts on account of taxes resulting from a change in the Issuer's status for Irish tax purposes and/or to make any tax withholding or deduction in respect of any payments on the Notes and/or the Certificates or the Issuer would be required to pay any insurance tax in respect of the Notes.

"Regulatory Event" means any enactment of or supplement or amendment to, or change in, the laws of the Federal Republic of Germany or Ireland, or an official communication of previously not existing or not publicly available official interpretation of such laws, or a change in the official interpretation, implementation or application of such laws, in each case that becomes effective on or after the Issue Date, as a result of which, in the determination of the Bank subject to the professional judgement of the Trustee, for reasons outside their control, and after taking reasonable measures (such measures not involving any material additional payment by, or capital or other expenses for, the Bank, KfW or the Issuer), (i) the Bank, KfW and/or the Issuer would be materially restricted from performing any of their obligations under any of the Notes, the Swap Agreements, the Certificates, the Trust Agreement and/or the Certificate Purchase Agreement, (ii) the Bank and/or KfW would be subject to less favourable capital adequacy treatment with respect to the Transaction, the Reference Claims (taking into account any capital relief from the Notes, the Certificates or the Swap Agreements) and/or the amount of regulatory capital freed up in respect of any Reference Claim, including as a result of a reduction of the risk weighting factor for such Reference Claim by comparison to the situation that existed on the Issue Date immediately after the issue of the Notes, or (iii) the Bank, KfW and/or the Issuer would be required to pay any additional amounts on account of taxes resulting from a change in the Issuer's status for Irish tax purposes and/or to make any tax withholding or deduction in respect of any payments on the Notes, the Certificates or any Swap Agreement.

"Serious Cause" occurs, inter alia, where a payment or other performance due by the Bank under the Bank Swap has not been received, for whatever reason, by KfW within five Business Days after the Bank has been notified of non-receipt of the payment or other non-performance.

"Insolvency" occurs if an application is filed for the commencement of bankruptcy or other insolvency proceedings against the assets of the Bank and the Bank either has filed the application itself or is generally unable to pay its debts as they fall due or is otherwise in a situation which justifies the commencement of such proceedings.

### 12.2 Deferred Redemption

(a) If any Defaulted Reference Claim is outstanding as of the end of the Collection Period preceding the Early Redemption Date, the Early Redemption pursuant to Section 12.1 shall be subject to the following:

(i) the Outstanding Nominal Amount of each such Defaulted Reference Claim as of the end of the Collection Period preceding the Early Redemption Date shall be deemed to be a Realised Loss, if the sum of (A) such deemed Realised Losses, and (B) any other Realised Losses to be allocated as of the Early Redemption Date does not exceed the Outstanding Threshold Amount on such date;

## Fortsetzung von Anlage 21:

(ii) if the sum of the amounts referred to in (i)(A) and (B) above, exceeds the Outstanding Threshold Amount as of the end of the Collection Period preceding the Early Redemption Date, the Bank shall have the right to determine the Appraised Loss for one or more Defaulted Reference Claims, provided that the sum of (x) the Appraised Losses and (y) the Outstanding Nominal Amounts of any such Defaulted Reference Claims as of the end of the Collection Period immediately preceding the Early Redemption Date for which Appraised Losses have not been determined, if any, shall be deemed to be Realised Losses if, on such basis, (A) the aggregate amount of the Realised Losses so determined together with (B) all other Realised Losses to be allocated as of the Early Redemption Date does not exceed the Outstanding Threshold Amount on such date;

(iii) if the conditions set out in paragraphs (i) or (ii) above are not met, the Notes to which the Outstanding Nominal Amounts of such Defaulted Reference Claims would be allocated pursuant to the Loss Allocation if those amounts were Realised Losses shall not be redeemed on the Early Redemption Date. The Notes not redeemed on the Early Redemption Date shall be redeemed on each Interest Payment Date following the Early Redemption Date in the order set out in Section 10.3 (Redemption — Early Amortisation), in an amount equal to the excess of (A) the aggregate Note Principal Amounts of all such Notes as of the calendar day preceding such Interest Payment Date reduced by Realised Losses allocated to such Notes as of such Interest Payment Date and increased by any Late Recoveries or as a result of any Unjustified Loss Allocation procedure as of such Interest Payment Date, over (B) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Defaulted Reference Claims outstanding as of the end of the Collection Period immediately preceding such Interest Payment Date.

(b) For the avoidance of doubt, the redemption pursuant to Section 12.1 shall not result in the exclusion of any Reference Claim from the Reference Pool.

(c) If only a portion of the Class Principal Amount of any Class is redeemed on the Early Redemption Date, each Note of such Class will be redeemed in an amount equal to such portion divided by the number of Notes of such Class, provided that the result shall, for each Note, be rounded to the nearest EUR 0.01 (with EUR 0.005 being rounded upwards).

### 13. Taxes

(...)

### 14. Notifications

(...)

### 15. Form of Notices

(...)

### 16. Agents

(...)

### 17. Substitution of the Issuer

(...)

### 18. Miscellaneous

(...)

### 19. Applicable Law and Place of Jurisdiction

(...)

#### 19.1 Applicable Law

(...)

## Fortsetzung von Anlage 21:

### DESCRIPTION OF THE REFERENCE POOL

#### Reference Pool Provisions

The Reference Pool is constituted in accordance with and must comply with the Reference Pool Provisions. The following is the text of the Reference Pool Provisions which are attached as Appendix B to the Terms and Conditions and constitute an integral part of the Terms and Conditions. In case of any overlap or inconsistency in the definition of a term or expression in the Reference Pool Provisions and elsewhere in this Information Memorandum, the definition in the Reference Pool Provisions will prevail.

#### 1. General

The Reference Pool shall consist of claims, including partial claims (each, a "Reference Claim") held by or for the benefit of the Bank (including its branches) or any consolidated German banking subsidiary of the Bank (each of the Bank and such subsidiaries, a "Bank Entity") for the payment of principal and interest arising from certain loans, including syndicated loans, (each, a "Reference Loan") and other payment claims arising from warranties (Gewährleistungsbürgschaften), indemnity bonds (Ausfallgarantien), bid bonds (Bietungsgarantien), performance bonds (Vertragserfüllungsgarantien), credit guarantees (Kreditsicherungs-garantien), documentary letters of credit (Akkreditiven) and other letters of credit, customs guarantees (Zollbürgschaften) or other similar instruments granted by a Bank Entity (each, a "Reference Guarantee") to corporate entities and from subparticipations in such Reference Loans and Reference Guarantees (each, a "Subparticipation" and each Reference Loan, Reference Guarantee or Subparticipation, a "Reference Transaction"), originated, including by acquisition from a third party, by the Bank or any other Bank Entity pursuant to the Credit and Collections Policies, which are included in the Reference Pool as of the Cut-off Date or from time to time thereafter as of any Replenishment Date in accordance with Provision 2.1 (Reference Claims - Identification) and not removed from the Reference Pool pursuant to Provision 9 of the Reference Pool Provisions (Non-compliance) or Provision 8 of the Reference Pool Provisions (Transfers).

Any interest in respect of a Reference Claim capitalised since the inclusion of such Reference Claim in the Reference Pool shall not be included in the principal amount of such Reference Claim, but, for the avoidance of doubt, such capitalised interest may be added to the Reference Pool as a separate Reference Claim in accordance with Provision 5 (Replenishment).

"Credit and Collection Policies" means the standard credit and collection policies of the Bank for corporate entities as amended or supplemented from time to time in accordance with the Servicing Standards, consistently applied by the Bank and each other Bank Entity and including modifications and adjustments applicable to any Bank Entity other than the Bank, provided that any such modification or adjustment does not and will not, in the professional judgement of the Bank acting in commercially reasonable manner, adversely affect the quality and standards of servicing.

The aggregate Outstanding Nominal Amount of the Reference Claims included in the initial Reference Pool as of the beginning of business (in Frankfurt am Main) on March 30, 2001 (the "Cut-off Date") was approximately EUR 1,000,000,000.

#### 2. Reference Claims

##### 2.1 Identification

Each Reference Claim forming part of the initial Reference Pool as of the Cut-off Date has been and each Reference Claim which is subsequently added to the Reference Pool as of any Replenishment Date shall be identified to the Trustee in a notice in the form set out as Schedule 1 to the Trust Agreement delivered to the Trustee on or before the Issue Date and on each Replenishment Date (each such notice, a "Reference Claim List"), by reference to:

- (i) the account number and sub-account number or any other relevant identifier attributed in the records of the relevant Bank Entity to the Reference Claim,
- (ii) the Outstanding Nominal Amount of the Reference Claim as of the Cut-off Date or the relevant Replenishment Date, and

## Fortsetzung von Anlage 21:

(iii) the remaining term to maturity of the Reference Claim as of the Cut-off Date or the relevant Replenishment Date.

Further details regarding each Reference Claim are contained in the related records of the relevant Bank Entity. Such records are attributable to the relevant Reference Claim by reference to the account number, the relevant sub-account number or any other relevant identifier referred to in (i) above.

The account number, the sub-account number or any other relevant identifier attributed to a particular Reference Claim may change provided that the Reference Claim remains identifiable in the records of the relevant Bank Entity.

Each Bank Entity may maintain records and documentation relating to the Reference Claims in paper or electronic form or in any other commercially reasonable manner.

### 2.2 Debt Restructuring, Payment Rescheduling-Replacement

If, as a result of debt restructuring or payment rescheduling in compliance with the Servicing Standards, any Reference Claim is replaced by a new claim by way of novation, refinancing or consolidation with one or more other claims (the "New Claim")

(i) such Reference Claim shall be substituted by a portion of the New Claim (such portion, the "New Reference Claim") the principal amount of which shall be equal to the Outstanding Nominal Amount of the relevant Reference Claim immediately prior to such replacement as reduced by any amount thereof foregone in connection with such debt restructuring or payment rescheduling, if relevant, provided that if a Credit Event has not occurred in respect of such Reference Claim, the New Reference Claim must meet the Eligibility Criteria and Replenishment Conditions as of the date of such replacement, and

(ii) for the purposes of allocating payments received on such New Reference Claim, any fees, disbursements, costs and expenses in respect of the New Claim, including as a result of such replacement, any such amounts shall be allocated to the New Reference Claim in the same proportion as the principal amount of the New Reference Claim bears to the principal amount of the New Claim.

## 3. Reference Collateral

### 3.1 Allocation

A Reference Claim may be secured by collateral (or a portion thereof) which may from time to time be held or acquired by the relevant Bank Entity for its own benefit or by a third party for the benefit of the relevant Bank Entity (the "Reference Collateral"). The Reference Collateral shall not include collateral (or a portion thereof) held for the benefit of third parties and not the relevant Bank Entity. Together with such Reference Claim, such Reference Collateral may from time to time secure also (i) any other payment claims (including other Reference Claims) of any Bank Entity and/or (ii) payment claims transferred from time to time by the relevant Bank Entity together with a pro rata benefit from such Reference Collateral.

For the purpose of the Loss Allocation any proceeds of a Reference Collateral securing one or more Reference Claims shall be allocated to reduce the Outstanding Nominal Amount of the Reference Claims as follows:

(i) if, pursuant to the records of any relevant Bank Entity, any Reference Collateral is allocated to any particular claim or claims or such Reference Collateral, at any time after the Issue Date, is relevant for the calculation of regulatory capital and reserves of such Bank Entity or other regulatory purposes with respect to such claim or claims under the applicable capital adequacy laws and regulations, in particular, pursuant to Principle I (Grundsatz I) of the Principles on Own Capital and Liquidity of Banking Institutions (Grundsätze über das Eigenkapital und die Liquidität der Kreditinstitute) of January 20, 1969, as amended or replaced from time to time, the proceeds of such Reference Collateral shall be allocated in accordance with such collateral allocation in the records of such Bank Entity, and

(ii) with respect to any Reference Collateral also securing claims other than Reference Claims and not allocated pursuant to (i), a portion of the proceeds from such Reference Collateral shall be allocated to the relevant Reference Claim(s); such portion (in each case, the "Reference Collateral Share ") shall represent the ratio between:

## Fortsetzung von Anlage 21:

(A) the Outstanding Nominal Amount at such time of the relevant Reference Claim(s) secured by such Reference Collateral; and

(B) the actual outstanding principal amount, at such time of all payment claims (including contingent claims) secured by such Reference Collateral.

The Reference Collateral Share may change from time to time, as the claims of the Bank Entities secured by the Reference Collateral may be redeemed and new claims secured by such Reference Collateral created.

### 3.2 Release

Each Bank Entity may at any time release, or cause to be released, any Reference Collateral, if it either (i) in its professional judgement concludes that it is required to do so by applicable law or contractual arrangements, or (ii) does so in the ordinary course of its business and in accordance with the Credit and Collection Policies.

### 4. Eligibility Criteria

The following criteria (the "Eligibility Criteria") shall be met (i) as of the Issue Date, in respect of each Reference Claim and (ii) as of each Replenishment Date, in respect of each Reference Claim added to the Reference Pool on such date:

(a) the Bank Entity which the Bank specified to the Trustee as creditor of the Reference Claim is the sole creditor of such Reference Claim, subject only, in the case of a Contingent Guarantee Reference Claim, to the Reference Guarantee being drawn and provided that (i) in the case of a Subparticipation, such Reference Claim is held by the relevant Agent Bank (as defined in Provision 6) for the sole benefit of the relevant Bank Entity and (ii) in the case of a Reference Claim under a syndicated Reference Transaction such Bank Entity is either the sole creditor of such Reference Claim or such Reference Claim is held by the relevant Agent Bank for the sole benefit of such Bank Entity.

