



# RISIKO MANAGER

11 . 2015

[ KREDITRISIKO ] [ MARKTRISIKO ] [ LIQUIDITÄTSRISIKO ] [ OPRISK ] [ ERM ] [ REGULIERUNG ]



## Inhalt

- 1, 7 Was verraten Index-Optionen über zukünftige Abhängigkeiten?
- 3 Standpunkt, Kurz & Bündig
- 14 Prognosemethoden operationeller Risiken
- 19 Fotonachlese
- 22 Buchbesprechung
- 23 Personalien
- 23 Impressum
- 26 Produkte & Unternehmen

[WWW.RISIKO-MANAGER.COM](http://WWW.RISIKO-MANAGER.COM)

## Abhängigkeiten als Hauptrisikotreiber

# Was verraten Index-Optionen über zukünftige Abhängigkeiten?

Für das Risiko eines Aktienportfolios oder eines Aktienindex sind, neben den individuellen Verteilungen der darin enthaltenen Aktien, die Abhängigkeiten zwischen den Aktien der Hauptrisikotreiber. Doch weder die genaue Gestalt noch das Maß an Abhängigkeit, sind an Aktien- und Optionsmärkten einfach zu beobachten. Wir stellen im Folgenden einen Ansatz vor, der aus Optionspreisen auf Einzelaktien sowie Optionen auf einen daraus erstellten Aktienindex ein Maß für die implizit gehandelte Abhängigkeit berechnet. Somit kann – vorwärts schauend – ein Maß für die Einschätzung der Marktteilnehmer über zukünftige Abhängigkeiten ermittelt werden. Berechnet man diese Zahl im Zeitverlauf, so kann sie auch als Indikator für die Furcht der Marktteilnehmer vor zukünftigen Abhängigkeiten dienen.

**A**bzugrenzen ist diese vorwärts schauende Betrachtungsweise von der historischen Schätzung von Abhängigkeiten, beispielsweise durch die paarweisen Korrelationen historischer Aktienreturns, da

der vorgestellte Ansatz auf unter dem risikoneutralen Maß berechneten Optionspreisen beruht. Diese Abgrenzung ist analog zur Unterscheidung von historischen

**Fortsetzung auf Seite 7**

Anzeige



[www.pco-ag.de](http://www.pco-ag.de)



## Könner gesucht

Dr. Peter & Company AG sucht Consultants/Senior Consultants

Fortsetzung von Seite 1

Volatilitäten und impliziten Volatilitäten. Die präsentierte Methodik basiert maßgeblich auf der Arbeit von Laurence [vgl. Laurence 2008], welche den sogenannten „Comonotonicity Gap“ einführt sowie auf Dhaene et al. [vgl. Dhaene et al. 2012], welche den „Heard-Behaviour Index“ definiert. Neu in diesem Artikel ist die Art der Ermittlung der Randverteilungen, die gewählte Gestalt des Abhängigkeitsmaßes sowie die Fokussierung auf den Deutschen Aktienindex (DAX) – einem Performance Index – was das Berücksichtigen von Dividenden notwendig macht.

**Implizite zukünftige Abhängigkeiten – eine erste Übersicht**

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des zukünftigen Werts eines Aktienportfolios oder eines Aktienindex hängt von der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung der darin enthaltenen Aktien ab. Basierend auf dieser gemeinsamen Verteilung werden auch Preise für Optionen auf Aktienindizes bestimmt. Das Theorem von Sklar [vgl. Sklar 1959] erlaubt es, eine beliebige gemeinsame Verteilungsfunktion aufzuspalten in die einzelnen Randverteilungen und eine Funktion, genannt Copula, die die Randverteilungen zur gemeinsamen Verteilungsfunktion verbindet. Die Copula enthält dabei alle Informationen über die stochastische Abhängigkeit der betrachteten Größen. Diesen Ansatz der Trennung von Randverteilungen und Abhängigkeit können wir uns auch bei der im Titel aufgeworfenen Fragestellung zunutze machen. Wir ermitteln zunächst die Randverteilungen der Einzelaktien aus Put- und Call-Preisen auf die entsprechenden Aktien. Dafür kommen prinzipiell mehrere Verfahren in Betracht, wir verwenden das letztgenannte:

- Der einfachste Ansatz, basierend auf der Black-Scholes-Merton-Welt, nimmt für jede Einzelaktie lognormal-verteilte zukünftige Aktienkurse an und ermittelt den noch freien Volatilitätsparameter  $\sigma$  als klassische implizite Volatilität aus börsen-quotierten Put- und Call-Preisen. Hier ist lediglich ein geeigneter Mechanismus festzulegen, wie mit der bekanntlich nicht konstanten impliziten Volatilität für unterschiedliche Strike- und Laufzeit-Konstellationen umzugehen ist.