(b) The Reference Claim is free of third party rights other than (i) rights to re-transfer excess Reference Collateral, (ii) security interests for the benefit of KfW, Deutsche Ausgleichsbank, European Investment Bank and/or any other public sector entity granted in connection with refinancing of such Reference Claim, and (iii) security interests for the benefit of the German central bank (Bundesbank) or the European Central Bank,

(c) the Reference Claim has been originated, including by way of acquisition from a third party, by a Bank Entity in compliance with all applicable legal provisions and the Credit and Collection Policies in effect at the time of origination and all required consents, approvals and authorisations have been obtained in respect thereof, and in respect of the ability of the relevant Bank Entity to undertake such business,

(d) the Reference Claim is legally valid and enforceable, subject only, in the case of a Contingent Guarantee Reference Claim, to the Reference Guarantee being drawn, in accordance with its terms and applicable provisions of law,

(e) the Reference Claim constitutes an unsubordinated, irrevocable, binding and enforceable obligation, subject only, in the case of a Contingent Guarantee Reference Claim, to the Reference Guarantee being drawn, of the debtor including a partnership (such as Kommanditgesellschaft, Offene Handelsgesellschaft or Gesellschaft des bürgerlichen Rechts) to whom the FK Rating is allocated pursuant to the files of the relevant Bank Entity (the "Debtor") to pay the amount of principal as specified to the Trustee in the relevant Reference Claim List and is not subject to any defence, dispute, counterclaim or enforcement order,

(f) the relevant Bank Entity has proper documentation in place for the Reference Claim, indicating, in particular, the amounts outstanding thereunder from time to time and the related Reference Collateral,

(g) the Reference Claim is distinguishable from other claims of the relevant Bank Entity,

(h) the principal amount payable on the Reference Claim is not determined by reference to any formula or index involving any contingency and the principal amount payable on such Reference Claim, other than a Contingent Guarantee Reference Claim, is not subject to any other contingency,

## Fortsetzung von Anlage 21:

(i) the Debtor is not in breach of any of its obligations pursuant to the Reference Transaction in any material respect,

(j) no payment on the Reference Claim is overdue (irrespective of any applicable grace period),

(k) no litigation is pending with respect to the Reference Claim nor, to the best knowledge of the relevant Bank Entity and, if different, the Bank is any such litigation threatened,

(l) the Reference Claim is denominated in euro, "euro" or "EUR" means with respect to the Reference Claims, the single unified currency of the members of the European Union which adopted the euro in accordance with the Treaty on European Union, as amended, and any national currency sub-unit of euro, in each case at the time of determination; any reference to an amount denominated in euro shall include a reference to an equivalent amount in any of the national currency sub-units of euro,

(m) at least one scheduled payment of principal or interest has been made in respect of the Reference Claim, provided that this Eligibility Criterion does not apply if the Reference Claim is a Contingent Guarantee Reference Claim,

(n) the final maturity of the Reference Claim falls on or before the last day of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date,

(o) to the best knowledge of the Bank and the relevant Bank Entity, the Debtor is not in Bankruptcy, moratorium or any other similar proceedings,

(p) the information provided in respect of the Reference Claims in the information memorandum (the "Information Memorandum") dated May 22, 2001 published in relation to the issue of the Notes and in the relevant Reference Claim List is true, accurate and complete in all material respects,

(q) the Reference Claim and the related Reference Collateral can be identified in the files of the relevant Bank Entity on the basis of the relevant Reference Claim List,

(r) the Debtor has an FK Rating of 5 or better,

(s) the Debtor is domiciled in Germany,

(t) no agreement has been concluded or is being negotiated for the Reference Claim according to which its repayment would be suspended,

(u) neither the relevant Bank Entity, the Bank nor, to the best knowledge of the relevant Bank Entity, the relevant Agent Bank, as applicable, has commenced enforcement proceedings against the Debtor, and

(v) without prejudice to any risk transfer between the Bank, the other Bank Entities and other affiliated companies of the Bank, neither the relevant Bank Entity, nor the Bank nor any person affiliated with any of them carries direct or indirect obligations of liability for the performance of the Reference Claim.

Compliance with the Eligibility Criteria is, subject to Provision 9 of the Reference Pool Provisions (Non-compliance), a condition to the Loss Allocation and does not constitute an obligation of the Bank, any other Bank Entity, KfW or the Issuer.

### 5. Replenishment

The Bank may, without the consent of the Trustee, add new Reference Claims to the Reference Pool (in each case, a "Replenishment") as of any Frankfurt Business Day from (and including) the Issue Date until (but excluding) the last calendar day of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date (each, a "Replenishment Date"), if the following conditions (the "Replenishment Conditions") are met as of the relevant Replenishment Date:

(i) The aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims including (A) the Outstanding Nominal Amount of any Reference Claim which is either a Defaulted Reference Claim or a Liquidated Reference Claim and (B) the Outstanding Nominal Amount of such new Reference Claims, but, for the avoid-

## Fortsetzung von Anlage 21:

ance of doubt, excluding the Outstanding Nominal Amounts of any Reference Claims removed from the Reference Pool pursuant to Provision 9 (Non-compliance) or Provision 8 (Transfers) of the Reference Pool Provisions (the "Aggregate Principal Balance") shall not at any time exceed EUR 1,000,000,000.00 (the "Maximum Aggregate Principal Balance") minus the cumulative amount of Realised Losses.

(ii) In respect of each such new Reference Claim the Eligibility Criteria must be met.

(iii) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Reference Pool to contravene, or if the Reference Pool is already in contravention prior to such addition, cause to worsen such contravention of the following concentration threshold: all Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not reduce the Moody's Diversity Score for the Reference Pool, based on the standard method of calculation as of the Issue Date, below 100,

provided that if Moody's Diversity Score is replaced or the method of calculation changed after the Issue Date, the above concentration threshold will be adjusted accordingly.

"Moody's Diversity Score " means a number that indicates pool concentration in terms of the concentration by any single Debtor, together with any other debtor forming a unit with such Debtor within the meaning of Section 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), and by industry determined in accordance with standard calculation method of Moody's.

(iv) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Reference Pool to contravene, or if the Reference Pool is already in contravention prior to such addition, cause to worsen such contravention of the following concentration thresholds:

the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims owed by Debtors with an FK Rating which is equal or below any of the FK Ratings set out in the following table must not exceed the percentage of the Aggregate Principal Balance set out opposite such FK Rating in the following table:

FK-Rating	% of the Aggregate Principal Balance
1	100
2	100
3	95
4	54
5	22

"FK Rating" means the internal corporate risk factor assigned at any time to any Debtor by the relevant Bank Entity, which is the result of the credit scoring as part of the regular credit process on each Reference Claim and Debtor by the relevant Bank Entity. The scoring incorporates both the quantitative and qualitative assessment of the Debtor's financial condition, market position, operating environment and quality of management. As of the Issue Date the FK Ratings range from the highest FK Rating "1" to the lowest FK Rating "8" and include the following levels: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, and 8 (the "Bank Rating System"). In the event that the Bank should replace the Bank Rating System by any other internal rating system, the Bank may with the consent of the Rating Agencies and the Trustee adjust the Replenishment Conditions relating to FK Ratings to such new rating system.

(v) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Weighted Average FK Rating to be worse than 3.71 or, if the Weighted Average FK Rating is already worse than 3.71 prior to such addition, must improve the Weighted Average FK Rating.

"Weighted Average FK Rating" is calculated by (i) summing the products obtained by multiplying the Debtor Nominal Amount of each Debtor in the Reference Pool by the applicable FK Rating, (ii) dividing such sum by the aggregate Debtor Nominal Amount of the Reference Pool and (iii) rounding the result up to the nearest whole number. "Debtor Nominal Amount" means the sum of the Outstanding Nominal Amounts of the Reference Claims with respect to a Debtor.

(vi) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Reference Pool to contravene, or if the Reference Pool is already in contravention prior to such Replenishment, cause to worsen such contravention of the following Industry Group concentration thresholds:

## Fortsetzung von Anlage 21:

(A) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by Debtors belonging to one of the three largest Industry Groups must not exceed 24% of the Aggregate Principal Balance; and

(B) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by Debtors belonging to the same Industry Group (other than the three largest Industry Groups) must not exceed 8% of the Aggregate Principal Balance.

"Industry Group" means with respect to any Debtor, the industry group classification of such Debtor by the relevant Bank Entity pursuant to the Bank's standard procedures in effect from time to time.

(vii) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Reference Pool to contravene, or if the Reference Pool is already in contravention prior to such addition, cause to worsen such contravention of the following Debtor concentration thresholds:

(A) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 1, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 1.5% of the Aggregate Principal Balance;

(B) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 2, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 1.0% of the Aggregate Principal Balance;

(C) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 2, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 0.5% of the Aggregate Principal Balance, except for a maximum of 5 Debtors;

(D) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 3, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 1.0% of the Aggregate Principal Balance;

(E) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 3, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 0.5% of the Aggregate Principal Balance, except for a maximum of 6 Debtors;

(F) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 3, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 0.25% of the Aggregate Principal Balance, except for a maximum of 26 Debtors;

(G) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 4, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 1.0% of the Aggregate Principal Balance;

(H) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 4, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of

## Fortsetzung von Anlage 21:

the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 0.5% of the Aggregate Principal Balance, except for a maximum of 4 Debtors;

(I) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 4, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 0.25% of the Aggregate Principal Balance, except for a maximum of 14 Debtors;

(J) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 5, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 1.0% of the Aggregate Principal Balance;

(K) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 5, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 0.5% of the Aggregate Principal Balance, except for a maximum of 2 Debtors; and

(L) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by any single Debtor with a FK Rating of 5, together with any other Debtor with the same FK Rating forming a unit with such Debtor within the meaning of § 19(2) of the German Banking Act (Gesetz über das Kreditwesen), must not exceed 0.25% of the Aggregate Principal Balance, except for a maximum of 12 Debtors.

(viii) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Reference Pool to contravene, or if the Reference Pool is already in contravention prior to such addition, cause to worsen such contravention of the following distribution threshold:

the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Reference Claims) owed by Debtors domiciled within the postal code district 0 and 1 (identified by the first digit of the German postal code system) must not exceed 24% of the Aggregate Principal Balance;

(ix) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Reference Pool to contravene, or if the Reference Pool is already in contravention prior to such addition, cause to worsen such contravention of the following distribution threshold:

the aggregate value of the Reference Collateral as determined in accordance with the standard procedures of the Bank for the evaluation of collateral as in effect from time to time must not be less than 30% of the Aggregate Principal Balance, unless the Weighted Average Life of the Reference Pool does not exceed 1.75 years.

(x) No Suspension Event or Early Amortisation Event has occurred and remains unremedied.

A Suspension Event or an Early Amortisation Event shall be remedied and thereby further Replenishments in accordance with this Provision 5 allowed, if the Trustee (A) satisfies itself (x) that the Suspension Event or the Early Amortisation Event no longer subsists and (y) that the Moody's Diversity Score, after the Suspension Event or Early Amortisation Event have been remedied, is as high as it was on the Replenishment Date immediately preceding the relevant occurrence of the Suspension Event or Early Amortisation Event, and (B) sends a notice to this effect to the Bank and the Issuer.

"Suspension Event" means any of the following:

(A) the cumulative Realised Losses (as reduced by any Late Recoveries and as a result of Unjustified Loss Allocation procedure) exceed 1.2% of the Maximum Aggregate Principal Balance,

## Fortsetzung von Anlage 21:

(B) the sum of (i) the cumulative Realised Losses (as reduced by any Late Recoveries and as a result of Unjustified Loss Allocation procedure) and (ii) the product of (x) 0.55 and (y) the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Defaulted Reference Claims exceeds 1.75% of the Maximum Aggregate Principal Balance,

(C) failure by the Bank to deliver a Reference Claim List, or a Report to the Trustee to which the Trustee is entitled, provided that a Replenishment in the absence of such Reference Claim List or Report would, in the professional judgement of the Trustee, adversely affect the interests of the Transaction Creditors in a material manner, or

(D) the aggregate Outstanding Nominal Amount of Defaulted Reference Claims (other than Defaulted Reference Claims in respect of which, as of the time of calculation, the Credit Event was remedied and not including, for clarification, Liquidated Reference Claims) exceeds 2.7% of the Maximum Aggregate Principal Balance.

(xi) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Reference Pool to contravene, or if the Reference Pool is already in contravention prior to such addition, cause to worsen such contravention of the following average life threshold:

the Weighted Average Life of the Reference Pool must not exceed 2.5 years, and if the aggregate value of the Reference Collateral as determined in accordance with the standard procedures of the Bank for the evaluation of collateral as in effect from time to time is less than 30% of the Aggregate Principal Balance, the Weighted Average Life of the Reference Pool must not exceed 1.75 years.

The "Weighted Average Life" of the Reference Pool as of any Replenishment Date (the "Relevant Replenishment Date") shall equal the amount calculated as the sum of the products of:

(a) the remaining life of each Reference Claim (excluding Reference Claims in respect of which a Credit Event has occurred) as of the Relevant Replenishment Date, and

(b) its Outstanding Nominal Amount as of the Relevant Replenishment Date,

divided by the Aggregate Principal Balance as of the Relevant Replenishment Date.

(xii) All Replenishments on the Replenishment Date, taken together, must not cause the Reference Pool to contravene, or if the Reference Pool is already in contravention prior to such addition, cause to worsen such contravention of the following concentration threshold:

the aggregate Outstanding Nominal Amount of all Guarantee Reference Claims (including Outstanding Nominal Amounts of such new Guarantee Reference Claims) shall not exceed 10% of the Aggregate Principal Balance.

(xiii) No such new Reference Claim is held by or on behalf of, or has been originated by, a Bank Entity other than the Bank unless each of the Rating Agencies has given its prior consent to the Replenishment of such new Reference Claim.

For the avoidance of doubt, if a claim does not meet any of the Replenishment Conditions on a given Replenishment Date, it can be added to the Reference Pool pursuant to this Provision 5 as of any subsequent Replenishment Date on which such claim meets the Replenishment Conditions.

Compliance with the Replenishment Conditions is, subject to Provision 9 of the Reference Pool Provisions (Non-compliance), a condition to the Loss Allocation and does not constitute an obligation of the Bank, any other Bank Entity, KfW or the Issuer.

## 6. Servicing Standards

The administration, collection and enforcement of each Reference Claim, including the foreclosure on any related Reference Collateral, will be carried out by (i) the Bank Entities (in such capacity, each a "Servicer") or (ii) in the case of Reference Claims arising under Subparticipations, by a third party agent banks (each an "Agent Bank") specified to the Trustee or (iii) in the case of Reference Claims arising under syndicated Reference Transactions, by a Servicer or an Agent Bank. Each Bank Entity will:

## Fortsetzung von Anlage 21:

(a) service each Reference Claim, to the extent it is not serviced by an Agent Bank, in accordance with the Credit and Collection Policies (in the case of a syndicated Reference Transaction subject to the servicing conditions under such Reference Transaction documentation), and

(b) monitor in accordance with the Credit and Collection Policies that each Reference Claim serviced by an Agent Bank is serviced in accordance with the relevant Reference Transaction documentation,

subject, in each case, to the servicing principles set out in Appendix C to the Terms and Conditions (the "Servicing Principles"). The Servicing Principles constitute an integral part of the Terms and Conditions.

The Credit and Collection Policies (as subject to the servicing conditions under the syndicated Reference Transactions documentation) and the Servicing Principles are referred to together as the "Servicing Standards".

Compliance with the Servicing Standards is, subject to Provision 9 of the Reference Pool Provisions (Non-compliance), a condition to the Loss Allocation and does not constitute an obligation of the Bank, any other Bank Entity, any Servicer, KfW or the Issuer.

### 7. Allocations of Payments and Foreclosure Proceeds; Set-off

#### 7.1 Allocation of Payments

Subject to any binding allocation of a payment to a particular claim by the relevant payer or by applicable law and subject to the allocation of proceeds from the Reference Collateral, in the event that a Bank Entity receives a payment on a Reference Claim or any other payment claim against the Debtor of a Reference Claim and such payment is less than the total amount then due under such Reference Claim and such other claims, the payment received shall be allocated in proportion of the Outstanding Nominal Amount of such Reference Claim to the actual outstanding principal amounts of any such other claims. Prior to the occurrence of a Credit Event in respect of a Reference Claim, the relevant Bank Entity may allocate the payments received and allocated to such Reference Claim to the interest due on, the principal of, the costs and expenses in respect of and/or any other claims under such Reference Claim in accordance with the Credit and Collection Policies.

#### 7.2 Allocation of Foreclosure Proceeds

In the case of a foreclosure on the Reference Collateral, the proceeds from such foreclosure received by any Bank Entity shall be allocated to the Reference Claims in accordance with Provision 3.1 (Reference Collateral - Allocation). Payments to any Bank Entity which are made to redeem the Reference Collateral shall be deemed to be proceeds from foreclosure. Payments made on a claim secured by the Reference Collateral after a Credit Event has occurred in respect of a Reference Claim secured by the same Reference Collateral, shall be allocated to the Reference Claims as provided in Provision 3.1 (Reference Collateral - Allocation), regardless of the due date of the claims, subject to any binding allocation of a payment to a particular claim by the relevant payer. Otherwise, payments received shall be allocated as provided in Provision 7.1 (Allocations of Payments and Foreclosure Proceeds; Set-off - Allocation of Payments).

#### 7.3 Allocation upon Credit Event

Subject to any binding allocation of a payment to a particular claim by the relevant payer after the occurrence of a Credit Event with respect to a particular Reference Claim, any amounts paid on such Reference Claim and proceeds from foreclosure of Reference Collateral allocated to such Reference Claim pursuant to Provision 7.1 (Allocations of Payments and Foreclosure Proceeds - Allocation of Payments), Provision 7.2 (Allocations of Payments and Foreclosure Proceeds - Allocation of Foreclosure Proceeds) and Provision 3.1 (Reference Collateral - Allocation), shall be allocated first to reduce the Outstanding Nominal Amount of such Reference Claim and only after the Outstanding Nominal Amount has been repaid in full to costs and expenses and the accrued contractual and/or default interest with respect to such Reference Claim.

#### 7.4 Non-compliance with Allocation Rules

In the event that Provisions 7.1 through 7.3 (Allocations - Allocation of Payments, - Allocation of Foreclosure Proceeds, - Allocation upon Credit Event), as applicable, are not complied with, the allocation of the

## Fortsetzung von Anlage 21:

relevant payments or foreclosure proceeds shall be deemed to have been effected in compliance with such Provisions.

### 7.5 Set-off

Each Bank Entity may, at its sole discretion, set off any amounts due under a Reference Claim against any amount due by the relevant Bank Entity to the Debtor of such Reference Claim in accordance with the terms of the underlying Reference Transaction, the Credit and Collection Policies and applicable law.

### 8. Transfers

Each Bank Entity may transfer any Reference Claim after the Issue Date to:

(A) a third party (other than a Bank Entity), provided that:

(i) a Bank Entity remains responsible for the servicing of the relevant Reference Claim in accordance with the Servicing Standards and a Bank Entity remains responsible for the determination and allocation of Realised Losses in respect of such Reference Claim in accordance with the Terms and Conditions,

(ii) the standards of servicing and the determination and allocation of Realised Losses remain unchanged upon such transfer,

(iii) the obligations of the Bank Entities under the Transaction Documents continue to be complied with, and

(iv) in the professional judgement of the Trustee such transfer shall not adversely affect the interests of the Transaction Creditors;

(B) any Bank Entity, provided that: the requirements under (A)(i) through (iii) are met.

The Bank may remove any Reference Claim transferred in accordance with the requirements set out under (A) above from the Reference Pool in accordance with the procedures set out in the Trust Agreement.

The Reference Pool and the rights and obligations under the Terms and Conditions including the Loss Allocation shall not be affected by a transfer of a Reference Claim in accordance with this Provision 8.

### 9. Non-compliance

(a) If in respect of a Reference Claim (i) any of the Eligibility Criteria as of the Issue Date, or (ii) any of the Replenishment Conditions as of the relevant Replenishment Date, or (iii) at any time on or after the Issue Date or the Replenishment Date on which such Reference Claim was added to the Reference Pool, as relevant, any Servicing Standard, or (iv) any requirement for transfer of such Reference Claim pursuant to Provision 8(A) (Transfers) is not complied with, such Reference Claim shall not qualify for the allocation of Realised Losses pursuant to the Loss Allocation and the Bank may remove such Reference Claim from the Reference Pool in accordance with the procedures set out in the Trust Agreement, unless:

(A) the Trustee has confirmed in writing to the Bank that in its professional judgement it can conclude that such non-compliance could not cause Realised Losses (whether actual or potential) with respect to such Reference Claim which would otherwise not arise,

or, in each case, (if the non-compliance can be fully remedied)

(B) such non-compliance (and any adverse effects of such non-compliance on the interest of the Transaction Creditors) is fully remedied (i) within 30 calendar days after the Bank has become aware of such non-compliance (whether by notification from the Trustee or otherwise) and (ii) prior to occurrence of a Credit Event,

provided that:

(i) if no Credit Event has occurred in respect of a Reference Claim and the Eligibility Criteria, Replenishment Conditions or Servicing Standards are not met in part only in respect of such Reference Claim, the Bank may

## Fortsetzung von Anlage 21:

remove such portion of such Reference Claim from the Reference Pool which is necessary to cure such partial non-compliance and the remaining portion of the Reference Claim shall continue to qualify for the Loss Allocation,

(ii) even where the conditions set out in (A) and/or (B) above do not apply, a Realised Loss (or any portion thereof) may nevertheless be allocated to the Notes to such extent that the Trustee has confirmed in writing to the Bank that the relevant non-compliance has not resulted in or contributed to such Realised Loss, and

(iii) in the case of breach of the Eligibility Criterion under Provision 4(n) (Eligibility Criteria) and the related Servicing Principle under Section 2, sixth paragraph of the Servicing Principles, the relevant Reference Claim shall qualify for the Loss Allocation if the Credit Event in respect of such Reference Claim occurred on or before the end of the Collection Period immediately preceding the Scheduled Maturity Date.

(b) If any of the Eligibility Criteria or Replenishment Conditions is not complied with in respect of the Reference Pool (as opposed to a specific Reference Claim) the above shall apply to all Reference Claims affected by such non-compliance. If such non-compliance can be fully remedied by removing one or more Reference Claims the addition of which to the Reference Pool resulted in such non-compliance or adding, as relevant, one or more Reference Claims to the Reference Pool, the Bank may effect such removal or addition, as relevant, in accordance with the Terms and Conditions and the Trust Agreement and such removal or addition, as relevant, shall constitute full remedy of such non-compliance pursuant to (a)(B) above.

(c) If (i) under any Eligibility Criterion or Replenishment Condition the Outstanding Nominal Amount or number of Reference Claims is required not to exceed a given amount, number or measure as of a given time, (ii) such Eligibility Criterion or Replenishment Condition is not complied with, (iii) such non-compliance is not remedied, and (iv) a Realised Loss occurs in respect of one or more of such Reference Claims (each Reference Claim in respect of which the conditions (i) through (iv) are met, an "Affected Reference Claim"), then an Affected Reference Claim (or any portion thereof) shall not qualify for the Loss Allocation to the extent that the removal of such Affected Reference Claim (or portion thereof) together with all other then existing Affected Reference Claims from the Reference Pool immediately after the Issue Date or the relevant Replenishment Date, as relevant, would have been necessary to remedy the non-compliance with such Eligibility Criterion or Replenishment Condition. Provision 9(a)(A) and the proviso (ii) following paragraph (B) in Provision 9(a) shall not apply in respect of Affected Reference Claims which do not qualify for the Loss Allocation pursuant to this paragraph (c).

(d) Except as set out in this Provision 9 there shall be no recourse against the Bank, any other Bank Entity, any Servicer, KfW or the Issuer for any non-compliance with the Eligibility Criteria, Replenishment Conditions, Servicing Standards and/or requirements for transfer of a Reference Claim pursuant to Provision 8(A). To the extent that a Realised Loss in respect of any Reference Claim may not be allocated to the Notes pursuant to paragraphs (a) through (c), such Reference Claim shall be referred to as a "Non-qualifying Reference Claim".

## Literaturverzeichnis

Abramowitz, M.; Stegun, I. A.: [Handbook of mathematical functions]

Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables, 10<sup>th</sup> Printing, New York 1972.

Adler, H.; Düring, W.; Schmaltz, K.: [Rechnungslegung und Prüfung: Teilband 3]

Rechnungslegung und Prüfung der Unternehmen : Kommentar zum HGB, AktG, GmbHG, PubLG nach den Vorschriften des Bilanzrichtlinien-Gesetzes (Teilband 3), 6., neu bearb. Aufl., Stuttgart 1996.

Agresti, A.: [Categorical data analysis]

Categorical data analysis, New York et al. 1990.

Althaus, T.: [Verbriefung in Deutschland]

Verbriefung in Deutschland aus der Sicht der Ratingagentur. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 56. Jg. (2003), Nr. 12, S. 632-638.

Altman, E. I.; Kishore, V. M.: [Recoveries on defaulted bonds]

Almost everything you wanted to know about recoveries on defaulted bonds. In: “Financial Analysts Journal”, Vol. 52 (1996), No. 6, S. 57-64.

Andres, P.: [Black/Scholes-Optionspreisformel]

Von der Black/Scholes-Optionspreisformel zum GARCH-Optionsbewertungsmodell, Köln 1998.

Arthur Cox: [Establishing SPVs in Ireland]

Establishing special purpose vehicles in Ireland for structured finance transactions (Arthur Cox, Capital Markets Group, Memorandum), Dublin 2005.

Artzner, P.; Delbaen, F.: [Default risk insurance]

Default risk insurance and incomplete markets. In: “Mathematical Finance”, Vol. 5 (1995), No. 3, S.187-195.

Arvantis, A.; Gregory, J.: [Credit]

Credit: The complete guide to pricing, hedging and risk management, London 2004.

Asarnow, E.; Edwards, D.: [Loss on defaulted bank loans]

Measuring loss on defaulted bank loans: A 24-year study. In: “Journal of Commercial Lending”, Vol. 77 (1995), No. 7, S. 11-23.

Bakshi, G.; Madan, D.; Zhang, F.: [Implied recovery rates]

Understanding the role of recovery in default risk models: Empirical comparisons and implied recovery rates (University of Maryland, Robert H. Smith School of Business, Department of Finance; Federal Reserve Board, Division of Research and Statistic; Working Paper), Adelphi und Washington 2001.

Bangia, A. et al.: [Rating migration and the business cycle]

Rating migration and the business cycle, with applications to credit portfolio stress testing. In: “Journal of Banking and Finance”, Vol. 26 (2002), No. 2, S. 445-474.

Bär, H. P.: [Asset Securitisation]

Asset Securitisation: Die Verbriefung von Finanzaktiven als innovative Finanzierungstechnik und neue Herausforderung für Banken, Dissertation, Bern, Stuttgart und Wien 1997.

Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): [Banks' internal ratings systems]

Range of practice in banks' internal ratings systems (Bank for International Settlements, Discussion Paper), Basel 2000.

Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): [1<sup>st</sup> Working paper on securitisation]

Working paper on the treatment of asset securitisation (Bank for International Settlements, Basel Committee on Banking Supervision Publications, Working Paper No. 10), Basel 2001.

Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): [2<sup>nd</sup> Working paper on securitisation]

Second working paper on securitisation (Bank for International Settlements, Basel Committee on Banking Supervision Publications, Working Paper No. 11), Basel 2002.

Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): [Basel II]

International convergence of capital measurement and capital standards: A revised framework (Bank for International Settlements, Final Document on the New Basel Capital Accord), Basel 2004.