- Alternativ kann ein komplexeres, parametrisches stochastisches Modell für die Einzelaktien unterstellt werden, etwa das Heston-Modell [vgl. Heston 1993] oder ein Lévy-Prozess getriebenes Modell. Dieses Modell kann dann, wieder individuell für jede Aktie, an beobachtete Optionspreise kalibriert werden. Zu beachten ist, dass solch eine Kalibrierung des parametrischen Modells an Marktdaten in der Regel keine perfekte Übereinstimmung liefert.
- Der von uns genutzte Ansatz kann als semi-parametrisch bezeichnet werden. Wir bestimmen eine Randverteilung, welche die beobachteten Marktpreise wiedergibt. Lässt man für die Form der Randverteilung die richtige Zahl an Freiheitsgraden zu, so ist gewährleistet, dass zum einen die Parameter der Dichte eindeutig bestimmt sind und zum anderen alle Marktpreise exakt getroffen werden.

Nach diesem ersten Schritt liegen uns, unabhängig von der Wahl der obigen Methoden, Verteilungsfunktionen  $F_1, \dots, F_d$  bzw. deren Dichten  $f_1, \dots, f_d$  für alle Einzelaktien zu einem zukünftigen Zeitpunkt  $T$  vor; beim DAX haben wir Dimension  $d=30$ . Diese Dichten sind konsistent mit Optionspreisen auf die betrachteten Einzelaktien, entsprechen damit der Marktmeinung über zukünftige Einzelrisiken. Noch nicht ausgenutzt haben wir zu diesem Zeitpunkt quotierte Optionspreise auf den Aktienindex, der aus den Einzelaktien als gewichtete Summe zusammengesetzt ist [vgl. Deutsche Börse (2013)]. Diese Optionspreise beinhalten Informationen der Randverteilungen sowie der Abhängigkeitsstruktur. Mit jeder Wahl für eine Copula  $C$  können wir nun via Sklars-Theorem eine gemeinsame Verteilungsfunktion aller Aktienkurse konstruieren und damit, zumindest mittels einer Monte-Carlo-Simulation [vgl. Mai, Scherer 2012], zukünftige Aktienindizes simulieren. Diese wiederum können zur Bewertung von Index-Optionen herangezogen werden.

Die eingangs aufgeworfene Fragestellung bezieht sich auf die Höhe der vom Markt implizierten Abhängigkeit. Dafür müssen wir ein Gefühl dafür entwickeln, ob der uns vorliegende Marktpreis einer Index-Option „viel oder wenig“ Abhängigkeit enthält. Dieser Vergleich kann durch eine Worst-Case-Abschätzung quantifizierbar gemacht werden. Es ist nämlich mög-

lich, auf dem Raum aller Copulas eine partielle Ordnung  $C \leq \hat{C} \Leftrightarrow C(u_1, \dots, u_d) \leq \hat{C}(u_1, \dots, u_d) \forall u_1, \dots, u_d \in [0,1]^d$  zu definieren. Die in diesem Sinne „größte Copula“ ist die sogenannte Komonotonie-Copula  $M(u_1, \dots, u_d) := \min(u_1, \dots, u_d)$ , welche unter anderem auch zu maximalen paarweisen Abhängigkeitsmaßen wie Kendalls Tau oder Spearman's Rho führt. Es lässt sich auch beweisen [vgl. Dhaene et al. 2012 und die darin genannten früheren Referenzen], dass für festgehaltene Randverteilungen Put- und Call-Preise auf eine Summe von Zufallsvariablen (in unserem Zusammenhang interpretiert als Index) durch diese Abhängigkeitsstruktur maximiert werden. Der Preis einer Put- bzw. Call-Option auf einen Index, berechnet unter der Annahme von komonotonen Aktienpreisen, ist somit eine natürliche obere Abschätzung. Je näher der Marktpreis einer Index-Option dieser oberen Schranke kommt, desto höher ist die vom Markt prognostizierte Abhängigkeit. Das **Komonotonie-Verhältnis** [vgl. Laurence 2008] kann demnach definiert werden als Quotient des beobachtbaren Marktpreises  $Call(T,K)$ , in diesem Fall des Call-Preises für eine bestimmte Laufzeit  $T$  und Strike  $K$  sowie des, unter der Annahme einer komonotonen Abhängigkeitsstruktur zwischen den Indexelementen, ermittelten Preises  $Call(T,K)^M$  einer Call-Option. Wir erhalten

► Gleichung 01.