Bauer, H.: [Wahrscheinlichkeits- und Maßtheorie]

Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie, 3., neubearb. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin und New York 1978.

Bauer, H.: [Maß- und Integrationstheorie]

Maß- und Integrationstheorie, 2., überarb. Aufl., Walter de Gruyter, Berlin und New York 1992.

Baule, R.: [Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement]

Wertorientiertes Kreditportfoliomanagement – Analyse von Optimierungs- und Steuerungsansätzen für Bankkreditportfolios vor dem Hintergrund des Shareholder-Value-Prinzips, Dissertation, Göttingen 2004.

Baumeister, B.: [Charakteristische Funktionen]

Die Bedeutung von charakteristischen Funktionen in der mathematischen Statistik und deren Anwendungen, Dissertation, Heidelberg 1989.

Bea, F. X.; Dichtl, E.; Schweitzer, M.: [Allgemeine BWL I]

Allgemeine Betriebswirtschaftslehre Band I: Grundlagen, 8., neubearb. und erw. Aufl., Stuttgart 2000.

Bebchuk, L. A.; Chang, H. F.: [Bargaining and the division of value]

Bargaining and the division of value in corporate reorganization. In: "Journal of Law, Economics, and Organizations", Vol. 8 (1992), No. 2, S. 253-279.

Becker, A.; Wolf, M.: [Treasury von Kreditrisiken mit Kreditderivaten]

Die Treasury von Kreditrisiken mit Kreditderivaten: Einsatzmöglichkeiten, Aufsichtsrecht, Revisionsansätze. In: R. Eller, W. Gruber und M. Reif (Hrsg.), „Risikomanagement und Risikocontrolling im modernen Treasury-Management“, Stuttgart 2002, S. 707-746.

- Bélanger, A.; Shreve, S. E.; Wong, D.: [Pricing credit risk]  
A general framework for pricing credit risk (Working Paper), Toronto, Pittsburgh und Atlanta 2003.
- Benner, W.: [ABS]  
Asset Backed Securities: Eine Finanzinnovation mit Wachstumschancen? In: „Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis“, 40. Jg. (1988), Nr. 5, S. 403-417.
- Berblinger, J.: [Moody's Rating]  
Marktakzeptanz des Ratings durch Qualität. In: E. Büschgen und O. Everling (Hrsg.), „Handbuch Rating“, Wiesbaden 1996, S. 21-110.
- Bergman, S.: [CDO Evaluator]  
CDO Evaluator applies correlation and Monte Carlo simulation to the art of determining portfolio quality (Standard & Poor's, Structured Finance), New York 2001. WWW: [http://www.standardandpoors.com/emarketing/structuredfinance/copyof111201\\_evaluator.html](http://www.standardandpoors.com/emarketing/structuredfinance/copyof111201_evaluator.html), geladen am: 18. September 2005.
- Bertsekas, D. P.; Tsitsiklis, J. N.: [Probability]  
Introduction to probability, 2. Aufl., Belmont, Massachusetts 2002.
- Betker, B. L.: [Deviations from absolute priority]  
Management's incentives, Equity's bargaining power, and deviations from absolute priority in Chapter 11 bankruptcies. In: „Journal of Business“, Vol. 68 (1995), No. 2, S. 161-183.
- Beutler, M.: [Kreditrisikomanagement von Banken]  
Anforderungen an das Kreditrisikomanagement von Banken: Messung und Unterlegung von Kreditrisiken aus bankwirtschaftlicher und regulatorischer Perspektive, Dissertation, St. Gallen 2001.
- Bielecki, T. R.; Jeanblanc, M.; Rutkowski, M.: [Modeling and valuation of credit risk]  
Modeling and valuation of credit risk: CIME-EMS Summer School on Stochastic Methods in Finance, Bressanone, July 6-12, 2003 (Draft), Chicago, Évry und Warszawa 2004.
- Bielecki, T. R.; Rutkowski, M.: [Credit risk]  
Credit risk: Modeling, valuation and hedging, 1<sup>st</sup> Edition (Corrected 2<sup>nd</sup> Printing), Berlin, Heidelberg und New York 2004.
- Bishop, Y. M. M.; Fienberg, S. E.; Holland, P. W.: [Discrete multivariate analysis]  
Discrete multivariate analysis: Theory and practice, 12<sup>th</sup> Printing, Cambridge, Massachusetts und London 1995.
- Black, F.; Cox, J.: [Bond indenture provisions]  
Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions. In: „Journal of Finance“, Vol. 31 (1976), No. 2, S. 351-367.
- Black, F.; Scholes, M.: [Options and corporate liabilities]  
The pricing of options and corporate liabilities. In: „Journal of Political Economy“, Vol. 81 (1973), No. 3, S. 637-654.

Blaschke, S.; Schildbach, S.: [Konzernrechnungslegung]  
Konzernrechnungslegung. In: E. Löw (Hrsg.), „Rechnungslegung für Banken nach IFRS“, 2., vollst. überarb. und erw. Aufl., Wiesbaden 2005, S. 307-413.

Bluhm, C.: [CDO modeling]  
CDO modeling: Techniques, Examples and applications (HypoVereinsbank, Group Credit Portfolio Management, Working Paper), Munich 2003.

Bohn, J. R.: [Characterizing credit spreads]  
Characterizing credit spreads (University of California, Haas School of Business, Working Paper), Berkeley 1999.

Bohn, J. R.: [Contingent-claims approaches]  
A survey of contingent-claims approaches to risky debt valuation. In: “Journal of Risk Finance”, Vol. 1 (2000), No. 3, S. 53-70.

Bos, R. J.: [Initial trading price: Poor recovery indicator]  
Initial trading price: Poor recovery indicator for defaulted debt. In: Standard & Poor’s (Hrsg.), “Ratings Performance 2002: Default, transitions, recovery, and spreads (Corporate Default Study)”, New York 2003, S. 63-66.

Bosak, J. M.: [Steuerrechtliche Konsequenzen einer Asset Backed Securitisation]  
Die steuerrechtlichen Konsequenzen einer Asset Backed Securitisation mittels einer deutschen Zweckgesellschaft. In: „Finanz Betrieb“, 7. Jg. (2005), Nr. 9, S. 545-549.

Brady, B.; Vazza, D.; Bos, R. J.: [Corporate defaults]  
Corporate defaults peak in 2002 amid record amounts of defaults and declining credit quality. In: Standard & Poor’s (Hrsg.), “Ratings Performance 2002: Default, transitions, recovery, and spreads (Corporate Default Study)”, New York 2003, S. 5-49.

Brealey, R. A.; Myers, S. C.: [Corporate finance]  
Principles of corporate finance, 7<sup>th</sup> Edition, New York et al. 2003.

Bund, S.: [Asset Securitisation]  
Asset Securitisation – Anwendbarkeit und Einsatzmöglichkeiten in deutschen Universal-  
kreditinstituten, Dissertation, Hohenheim 2000.

Bund, S.: [CDOs]  
Collateralized Debt Obligations: Die Formel 1 unter den Asset Backed Securities. In: „Die Bank“, o. Jg. (2000), Nr. 3, S.196-201.

Bund, S. et al.: [Synthetic securitisation]  
Synthetic securitisation: Unique structures, analytical challenges (Fitch IBCA, Duff & Phelps, Structured Finance, Special Report), London und New York 2001.

Bund, S. et al.: [Promise-K 2001-1 plc]  
Promise-K 2001-1 plc (Fitch IBCA, Duff & Phelps, Structured Finance, New Issue Report, May 24th), London 2001.

Bund, S.; van der Weijden, M.; Lench, M.: [European SME CDOs]  
European SME CDOs: An investors guide to analysis and performance (Fitch IBCA, Duff & Phelps, European Structured Finance, Special Report), London 2001.

Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen (BaKred): [Behandlung von ABS]  
Rundschreiben zur Veräußerung von Kundenforderungen im Rahmen von Asset-Backed-Securities-Transaktionen durch deutsche Kreditinstitute, Berlin 1997.

Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen (BaKred): [Synthetische Verbriefungen]  
Entwurf zur Behandlung von Risikoaktiva im Grundsatz I, die im Rahmen einer synthetischen Verbriefungstransaktion besichert werden (Entwurf vom 12. März), Bonn 2002.

Burger, A.; Buchhart, A.: [Risiko-Controlling]  
Risiko-Controlling, München 2002.

Burghof, H.-P.; Henke, S.; Rudolph, B.: [Kreditderivate]  
Kreditderivate als Instrumente eines aktiven Kreditrisikomanagements. In: „Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft“, 10. Jg. (1998), Nr. 5, S. 277-286.

Burtschell, X.; Gregory, J.; Laurent, J.-P.: [CDO pricing models]  
A comparative analysis of CDO pricing models (BNP-Paribas und University of Lyon, ISFA Actuarial School, Working Paper), Lyon 2005.

Büschgen, H. E.: [Internationales Finanzmanagement]  
Internationales Finanzmanagement, 3., völlig neu bearb. und erw. Aufl., Frankfurt a. M. 1997.

Carty, L. V.; Lieberman, D.: [Historical default rates]  
Historical default rates of corporate bond issuers, 1920-1996 (Moody's Investors Service, Global Credit Research, Special Comment), New York 1997.

Cheng, J. T.: [Stochastic processes]  
Stochastic processes: Notes (University of Yale, Lecture Notes, New Haven 2001).  
WWW: <http://www.stat.yale.edu/~jtc5/251/bm.pdf>, geladen am 30. April 2004.

Cheng, S. H. et al.: [Approximating the logarithm of a matrix]  
Approximating the logarithm of a matrix to specified accuracy (Manchester Centre for Computational Mathematics, Numerical Analysis Report No. 353), Manchester 1999.

Cherubini, U.; Luciano, E.; Vecchiato, W.: [Copula methods in finance]  
Copula methods in finance, Chichester 2004.

Chu, E.; George, A.: [FFT]  
Inside the FFT black box: Serial and parallel fast Fourier transform algorithms, Boca Raton et al. 2000.

Cifuentes, A.; O'Connor, G.: [BET]  
The binomial expansion method applied to CBO/CLO-Analysis (Moody's Investors Service, Global Credit Research, Structured Finance, Special Report, December), New York 1996.

Cogan, P. et al.: [Rating criteria for CDOs]  
Rating criteria for cash flow collateralized debt obligations (Fitch IBCA, Duff & Phelps, Structured Finance, Loan Products Special Report, November 30<sup>th</sup>), New York et al. 2000.

Collin-Dufresne, P.; Goldstein, R. S.; Martin, S. J.: [Credit spread changes]  
The determinants of credit spread changes. In: "Journal of Finance", Vol. 56 (2001), No. 6, S. 2177-2207.

Cousseran, O.; Rahmouni, I.: [The CDO market]  
The CDO market: Functioning and implications in terms of financial stability. In: "Financial Stability Review (Banque de France)", o. Jg. (2005), No. 6, S. 43-62.

Cox, J. C.; Ingersoll, J. E.; Ross, S. A.: [Term structure of interest rates]  
A theory of the term structure of interest rates. In: "Econometrica", Vol. 53 (1985), No. 2, S. 385-407.

Cox, J. C.; Ross, S. A.: [Alternative stochastic processes]  
The valuation of options for alternative stochastic processes. In: "Journal of Financial Economics", o. Jg. (1976), No. 3, S. 145-166.

Credit Suisse First Boston (CSFB): [CR+™ Technical Document]  
The CreditRisk+ Model: A credit risk management framework (Technical Document), London 1997.

Crosbie, P. J.; Bohn, J. R.: [Modeling default risk]  
Modeling default risk: Modeling methodology (Moody's KMV Company, Working Paper), San Francisco 2003.

Crouhy, M.; Galai, D.; Mark, R.: [Current credit risk models]  
A comparative analysis of current credit risk models. In: "Journal of Banking & Finance", Vol. 24 (2000), No. 1/2, S. 59-117.

Crouhy, M.; Galai, D.; Mark, R.: [Risk management]  
Risk management, New York et al. 2001.

Davis, M.: [Mathematics of financial markets]  
Mathematics of financial markets. In: B. Engquist und W. Schmid (Hrsg.), "Mathematics unlimited: 2001 and beyond", Berlin et al. 2001, S. 361-380.

Dellacherie, C.; Meyer, P.-A.: [Probabilities and potential]  
Probabilities and potential, Amsterdam, New York und Oxford 1978 (Übersetzung aus dem Französischem, Originaltitel: "Probabilités et potentiel").

Dellacherie, C.; Meyer, P.-A.: [Probabilities and potential B]  
Probabilities and potential B: Theory of Martingales, Amsterdam, New York und Oxford 1982 (Übersetzung aus dem Französischem, Originaltitel: "Probabilités et potentiel B").

Deutsch, H.-P.; Eller, R.: [Derivate und interne Modelle]  
Derivate und interne Modelle: Modernes Risikomanagement, Stuttgart 1998.

Deutsche Bundesbank: [Schätzung von Zinsstrukturkurven]  
Schätzung von Zinsstrukturkurven. In: „Deutsche Bundesbank Monatsbericht“, o. Jg. (1997), Nr. 10, S. 61-66.

Dieci, L.: [Computing logarithms of matrices]

Considerations on computing real logarithms of matrices, Hamiltonian logarithms, and skew-symmetric logarithms. In: "Linear Algebra and its Applications", Vol. 244 (1996), S. 35-54.

Dieci, L.; Papini, A.: [Padé approximation of the logarithm of a matrix]

Conditioning and Padé approximation of the logarithm of a matrix. In: "SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications", Vol. 21 (2000), No. 3, S. 913-930.

Dresdner Kleinwort Wasserstein: [Promise-K 2001-1 plc]

Promise-K 2001-1 plc (Information Memorandum), Frankfurt a. M. 2001.

Dreyer, G.; Schmid, H.; Kronat, O.: [Bilanzbefreiende Wirkung von ABS]

Bilanzbefreiende Wirkung von Asset-Backed-Securities Transaktionen: Kritische Anmerkungen zur IDW Stellungnahme IDW RS HFA 8. In: „Betriebs-Berater“, o. Jg. (2003), Nr. 2, S. 91-97.

Duffee, G.: [Treasury yields and corporate bond yield spreads]

Treasury yields and corporate bond yield spreads: An empirical analysis (Federal Reserve Board, Working Paper), Washington 1996.

Duffie, D.; Gârleanu, N.: [CDOs]

Risk and valuation of collateralized debt obligations (Stanford University, Graduate School of Business, Working Paper), Stanford 2001. In modifizierter Form erschienen in: "Financial Analysts Journal", Vol. 57 (2001), No. 1, S. 41-59.

Duffie, D.; Huang, M.: [Swap rates and credit quality]

Swap rates and credit quality. In: "Journal of Finance", Vol. 51 (1996), No. 3, S. 921-949.

Duffie, D.; Singleton, K. J.: [Term structures of defaultable bonds]

Modeling term structures of defaultable bonds. In: "Review of Financial Studies", Vol. 12 (1999), No. 4 (Special), S. 687-720.

Düllmann, K.; Uhrig-Homburg, M.; Windfuhr, M.: [Risk structure of interest rates]

Risk structure of interest rates: An empirical analysis for Deutschemark-denominated bonds. In: "European Financial Management", Vol. 6 (2000), No. 3, S. 367-388.

Eberhart, A. C.; Moore, W. T.; Roenfeldt, R. L.: [Priority rule violations]

Security pricing and deviations from the absolute priority rule in bankruptcy proceedings. In: "Journal of Finance", Vol. 45 (1990), No. 5, S. 1457-1469.

Eberlein, E.; Keller, U.: [Hyperbolic distributions in finance]

Hyperbolic distributions in finance. In: "Bernoulli", Vol. 1 (1995), No. 3, S. 281-299.

Eichholz, R.; Nelgen, M.: [ABS]

Asset Backed Securities – ein Finanzierungsinstrument auch für den deutschen Markt? In: „Der Betrieb“, 45. Jg. (1992), Nr. 17, S. 793-797.

Elliott, R. J.: [Stochastic calculus]

Stochastic calculus and applications, New York, Heidelberg und Berlin 1982.

Embrechts, P.; Klüppelberg, C.; Mikosch, T.: [Modelling extremal events]  
Modelling extremal events for insurance and finance, Corrected 4<sup>th</sup> Printing, Berlin et al.  
2003.

Eng, T.; MacKay, A.: [Facts & figures 2004]  
Facts & figures 2004: The way it was (Commerzbank, Corporates & Markets, Structured  
Finance Pan European Research, Sector Review), London 2005.

Engellandt, F.; Lütje, G.: [Bilanzierung von ABS-Transaktionen]  
Rechtsnatur und Bilanzierung von Asset-Backed Securities-Transaktionen. In: „Die Wirt-  
schaftsprüfung“, 49. Jg. (1996), Nr. 14, S. 517-521.

Eom, Y. H.; Helwege, J.; Huang, J.-Z.: [An empirical analysis of structural models]  
Structural models of corporate bond pricing: An empirical analysis. In: “Review of Finan-  
cial Studies”, Vol. 17 (2004), No. 2, S. 499-544.

Estrella, A. et al.: [Credit ratings]  
Credit ratings and complementary sources of credit quality information (Bank for Interna-  
tional Settlements, Basel Committee on Banking Supervision Publications, Working Paper  
No. 3), Basel 2000.

European Securitisation Forum (ESF): [ESF Securitisation]  
ESF Securitisation: Data Report (ESF Securitisation Data Report), Washington, New York  
und London 2003, 2004, 2005.

Federal Reserve System Task Force (FRSTF) on Internal Credit Risk Models: [Credit risk  
models at U.S. banks]  
Credit risk models at major U.S. banking institutions: Current state of the art and implica-  
tions for assessments of capital adequacy (Survey), New York 1998.

Findeisen, K.-D.: [ABS nach US-GAAP und HGB]  
Asset-Backed Securities im Vergleich zwischen US-GAAP und HGB. In: „Der Betrieb“,  
51. Jg. (1998), Nr. 10, S. 481-488.

Finger, C. C.: [Conditional approaches]  
Conditional approaches for CreditMetrics portfolio distributions. In: “CreditMetrics Moni-  
tor”, o. Jg. (1999), S. 14-33.

Finger, C. C.: [CreditGrades™ Technical Document]  
CreditGrades™: Technical Document, o. O. 2002.

Fons, J. S.: [Term structure of credit risk]  
Using default rates to model the term structure of credit risk. In: “Financial Analysts Jour-  
nal”, Vol. 50 (1994), No. 5, S. 25-32.

Franks, J. R.; Torous, W. N.: [U.S. firms in reorganization]  
An empirical investigation of U.S. firms in reorganization. In: “Journal of Finance”, Vol.  
44 (1989), No. 3, S. 747-769.

Franks, J. R.; Torous, W. N.: [Financial recontracting]  
A comparison of financial recontracting in distressed exchanges and Chapter 11 reorgani-  
zations. In: “Journal of Financial Economics”, Vol. 35 (1994), No. 3, S. 349-370.

- Fubini, G.: [Sugli integrali multipli]  
Sugli integrali multipli. In: G. Fubini, „Opere scelte a cura dell’Unione Matematica Italiana e col contributo del Consiglio Nazionale delle Ricerche“, Vol. II, Roma 1958, S. 243-249.
- Gallego, H.; Kuti, C.; Baddeley, S.: [Pan-European SME CDO performance tracker]  
Pan-European SME CDO performance tracker (Fitch Ratings, CDO Performance Report), London 2005.
- Gehring, B.: [ABS im amerikanischen und deutschen Recht]  
Asset-backed Securities im amerikanischen und im deutschen Recht, München 1999.
- Gemmill, G.: [Testing Merton’s model for credit spreads]  
Testing Merton’s model for credit spreads on zero-coupon bonds (London City University, Faculty of Finance, Working Paper), London 2002.
- Geske, R.: [Liabilities as compound options]  
The valuation of corporate liabilities as compound options. In: “Journal of Financial and Quantitative Analysis”, Vol. 12 (1977), No. 4, S. 541-552.
- Geurts, M.: [Steuerliche Aspekte]  
Steuerliche Aspekte bei Asset backed Securities. In: „Der Betrieb“, 52. Jg. (1999), Nr. 9, S. 451-454.
- Giese, G.: [Enhancing CreditRisk+]  
Enhancing CreditRisk+. In: “Risk”, Vol. 16 (2003), No. 4, S. 73-77.
- Giesecke, K.: [Default and information]  
Default and information (Cornell University, Department of Operations Research and Industrial Engineering, Working Paper), Ithaca 2003.
- Giesecke, K.: [Introduction to credit risk modeling]  
Credit risk modeling and valuation: An introduction. In: D. Shimko (Hrsg.), “Credit risk: Models and management”, London 2004, S. 487-526.
- Glasserman, P.: [Monte Carlo methods]  
Monte Carlo methods in financial engineering, New York et al. 2004.
- Glüder, D.; Böhm, H.: [Innovationen im Fördergeschäft]  
Neue KfW-Modelle – Innovationen im Fördergeschäft. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 56. Jg. (2003), Nr. 12, S. 646-651.
- Goodman, L. S.; Fabozzi, F. J.: [Structures and analysis of CDOs]  
Collateralized debt obligations: Structures & analysis, Hoboken, New Jersey 2002.
- Gordy, M. B.: [Anatomy of credit risk models]  
A comparative anatomy of credit risk models. In: “Journal of Banking and Finance”, Vol. 24 (2000), No. 1-2, S. 119-149.
- Gordy, M. B.: [Saddlepoint approximation of CR+]  
Saddlepoint approximation of CreditRisk+. In: “Journal of Banking and Finance”, Vol. 26 (2002), No. 7, S. 1335-1353.

- Greenberg, A. et al.: [Tuning correlation and tail risk]  
Tuning correlation and tail risk to the market prices of liquid tranches (Lehman Brothers, Fixed Income Quantitative Credit Research, Publication), London und New York 2004.
- Gregory, J.; Laurent, J.-P.: [Beste Überlebenschancen]  
Beste Überlebenschancen. In: „Deutsches Risk“, Bd. 4 (2004), Nr. 1, S. 31-37.
- Grimmett, G. R.; Stirzaker, D. R.: [Probability]  
Probability and random processes, 3<sup>rd</sup> Edition, Oxford et al. 2001.
- Grundke, P.: [Kreditrisikomodelle]  
Kreditrisikomodelle und Regulierung. In: „Zeitschrift für Bankrecht und Bankwirtschaft“, 12. Jg. (2000), Nr. 2, S. 101-112.
- Grundke, P.: [Bewertung von Kreditderivaten]  
Bewertung von Kreditderivaten in einem ratingbasierten Modell (Universität zu Köln, Arbeitspapier), Köln 2000.
- Guha, R.: [Recovery of face value at default]  
Recovery of face value at default: Theory and empirical evidence (London Business School, Preliminary Working Paper), London 2002.
- Haaf, H.; Reiß, O.; Schoenmakers, J.: [Computation of CreditRisk+]  
Numerically stable computation of CreditRisk+. In: M. Gundlach und F. Lehrbass (Hrsg.), „CreditRisk+ in the Banking Industry“, Berlin et al. 2004, S. 69-77.
- Hamilton, D. et al.: [European default & recovery rates]  
Default & recovery rates of European corporate bond issuers: 1985-2001 (Moody's Investors Service, Global Credit Research, Special Comment), New York 2002.
- Hamilton, D. et al.: [Default & recovery rates]  
Default & recovery rates of corporate bond issuers: A statistical review of Moody's ratings performance, 1920-2002 (Moody's Investors Service, Global Credit Research, Special Comment), New York 2003.
- Harrison, M. J.; Kreps, D. M.: [Martingales and arbitrage]  
Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. In: „Journal of Economic Theory“, Vol. 20 (1979), No. 3, S. 381-408.
- Hartmann-Wendels, T.; Pfingsten, A.; Weber, M.: [Bankbetriebslehre]  
Bankbetriebslehre, 3., überarb. Aufl., Berlin et al. 2004.
- Hayt, G.: [How to price credit risk]  
How to price credit risk. In: „Risk“, Vol. 13 (2000), No. 1, S. 87 f.
- He, J.; Hu, W.; Lang, L.: [Credit spread curves]  
Credit spread curves and credit ratings (Chinese University of Hong Kong, Working Paper), Hong Kong 2000.
- Heath, D.; Jarrow, R.; Morton, A.: [Term structure of interest rates]  
Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. In: „Econometrica“, Vol. 60 (1992), No. 1, S. 77-105.

Heidorn, T.; König, K.: [CDOs]

Investitionen in Collateralized Debt Obligations (Hochschule für Bankwirtschaft / HfB, Working Paper, Nr. 44), Frankfurt a. M. 2003.

Heinke, V.: [Bonitätsrisiko und Credit Ratings]

Bonitätsrisiko und Credit Rating festverzinslicher Wertpapiere, Bad Soden im Taunus 1998.

Helwege, J.; Turner C. M.: [Credit yield curves for speculative-grade issuers]

The slope of the credit yield curve for speculative-grade issuers. In: "Journal of Finance", Vol. 54 (1999), No. 5, S. 1869-1884.

Henehan, P.: [Taxing issues]

Taxing issues. In: "Global Reinsurance Special Report: Dublin", o. Jg. (2001), S. 34-36.

Herrmann, M.: [Collateralized Loan Obligations]

Collateralized Loan Obligations (CLOs). In: H.-P. Burghof, S. Henke und B. Rudolph (Hrsg.), „Kreditderivate: Handbuch für die Bank- und Anlagepraxis“, 2., überarb. Aufl., Stuttgart 2005, S. 87-104.

Heuser, H.: [Analysis]

Lehrbuch der Analysis: Teil 1, 15., durchges. Aufl., Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden 2003.

Ho, T. S. Y.; Lee, S.-B.: [Term structure movements]

Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. In: "Journal of Finance", Vol. 41 (1986), No. 5, S. 1011-1029.

Hohl, S.; Liebig, T.: [Kreditderivate]

Kreditderivate: Ein Überblick. In: R. Eller, W. Gruber und M. Reif (Hrsg.), „Handbuch Kreditrisikomodelle und Kreditderivate: Quantifizierung und Management von Kreditrisiken, Strategien mit Kreditderivaten, bankaufsichtsrechtliche Anforderungen“, Stuttgart 1999, S. 499-525.

Hölscher, R.: [Risikokosten-Management]

Risikokosten-Management in Kreditinstituten: Ein integratives Modell zur Messung und ertragsorientierten Steuerung der bankbetrieblichen Erfolgsrisiken, Frankfurt a. M. 1987.

Holst, J.; Jortzik, S.: [Volatilitätsfutures]

Zur arbitragefreien Bewertung von Volatilitätsfutures – Theoretische und empirische Analysen anhand des VOLAX. (Universität zu Göttingen, Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft, IFBG-Studie Nr. 12), Göttingen 1999.

Hrvatin, R. V.; Katz, H.; Schiavetta, J. L.: [Rating criteria for ABS/MBS CDOs]

Rating criteria for Cash Flow ABS/MBS CDOs (Fitch IBCA, Duff & Phelps, Structured Finance, Special Report), New York 2000.

Huang, J.; Huang, M.: [Yield spreads and credit risk]

How much of the corporate-treasury yield spread is due to credit risk? (Penn State University, Smeal College of Business, New York University, Stern School of Business und Stanford University, Graduate School of Business, Working Paper), New York et al. 2003.

- Hull, J. C.: [Options, futures and other derivatives]  
Options, futures and other derivatives, 5<sup>th</sup> Edition, Upper Saddle River 2003.
- Hull, J. C.; White, A.: [Valuing credit default swaps I]  
Valuing credit default swaps I: No counterparty default risk. In: "Journal of Derivatives", Vol. 8 (2000), No. 1, S. 29-40.
- Hull, J. C.; White, A.: [Valuing credit default swaps II]  
Valuing credit default swaps II: Modeling default correlations. In: "Journal of Derivatives", Vol. 8 (2001), No. 3, S. 12-21.
- Hull, J. C.; White, A.: [Valuation of CDOs and CDSs]  
Valuation of a CDO and an n-th to default CDS without Monte Carlo simulation. In: "Journal of Derivatives", Vol. 12 (2004), No. 2, S. 8-23.
- Hultsch, C.: [Wirtschaftliche Zurechnung von Forderungen]  
Wirtschaftliche Zurechnung von Forderungen bei Asset-Backed Securities-Transaktionen. In: „Der Betrieb“, 53. Jg. (2000), Nr. 43, S. 2129-2132.
- Hummel, D.: [Einlagengeschäft der Banken]  
Das Einlagengeschäft der Banken. In: J. Hagen und J. Heinrich von Stein (Hrsg.), „Obst/Hintner-Geld-, Bank- und Börsenwesen: Handbuch des Finanzsystems“, 40., völlig überarb. Aufl., Stuttgart 2000.
- Hüttemann, P.: [Kreditderivate]  
Kreditderivate am europäischen Kapitalmarkt, Wiesbaden 1999.
- IDW: [Stellungnahme zur Rechnungslegung: ABS]  
IDW Stellungnahme zur Rechnungslegung: Zweifelsfragen der Bilanzierung von asset-backed-securities-Gestaltungen und ähnlichen Transaktionen (IDW RS HFA 8). In: „Die Wirtschaftsprüfung“, 55. Jg. (2002), Nr. 21, S. 1151-1157.
- IDW: [Stellungnahme zum Referentenentwurf des BilReG]  
Referentenentwurf eines Gesetzes zur Einführung internationaler Rechnungslegungsstandards und zur Sicherung der Qualität der Abschlussprüfung (Schreiben an den Ministerialrat Dr. Christoph Ernst des Bundesministeriums der Justiz), Düsseldorf 2004.  
WWW: <http://www.idw.de/idw/generator/property=Datei/id=359846.pdf>, geladen am 22. Oktober 2005.
- Ingram, R. W.; Brooks, L. D.; Copeland, R. M.: [Information content]  
The information content of municipal bond rating changes: A note. In: "Journal of Finance", Vol. 38 (1983), No. 3, S. 997-1003.
- Isaacson, D. L.; Madsen, R. W.: [Markov chains]  
Markov chains: Theory and applications, rep. Edition, New York et al. 1985.
- Israel, R. B.; Rosenthal, J. S.; Wei, J. Z.: [Finding generators]  
Finding generators for markov chains via empirical transition matrices, with applications to credit ratings. In: "Mathematical Finance", Vol. 11 (2001), No. 2, S. 245-265.
- Jackson, M.; Staunton, M.: [Excel and VBA in finance]  
Advanced modelling in finance using Excel and VBA, 3<sup>rd</sup> Reprint, Chichester et al. 2003.

Jacobson, T.; Lindé, J.; Roszbach, K.: [Consistency of banks' risk classification policies] Internal ratings systems, implied credit risk, and the consistency of banks' risk classification policies (SverigesRiksbank Working Paper Series, Working Paper No. 155), Stockholm 2003.

Jarrow, R. A; Lando, D.; Turnbull, S. M.: [Credit risk spreads and Markov models] A Markov model for the term structure of credit risk spreads. In: "Review of Financial Studies", Vol. 10 (1997), No. 2, S. 481-523.

Jarrow, R. A.; Turnbull, S. M.: [Pricing credit risky derivatives] Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk. In: "Journal of Finance", Vol. 50 (1995), No. 1, S. 53-85.

Jeanblanc, M.; Rutkowski, M.: [Default risk: Mathematical tools] Modelling of default risk: Mathematical tools (Université d'Evry Val d'Essonne und Warsaw University of Technology, Working Paper), Evry Cedex und Warschau 2000.

Johnson, M. E.: [Multivariate statistical simulation] Multivariate statistical simulation, New York et al. 1987.

Jones, E. P.; Mason, S. P.; Rosenfeld, E.: [Empirical investigation of contingent claims analysis] Contingent claims analysis of corporate capital structures: An empirical investigation. In: "Journal of Finance", Vol. 39 (1984), No. 3, S. 611-625.

Jortzik, S.; Mergner, S.: [Bond Credit Spreads und Ratings] Zum Zusammenhang zwischen Bond Credit Spreads und Ratings: Aktuelle empirische Analysen anhand börsentäglicher Daten des US-amerikanischen Corporate Bond-Marktes sowie eine Überprüfung der Informationsgehalt-Hypothese (Universität zu Göttingen, Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft, IFBG-Studie Nr. 16), Göttingen 2003.

Jortzik, S.; Müller, B.: [Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate] Traditionelle Kreditrisikominderungstechniken und Kreditderivate als Gegenstand von Basel II: Betriebswirtschaftliche Implikationen bankaufsichtsrechtlicher Regulierungen für das Kreditrisikomanagement von Kreditinstituten (Universität zu Göttingen, Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft, IFBG-Studie Nr. 15), Göttingen 2002.

Joshi, M. S.; Kainth, D.: [Rapid development of prices for n<sup>th</sup>-to-default swaps] Rapid and accurate development of prices and greeks for nth to default credit swaps in the Li model. In: "Quantitative Finance", Vol. 4 (2004), No. 3, S. 266-275.

JPMorgan: [CM<sup>TM</sup> Technical Document] CreditMetrics<sup>TM</sup>: Technical document, New York 1997.

Karatzas, I.; Shreve, S. E.: [Mathematical finance] Methods of mathematical finance, Corrected 3<sup>rd</sup> Printing, New York et al. 2001.

Karatzas, I.; Shreve, S. E.: [Brownian motion] Brownian motion and stochastic calculus, 2<sup>nd</sup> Edition, Corrected 8<sup>th</sup> Printing, New York et al. 2005.

Karlin, S.; Taylor, H. M.: [Stochastic processes]

A first course in stochastic processes, 2<sup>nd</sup> Edition, San Diego et al. 1975.

Kayser, G.; Kokalj, L.: [Mittelständische Unternehmen und Basel II]

Mittelständische Unternehmen in Deutschland – Anmerkungen zur Finanzierung nach Basel II. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 55. Jg. (2002), Nr. 3-4, S. 112-116.

Kenney, C. S.; Laub, A. J.: [Logarithm and exponential of a matrix]

A Schur-Fréchet algorithm for computing the logarithm and exponential of a matrix. In: “SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications”, Vol. 19 (1998), No. 3, S. 640-663.

KfW: [Pressemitteilung der KfW vom 07. September 2000: KfW mandatiert zwei Großbanken für die Verbriefung von Förderkrediten an den Deutschen Mittelstand]

KfW mandatiert zwei Großbanken für die Verbriefung von Förderkrediten an den Deutschen Mittelstand (Pressemitteilung vom 07. September), Frankfurt a. M. 2000.

WWW: <http://www.kfw.de/de/presse/>, geladen am 02. August 2002.

KfW: [Merkblatt der KfW vom Februar 2002: Mittelstandsprogramm]

KfW-Mittelstandsprogramm: Investitionskredite für kleinere und mittlere Unternehmen der gewerblichen Wirtschaft (Merkblatt), Frankfurt a. M. 2002.

WWW: [http://www.kfw.de/DE/Service/OnlineBibl48/Merkblatt/M\\_Mittel.pdf](http://www.kfw.de/DE/Service/OnlineBibl48/Merkblatt/M_Mittel.pdf), geladen am 28. August 2003.

KfW: [Konditionenübersicht]

Konditionenübersicht für Investitionskreditprogramme, Frankfurt a. M. o. J.

WWW: <http://www.kfw-formularsammlung.de/Konditionen/Konditionentabelle1.pdf>, geladen am 22. Oktober 2005.

Khuong-Huu, P.: [The price of credit]

The price of credit. In: “Risk”, Vol. 12 (1999), No. 12, S. 68-71.

Klotz, T.; Lindner, J.; Erickson, M.: [Promise-XXS-2003-1 plc]

Promise-XXS-2003-1 plc (Moody's Investors Service, International Structured Finance, Pre-Sale Report, September 24th), Frankfurt a. M. und New York 2003.

Kniese, W.: [Rating-Analyse]

Die Bedeutung der Rating-Analyse für deutsche Unternehmen, Wiesbaden 1996.

Koch-Weser, C. K.: [Rahmenbedingungen]

Rahmenbedingungen für die Verbriefung von Kreditforderungen in Deutschland. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 56. Jg. (2003), Nr. 12, S. 623-626.

König, W.: [Stochastik I (Skriptum)]

Stochastik I (Universität zu Köln, Mathematisches Institut, Skriptum), Köln 2003.

WWW: <http://www.mi.uni-koeln.de/~koenig/VLSS03/StochI/Skript.pdf>, geladen am 22. Oktober 2005.

Krahen, J. P.: [Der Handel von Kreditrisiken]

Der Handel von Kreditrisiken: Eine neue Dimension des Kapitalmarktes (Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt a. M., Fachbereich Wirtschaftswissenschaften, Working Paper Series: Finance & Accounting, Working Paper No. 152), Frankfurt a. M. 2005.

Krämer-Eis, H.; Schneider, C.; Tiskens, C.: [Die Verbriefung von Mittelstandskrediten durch die KfW]

Die Verbriefung von Mittelstandskrediten durch die KfW. In: „KfW-Research: Mittelstands- und Strukturpolitik“, o. Jg. (2001), Nr. 21, S. 24-30.

Kreinin, A.; Sidelnikova, M.: [Regularization algorithms]

Regularization algorithms for transition matrices. In: “Algo Research Quarterly”, Vol. 4 (2001), Nos. 1/2, S. 23-40.

Krengel, U.: [Wahrscheinlichkeitstheorie]

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, 7., überarb. Aufl., Wiesbaden 2003.

Kroll, M.: [Liquidität und Eigenmittelrendite verbessern]

Immer mehr Banken und grosse Unternehmen wollen dank Securitisation ihre Liquidität und Eigenmittelrendite verbessern. In: „Schweizer Bank“, o. Jg. (1993), Nr. 10, S. 89-92.

Kümpel, S.: [Bank- und Kapitalmarktrecht]

Bank- und Kapitalmarktrecht, 3., neu bearb. u. wesentlich erw. Aufl., Köln 2004.

Kupiec, P.: [Credit risk capital]

Estimating credit risk capital: What's the use? In: “Journal of Risk Finance”, Vol. 2 (2001), No. 3, S. 17-34.

Küppers, W.; Brause, C.: [ABS]

Asset-Backed Securities Transaktionen: Rechtliche, bilanzielle und steuerliche Aspekte. In: „Die Aktiengesellschaft“, 43. Jg. (1998), Nr. 9, S. 413-420.

Landesbank Schleswig-Holstein Girozentrale: [Förde 2000-1]

Förde 2000-1 (Information Memorandum), Kiel 2000.

Landry, S.; Radecke, O.: [Kreditderivate in der Praxis]

Kreditderivate in der Praxis. In: R. Eller, W. Gruber und M. Reif (Hrsg.), „Handbuch Kreditrisikomodelle und Kreditderivate: Quantifizierung und Management von Kreditrisiken, Strategien mit Kreditderivaten, bankaufsichtsrechtliche Anforderungen“, Stuttgart 1999, S. 527-574.

Langner, S.: [ABS]

Asset Backed Securities. In: “Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung”, 54. Jg. (2002), Nr. 11, S. 656-673.

Laurent, J.-P.; Gregory, J.: [Basket default swaps]

Basket default swaps, CDO's and factor copulas (University of Lyon & BNP Paribas, Working Paper, September), Lyon 2003.

Lee, A. J.:[Random binary deviates]

Generating random binary deviates having fixed marginal distributions and specified degrees of association. In: “American Statistician”, Vol. 47 (1993), No. 3, S. 209-215.

Lee, C. J.: [Corporate debt: A note]

The pricing of corporate debt: A note. In: “Journal of Finance”, Vol. 36 (1981), No. 5, S. 1187-1189.

Lehmann, G.: [Statistik]

Statistik: Eine Einführung in die mathematischen Grundlagen für Psychologen, Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler, Heidelberg und Berlin 2002.

Lehnick, D.: [Rate Ratios und Odds Ratios]

Rate Ratios und Odds Ratios in zwei- und mehrdimensionalen Kontingenztafeln, Dissertation, Göttingen 1997.

Leland, H. E.: [Corporate debt value]

Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. In: "Journal of Finance", Vol. 49 (1994), No. 4, S. 1213-1252.

Lenz, R.; Temme, L.: [ABS als Finanzierungsinstrument für Kreditgenossenschaften]

Asset Backed Securities: Ein Finanzierungsinstrument für Kreditgenossenschaften. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 56. Jg. (2003), Nr. 12, S. 660-666.

Lewis, M. K.: [Offshore finance]

International banking and offshore finance: London and the major centres. In: M. Hampton und J. Abbot (Hrsg.), "Offshore Finance centres and tax havens: The rise of global capital", London 1999, S. 80-116.

Li, D. X.: [On default correlation]

On default correlation: A copula function approach. In: "Journal of Fixed Income", Vol. 9 (2000), No. 4, S. 43-54.

Lohneiß, H.: [Unternehmensfinanzierung in Deutschland]

Unternehmensfinanzierung in Deutschland: Diversifizierung gefragt. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 56. Jg. (2003), Nr. 12, S. 639-643.

Longstaff, F. A.; Mithal, S.; Neis, E.: [Corporate yield spreads vs. CDS premiums]

Corporate yield spreads: Default risk or liquidity? New Evidence from the credit-default swap market (University of California, Anderson School, Working Paper), Los Angeles 2004.

Longstaff, F. A.; Schwartz, E. S.: [Valuing risky debt]

A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. In: "Journal of Finance", Vol. 50 (1995), No. 3, S. 789-819.

Lopez, J. A.: [Asset correlation vs. probability of default]

The empirical relationship between average asset correlation, firm probability of default, and asset size. In: "Journal of Financial Intermediation", Vol. 13 (2004), No. 2, S. 265-283.

Lwowski, H.-J.: [Kreditsicherung]

Das Recht der Kreditsicherung, 8., neubearb. Aufl., Berlin 2000.

Lyden, S.; Saraniti, D.: [An empirical examination of structural models]

An empirical examination of the classical theory of corporate security valuation (Working Paper), San Francisco 2000.

Martin, R. J.; Thompson, K. E.; Browne, C. J.: [Price and probability]

Price and probability. In: "Risk", Vol. 14 (2001), No. 1, S. 115-117.

Martin, R. J.; Thompson, K. E.; Browne, C. J.: [Taking to the saddle]  
Taking to the saddle. In: "Risk", Vol. 14 (2001), No. 6, S. 91-94.

Mashal, R.: [Pricing of CDOs]  
On risk neutral pricing of CDOs (Columbia University, Graduate School of Business, Working Paper), New York 2002.

Mashal, R.; Naldi, M.; Zeevi, A. J.: [Extreme events]  
Extreme events and multi-name credit derivatives (Lehman Brothers, Quantitative Credit Research und Columbia University, Graduate School of Business, Working Paper), New York 2003.

Mazataud, P.; Yomtov, C.: [Die lognormale Verteilung in der ABS-Analyse]  
Die lognormale Verteilung und ihre Anwendung auf die ABS-Analyse (Moody's Investors Service, International Structured Finance, Special Report), Paris 2000.

McCauley, R. N.; Ruud, J. S.; Wooldridge, P. D.: [Globalisierung des internationalen Bankgeschäfts]  
Globalisierung des internationalen Bankgeschäfts. In: „BIZ-Quartalsbericht“, o. Jg. (2002), Nr. 1, S. 46-59.

Melchiori, M. R.: [CR+ by FFT]  
CreditRisk+ by fast Fourier transform (Universidad Nacional del Litoral, Working Paper), Santa Fe 2004.

Mella-Barral, P.: [Default and debt reorganization]  
The dynamics of default and debt reorganization. In: "Review of Financial Studies", Vol. 12 (1999), No. 3, S. 535-578.

Mella-Barral, P.; Perraudin, W.: [Strategic debt service]  
Strategic debt service. In: "Journal of Finance", Vol. 52 (1997), No. 2, S. 531-556.

Mellwig, W.; Weinstock, M.: [Zurechnung von mobilen Leasingobjekten]  
Die Zurechnung von mobilen Leasingobjekten nach deutschem Handelsrecht und den Vorschriften des IASC. In: „Der Betrieb“, 49. Jg. (1996), Nr. 47, S. 2345-2352.

Merton, R. C.: [Option pricing]  
Theory of rational option pricing. In: "Bell Journal of Economics and Management Science", Vol. 4 (1973), No. 1, S. 141-183.

Merton, R. C.: [Pricing corporate debt]  
On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. In: "Journal of Finance", Vol. 29 (1974), No. 2, S. 449-470.

Merton, R. C.: [Continuous-time finance]  
Continuous-time finance, Cambridge und Oxford 1990.

Metwally, S. A. K.; Atiya, A. F.: [Brownian bridge and barrier options]  
Using Brownian bridge for fast simulation of jump-diffusion processes and barrier options. In: "Journal of Derivatives", Vol. 10 (2002), No. 1, S. 43-54.

- Mikosch, T.: [Stochastic calculus]  
Elementary stochastic calculus with finance in view, Reprint, New Jersey et al. 2004.
- Modigliani, F.; Miller, M. H.: [Cost of capital]  
The cost of capital, corporation finance and the theory of investment. In: "American Economic Review", Vol. 48 (1958), No. 3, S. 261-297.
- Moloney, G.; Gatfield, E.: [Promise Caravela 2004 plc]  
Promise Caravela 2004 plc (Fitch IBCA, Duff & Phelps, Structured Finance, New Issue Report, January 27th), London 2005.
- Munsch, M.: [Mittelstand und Basel II]  
Mittelstand und Basel II – Anmerkungen eines Informationsdienstleisters. In: „Zeitschrift für das gesamt Kreditwesen“, 55. Jg. (2002), Nr. 3-4, S. 127-131.
- Näther, W. et al.: [Stochastik]  
Stochastik II: Skript zur Vorlesung (TU Freiberg, Institut für Stochastik, Vorlesungsskript), Freiberg 2003.  
WWW: <http://www.mathe.tu-freiberg.de/inst/stoch/Lehre/Skripte/stochii.pdf>, geladen am 14. Juni 2004.
- Neftci, S. N.: [Mathematics of financial derivatives]  
An introduction to the mathematics of financial derivatives, 2<sup>nd</sup> Edition, San Diego et al. 2000.
- Nelson, R. B.: [Copulas]  
An introduction to copulas, New York et al. 1999.
- Neske, C.: [Kreditderivate]  
Grundformen von Kreditderivaten. In: H.-P. Burghof, S. Henke und B. Rudolph (Hrsg.), „Kreditderivate: Handbuch für die Bank- und Anlagepraxis“, 2., überarb. Aufl., Stuttgart 2005, S. 55-69.
- Nöth, M.: [Renditestruktur des DM-Euroanleihemarktes]  
Untersuchung der Renditestruktur im Markt der DM-Euroanleihen. In: „Kredit und Kapital“, 28. Jg. (1995), S. 535-568.
- Nyfelner, M. A.: [Modelling dependencies]  
Modelling dependencies in credit risk management (Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Diploma-Thesis, Supervised by P. Embrechts and R. Frey), Zürich 2000.
- Offermann, C.: [Kreditderivate]  
Kreditderivate: Implikationen für das Kreditportfoliomanagement von Banken, Dissertation, Köln 2000.
- Ogden, J. P.: [Ratings and yields]  
Determinants of the ratings and yields on corporate bonds: Tests of the contingent claims model. In: "Journal of Financial Research", Vol. 10 (1987), No. 4, S. 329-339.
- Øksendal, B.: [Stochastic differential equations]  
Stochastic differential equations: An introduction with applications, 6<sup>th</sup> Edition, Berlin et al. 2003.

Overbeck, L.; Schmidt, W.: [Modeling default dependence]  
Modeling default dependence with threshold models. In: "Journal of Derivatives", Vol. 12 (2005), No. 4, S. 10-19.

Overbeck, L.; Schmidt, W.: [Abhängigkeitsmodellierung mit transformierten Ausfallzeiten]  
Abhängigkeitsmodellierung mit transformierten Ausfallzeiten. In: H.-P. Burghof, S. Henke und B. Rudolph (Hrsg.), „Kreditderivate: Handbuch für die Bank- und Anlagepraxis“, 2., überarb. Aufl., Stuttgart 2005, S. 739-749.

Overbeck, L.; Stahl, G.: [Stochastische Modelle]  
Stochastische Modelle im Risikomanagement des Kreditportfolios. In: A. Oehler (Hrsg.), „Credit risk und Value-at-risk-Alternativen: Herausforderungen für das Risk-Management“, Stuttgart 1998, S. 77-110.

Packer, F.; Zhu, H.: [CDS-Vertragsbedingungen]  
Vertragsbedingungen und Preisfindung bei Credit Default Swaps. In „BIZ-Quartalsbericht“, o. Jg. (2005), Nr. 1, S. 99-112.

Panjer, H. H.: [Recursive evaluation of compound distributions]  
Recursive evaluation of a family of compound distributions. In: "Astin Bulletin", Vol. 12 (1981), No. 1, S. 22-26.

Panjer, H. H.; Willmot, G. E.: [Insurance risk models]  
Insurance risk models, Schaumburg, 1992.

Papageorgiou, A.: [Brownian Bridge und quasi-Monte Carlo integration]  
The Brownian bridge does not offer a consistent advantage in quasi-Monte Carlo integration. In: "Journal of Complexity", Vol. 18 (2002), No. 1, S. 171-186.

Paul-Choudhury, S.: [Credit tricks]  
Choosing the right box of credit tricks. In: "Risk", Vol. 10 (1997), No. 11, S. 28-35.

Perridon, L.; Steiner, M.: [Finanzwirtschaft]  
Finanzwirtschaft der Unternehmung, 13., überarb. und erw. Aufl., München 2004.

Pinches, G. E.; Singleton, J. C.: [Bond rating changes]  
The adjustment of stock prices to bond rating changes. In: "Journal of Finance", Vol. 33 (1978), No. 1, S. 29-44.

Pitts, C. G. C.; Selby, M. J. P.: [Corporate debt: A further note]  
The pricing of corporate debt: A further note. In: "Journal of Finance", Vol. 38 (1983), No. 4, S. 1311-1313.

Pliska, S. R.: [Mathematical finance: Diskrete time models]  
Introduction to mathematical finance: Diskrete time models, Reprint, Malden, Massachusetts 2002.

Posch, B.; DiTullio, T.: [Rating latin American RMBS]  
Moody's approach to rating latin American residential mortgage-backed securities (Moody's Investors Service, Structured Finance, Rating Methodology Report), New York 2002.

PriceWaterhouseCoopers (PWC): [Verbriefungen in Luxemburg]  
Verbriefungen in Luxemburg, Luxemburg 2004.

Pugachevsky, D.: [Multi-credit models]  
Correlations in multi-credit models (Bear Stearns, 5<sup>th</sup> Columbia-JAFEE Conference on the Mathematics of Finance, 5-6<sup>th</sup> April, Presentation Materials), New York 2002.

Ramanathan, R.: [Econometrics]  
Introductory econometrics with applications, 5<sup>th</sup> Edition, Mason, Ohio 2002.

Rana, I. K.: [Measure and integration]  
An introduction to measure and integration, 2<sup>nd</sup> Edition, Narosa Publishing House 2002.

Rau-Bredow, H.: [Kreditrisikomodellierung im Neuen Basler Accord]  
Kreditrisikomodellierung und Risikogewichte im Neuen Basler Accord. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 54. Jg. (2001), Nr. 18, S. 1004 f.

Regierung der Bundesrepublik Deutschland: [Bilanzrechtsreformgesetzentwurf]  
Entwurf eines Gesetzes zur Einführung internationaler Rechnungslegungsstandards und zur Sicherung der Qualität der Abschlussprüfung (Deutscher Bundestag, 15. Wahlperiode, Gesetzentwurf der Bundesregierung), Berlin 2004.

Reis, D.: [Internationale mittelständische Unternehmen]  
Finanzmanagement in internationalen mittelständischen Unternehmen, Dissertation, Saarbrücken 1998.

Reiß, O.: [Fourier inversion algorithms]  
Fourier inversion algorithms for generalized CreditRisk+ models and an extension to incorporate market risk (Forschungsverbund Berlin e.V., Weierstraß-Institut für Angewandte Analysis und Stochastik, Working Paper), Berlin 2003.

Ripley, B. D.: [Stochastic simulation]  
Stochastic simulation, New York 1987.

Rist, P.: [Forderungsverkäufe]  
Bilanzierung von Forderungsverkäufen bei wirtschaftlicher Betrachtungsweise. In: „Steuern und Bilanzen“, 5. Jg. (2003), Nr. 9, S. 385-391.

Rosenthal, J. A.; Ocampo, J. M.: [Securitization of credit]  
Securitization of credit: Inside the new technology of finance, New York et al. 1988.

Roventa, P.; König, S.: [ABS als Finanzierungsform für den Mittelstand]  
Asset Backed Securities: Eine neue Finanzierungsform für den Mittelstand? (Corfina AG, Aufsatz), Frankfurt a. M. 2004.

Rule, D.: [The credit derivatives market]  
The credit derivatives market: Its development and possible implications for financial stability. In: “Financial Stability Review”, o. Jg. (2001), No. 10, S. 117-140.

Sarig, O. H.; Warga, A. D.: [Risk structure of interest rates]  
Some empirical estimates of the risk structure of interest rates. In: “Journal of Finance”, Vol. 44 (1989), No. 5, S. 1351-1360.

- Schierenbeck, H.:[Bankmanagement I]  
Ertragsorientiertes Bankmanagement: Grundlagen, Marktzinsmethode und Rentabilitäts-Controlling, 7., vollst. überarb. und erw. Aufl., Wiesbaden 2001.
- Schmid, H.; Dammer, T.: [ABS und KFG]  
Neue Regeln zur Gewerbesteuer bei Asset-Backed-Securities Transaktionen nach dem Kleinunternehmerförderungsgesetz. In: „Betriebs-Berater“, o. Jg. (2003), Nr. 16, S. 819-822.
- Schmidbauer, R.: [Konsolidierung von SPEs]  
Die Konsolidierung von „Special Purpose Entities“ nach IAS und HGB, insbesondere unter Berücksichtigung von E-DRS 16. In „Deutsches Steuerrecht“, Jg. 40 (2002), Nr. 24, S. 1013-1017.
- Schmidtchen, M.; Krämer-Eis, H.: [CDO-Ratings der Agenturen]  
Die Rating-Ansätze der Agenturen. In: „Kreditrating & Praxis“, o. Jg. (2002), Nr. 6, S. 1-6.
- Schönbucher, P. J.: [Credit risk modelling]  
Credit risk modelling and credit derivatives, Dissertation, Bonn 2000.
- Schönbucher, P. J.: [Factor models]  
Factor models for portfolio credit risk (Bonn University, Department of Statistics, Working Paper), Bonn 2000.
- Schönbucher, P. J.; Schubert, D.: [Copula-dependent default risk]  
Copula-dependent default risk in intensity models (University of Bonn, Department of Statistics, Working Paper, December), Bonn 2001.
- Schroder, R.; Kerschkamp, M.-J.: [Promise-K 2001-1 plc]  
Promise-K 2001-1 plc (Moody's Investors Service, International Structured Finance, New Issue Report, October 18th), Paris und London 2001.
- Schulte-Mattler, H.; Manns, T.: [Kreditkosten des Mittelstandes]  
Basel II: Falscher Alarm für die Kreditkosten des Mittelstandes. In: „Die Bank“, o. Jg. (2004), No. 6-7, S. 376-380.
- Schulte-Mattler, H.; Stausberg, T.: [Kreditrisikoquantifizierung mit Übergangsmatrizen]  
Quantifizierung von Kreditrisiken unter Verwendung von Übergangswahrscheinlichkeiten. In: „Die Bank“, o. Jg. (1998), Nr. 10, S. 633-638.
- Schweizer, B.; Sklar, A.: [Probabilistic metric spaces]  
Probabilistic metric spaces, New York 1983.
- Schwicht, P.; Neske, C.: [CreditMetrics]  
CreditMetrics – Neues System zur Risikoanalyse. In: „Die Bank“, o. Jg. (1997), Nr. 8, S. 470-473.
- Sellers, M.; Vasicek, O. A.; Levinson, A.: [The KMV EDF™ credit measure]  
The KMV EDF™ credit measure and probabilities of default (KMV Publication), San Francisco 2000.

- Shimizu, K.; Crow, E. L.: [Lognormal distribution]  
History, genesis and properties. In: E. L. Crow und K. Shimizu (Hrsg.), "Lognormal distributions: Theory and applications", New York und Basel 1988.
- Shreve, S. E.: [Stochastic calculus]  
Stochastic calculus and finance (Carnegie Mellon University, Lecture Notes), Pittsburgh 1997.
- Shreve, S. E.: [Continuous-time models]  
Stochastic calculus for finance II: Continuous-time models, New York 2004.
- Smyth, D.; Blaney, C.: [Domiciling SPVs in Ireland]  
Ireland – Location of choice in Europe for domiciling SPVs. In: "Finance Dublin – Securitisation Report 2003", Dublin 2003, S. 7.
- Spellmann, F.: [Gesamtrisiko-Messung]  
Gesamtrisiko-Messung von Banken und Unternehmen, Dissertation, Bamberg 2001.
- Spremann, K.: [Wirtschaft, Investition und Finanzierung]  
Wirtschaft, Investition und Finanzierung, 5., vollst. überarb., erg. und akt. Aufl., 3. Nachdruck, München und Wien 2002.
- Standard & Poor's: [Ratings performance 2000]  
Ratings performance 2000: Default, transition, recovery, and spreads (Corporate Default Study), New York 2001.
- Standard & Poor's: [Corporate ratings criteria]  
Corporate ratings criteria (Internet Version), New York 2003.
- Statistisches Bundesamt (Destatis): [Statistisches Jahrbuch 2004]  
Statistisches Jahrbuch 2004 für die Bundesrepublik Deutschland, Wiesbaden 2004.
- Steiner, M.; Bruns, C.: [Wertpapiermanagement]  
Wertpapiermanagement: Professionelle Wertpapieranalyse und Portfoliostrukturierung, 8., überarb. und erw. Aufl., Stuttgart 2002.
- Steiner, M.; Heinke, V. G.: [Event study]  
Event study concerning international bond price effects of credit rating actions. In: "International Journal of Finance and Economics", Vol. 6 (2001), No. 2, S. 139-157.
- Stelzner, H.: [Zeitungsartikel von H. Stelzner vom 29. Januar 2002: Wetterleuchten am Finanzplatz Frankfurt]  
Wetterleuchten am Finanzplatz Frankfurt (Zeitungsartikel). In: „Frankfurter Allgemeine Zeitung“ vom 29. Januar 2002.
- Sundaresan, S. M.: [Continuous-time methods in finance]  
Continuous-time methods in finance: A review and an assessment. In: "Journal of Finance", Vol. 55 (2000), No. 4, S. 1569-1622.

Svensson, L. E. O.: [Estimating interest rates]  
Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994 (National Bureau of Economic Research, NBER Working Paper Series, Working Paper No. 4871), Cambridge 1994.

Taistra, G.; Tiskens, C.; Schmidtchen, M.: [Basel II vs. Mittelstandsportfolien]  
Basel II: Auswirkungen auf typische Mittelstandsportfolien. In: „Die Bank“, o. Jg. (2001), Nr. 7, S. 514-519.

Tavakoli, J. M.: [CDOs and structured finance]  
Collateralized debt obligations & structured finance: New developments in cash & synthetic securitization, Hoboken, New Jersey 2003.

Thym, J.; Barbour, I.: [KfW's Promise programme]  
KfW's Promise programme: Lots of Promise (Commerzbank, Fixed Income, Structured Products, Report), London 2002.

Tippelskirch, A. von: [Strategische Allianz für den Mittelstand]  
Strategische Allianz für den Mittelstand. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 55. Jg. (2002), Nr. 3-4, S. 110 f.

Tong, Y. L.: [The multivariate normal distribution]  
The multivariate normal distribution, New York et al. 1990.

VandeCastle, K.; Keisman, D.; Yang, R.: [Insights into recoveries]  
Suddenly structure mattered: Insights into recoveries of defaulted debt. In: Standard & Poor's (Hrsg.), „Ratings Performance 2000: Default, transitions, recovery, and spreads (Corporate Default Study)“, New York 2001, S. 81-86.

Vasicek, O. A.: [Term structure characterization]  
An equilibrium characterization of the term structure. In: „Journal of Financial Economics“, Vol. 5 (1977), S. 177-188.

Vasicek, O. A.: [Credit valuation]  
Credit valuation (KMV Working Paper), San Francisco 1984.

Vasicek, O. A.: [Probability of loss on loan portfolio]  
Probability of loss on loan portfolio (KMV Publication), San Francisco 1987.

Vasicek, O. A.: [The loan loss distribution]  
Probability of loss on loan portfolio (KMV Corporation, Unpublished Working Paper), San Francisco 1997.

Vasicek, O. A.: [EDF™ and bond pricing]  
EDF™ credit measure and corporate bond pricing (KMV Publication), San Francisco 2001.

Viala, P.: [KfW's PROMISE]  
KfW's Programme for „Mittelstand“-Loan Securitisation „PROMISE“ (Moody's Investors Service, International Structured Finance, Special Report), London 2000.

Völker, J.: [VaR-Modelle]

Value-at-Risk-Modelle in Banken: Quantifizierung des Risikopotentials im Portfoliokontext und Anwendung zur Risiko- und Geschäftssteuerung, Dissertation, Göttingen 2000.

Wahrenburg, M.; Niethen, S.: [Kreditrisikomodellierung]

Portfolioeffekte bei der Kreditrisikomodellierung. In: L. Johanning und B. Rudolph (Hrsg.), „Handbuch Risikomanagement: Risikomanagement für Markt-, Kredit- und operative Risiken (Band 1)“, Bad Soden 2000, S. 491-523.

Wahrenburg, M.; Niethen, S.: [Alternative Kreditrisikomodelle]

Vergleichende Analyse alternativer Kreditrisikomodelle. In: „Kredit und Kapital“, 33. Jg. (2000), Nr. 2, S. 235-257.

Walker, M.: [Zeitungsartikel von M. Walker vom 09. April 2002: Kirch Media's failure illustrates German banks' big exposures]

Kirch Media's failure illustrates German banks' big exposures (Zeitungsartikel). In: „Wall Street Journal Europe“ vom 09. April 2002.

Walter, W.: [Gewöhnliche Differentialgleichungen]

Gewöhnliche Differentialgleichungen: Eine Einführung, 7., neu bearb. u. erw. Aufl., Berlin et al. 2000.

Weber-Rey, D.: [Zeitungsartikel von D. Weber-Rey vom 18. Juli 2002: Finanzmarktförderungsgesetz stärkt UBGs nur unzureichend]

Finanzmarktförderungsgesetz stärkt UBGs nur unzureichend (Zeitungsartikel). In: „Börsen-Zeitung“ vom 18. Juli 2002.

Weinstein, M. I.: [Effects on rating change announcements]

The effect of a rating change announcement on bond price. In: „Journal of Financial Economics“, Vol. 5 (1977), No. 3, S. 329-350.

Weiss, L. A.: [Violation of priority of claims]

Bankruptcy resolution: Direct costs and violation of priority of claims. In: „Journal of Financial Economics“, Vol. 27 (1990), No. 2, S. 285-314.

Wichura, M. J.: [Distribution theory]

Distribution theory (University of Chicago, Department of Statistics, Lecture Notes), Chicago 2001.

Wilde, T.: [IRB approach explained]

IRB approach explained. In: „Risk“, Vol. 14 (2001), No. 5, S. 87-90.

Wilkens, M.: [Wertpapiermanagement]

Wertpapiermanagement (Katholische Universität Eichstätt-Ingolstadt, Lehrstuhl für ABWL, Finanzierung und Bankbetriebslehre, Skriptum, 5. Aufl.), Ingolstadt 2002.

Wilkens, M.; Baule, R.; Entrop, O.: [Kreditrisiko nach Basel II]

Erfassung des Kreditrisikos nach Basel II – Eine Reflexion aus wissenschaftlicher Sicht. In: G. Hofmann (Hrsg.), „Basel II und MaK – Regulatorische Vorgaben, bankinterne Verfahren, Bewertungen“, 2., vollst. überarb. Aufl., Frankfurt a. M. 2004, S. 61-92.

Wilkins, M.; Baule, R.; Entrop, O.: [Reale und risikoneutrale Welten]  
Risikoprämien in Optionspreisen – Reale und risikoneutrale Welten und die Beurteilung von Derivaten. In: T. Burkhardt, J. Körner und U. Walter (Hrsg.), „Banken, Finanzierung und Unternehmensführung – Festschrift für Karl Lohmann zum 65. Geburtstag“, Berlin 2004, S. 471-500.

Wilkins, M.; Entrop, O.; Scholz, H.: [Analyse des IRB-Ansatzes]  
Eigenkapitalanforderungen für Kreditrisiken – Analyse des modifizierten IRB-Ansatzes. In: „Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen“, 55. Jg. (2002), Nr. 3-4, S. 141-146.

Wilkins, M.; Scholz, H.; Völker, J.: [Bewertung strukturierter Finanzprodukte]  
Duplikation und Bewertung strukturierter Finanzprodukte – Callable Step-Up Bonds. In: „Die Bank“, o. Jg. (1999). Nr. 4, S. 262-268.

Wilson, T. C.: [Portfolio Credit Risk (I)]  
Portfolio Credit Risk (I). In: “Risk”, Vol. 10 (1997), No. 9, S. 111-117.

Wilson, T. C.: [Portfolio Credit Risk (II)]  
Portfolio Credit Risk (II). In: “Risk”, Vol. 10 (1997), No. 10, S. 56-61.

Wilson, T. C.: [Portfolio Credit Risk]  
Portfolio Credit Risk. In: “Economic Policy Review”, Vol. 4 (1998), No. 3, S. 71-82.

Wulfken, J.; Weller, M.: [Securitisation]  
Securitisation als neue Finanzierungsform. In: „Die Bank“, o. Jg. (1992), Nr. 11, S. 644-647.

Zantow, R.: [Finanzierung]  
Finanzierung: Die Grundlagen modernen Finanzmanagements, München 2004.

Zayed, A. I.: [Function transformations]  
Handbook of function and generalized function transformations, Boca Raton et al. 1996.

Zhou, C.: [A jump-diffusion approach]  
A jump-diffusion approach to modelling credit risk and valuing defaultable securities (Working Paper), Washington 1997.

Zimmermann, H.: [State-Preference Theorie]  
State-Preference Theorie und Asset Pricing: Eine Einführung, Heidelberg 1998.

Zimmermann, W.: [Insolvenzrecht]  
Insolvenzrecht, 5., neubearb. Aufl., Heidelberg 2003.

Zumpf, C.: [ABS]  
Asset Backed Securities (Universität Leipzig, Institut für Deutsches und Internationales Bank- und Kapitalmarktrecht, Working Paper), Leipzig 2000.

## Lebenslauf (Kurzform)

Name: Stephan Jortzik

Anschrift: Stumpfebiel 4, 37073 Göttingen

Email: Stephan@Jortzik.de

Geburtsdatum/-ort: 20. August 1976 in Magdeburg

Nationalität: deutsch

Familienstand: ledig

Schulbildung: September 1991 – Juni 1995: Math.-nat.-techn. Gymnasium Werner von Siemens, Abschluss: Abitur

Studium: Oktober 1995 – Juli 1997: Grundstudium der Betriebswirtschaftslehre an der Universität Göttingen

August 1997 – Juli 1998: Studienjahr an der School of Management and Finance der University of Nottingham in England

August 1998 – September 2000: Hauptstudium der Betriebswirtschaftslehre an der Universität Göttingen, Abschluss: Diplom-Kaufmann

Seit Februar 2001: Graduiertenstudium im Fach Betriebswirtschaftslehre an der Universität Göttingen

Wissenschaftliche Tätigkeiten: April 2001 – September 2001: Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft der Universität Göttingen

Seit Februar 2002: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Betriebswirtschaftliche Geldwirtschaft der Universität Göttingen

Berufliche Tätigkeiten: November 2000 – Januar 2001 / Oktober 2001 – Dezember 2001: Financial Analyst im Corporate Finance Department und im Realty Securities Department von European Investors, Inc., New York

Göttingen, 8. Dezember 2005

Stephan Jortzik