► Gleichung 01

$$\rho(T, K) := \frac{Call(T, K)}{Call(T, K)^M}$$

Offensichtlich liegt dieser Quotient für alle Strike-Level innerhalb des Intervalls  $[0,1]$ . Wird eine extreme, positive Abhängigkeitsstruktur zwischen den Elementen im Index erwartet, so strebt das Verhältnis gegen den (größtmöglichen) Wert eins, da der beobachtbare Call-Preis in diesem Fall den komonotonen Preis approximiert. Liegt hingegen Unabhängigkeit oder gar negative Abhängigkeit vor, so liefert das Verhältnis  $\rho(T,K)$  Werte im unteren Intervallbereich. Bei hohen Werten sollte der zugrunde liegende Index als besonders „risikoreich“ eingestuft werden, da die Einzelaktien im Fall eines Abschwungs möglicherweise keine sich ausgleichende Wirkung haben, sondern durch ihre gleichgerichtete Bewegung eine Krisensituation

sogar verstärken können. Niedrige Werte des Quotienten hingegen sprechen für Marktbewegungen der Einzelaktien, die entgegengesetzt verlaufen können. Allerdings ist zu bemerken, dass die Aussagekraft des Komonotonie-Verhältnisses für Call-Preise, die am Geld gehandelt werden, vermeintlich am größten ist. Bei Call-Optionen, welche weit im Geld liegen, spielt die Abhängigkeitsstruktur der Basiselemente keine große Rolle mehr, da die erwartete Auszahlung, und somit der Call-Optionspreis, in etwa dem inneren Wert der Option entspricht. Auch dies motiviert die Einführung des folgenden **Prospektiven-Abhängigkeitsmaßes (PAM)**.

Eine untere Abschätzung für Call-Preise, bei gegebenen Randverteilungen aber freier Abhängigkeitsstruktur, ist leider schwieriger zu finden als eine Abschätzung nach oben, da es für Dimensionen  $d > 2$  kein eindeutiges Konzept zur Beschreibung einer minimalen Abhängigkeit gibt, [vgl. Bignozzi et al. 2014]. Mithilfe von Jensens Ungleichung geben wir später eine Abschätzung nach unten an, diese wird aber in der Regel durch keine Abhängigkeitsstruktur angenommen. Im Zusammenhang mit Aktienkursen innerhalb eines Index beobachtet man aber höchst selten negative Abhängigkeiten, was die Wahl der Unabhängigkeit-Copula  $\Pi(u_1, \dots, u_d) = u_1 \cdot \dots \cdot u_d$  als Abhängigkeitsstruktur für einen unteren Vergleich motiviert. Wir definieren als Maß für den Level an marktimplizierter Abhängigkeit das Prospektive-Abhängigkeitsmaß, vgl. ► **Gleichung 02**, wobei  $\text{Call}(T, K)$  den am Markt beobachteten Call-Preis bezeichnet und  $\text{Call}(T, K)^\Pi$  sowie  $\text{Call}(T, K)^M$  die synthetischen Preise, berechnet unter Unabhängigkeit bzw. Komonotonie, bezeichnen.

► **Gleichung 02**

$$\text{PAM}(T, K) = \frac{\text{Call}(T, K) - \text{Call}(T, K)^\Pi}{\text{Call}(T, K)^M - \text{Call}(T, K)^\Pi}$$

Dieses Maß ist zwingend kleiner oder gleich eins, da die Komonotonie-Copula größtmögliche Call-Preise impliziert. Nach unten gibt es keinen Beweis für eine Abschätzung größer gleich null, doch dies trifft in allen von uns betrachteten Beispielen zu. Interpretieren wollen wir diese Zahl als eine Messgröße für das implizit gehandelte Level an zukünftiger Abhängigkeit auf einer Skala die typischerweise in  $[0, 1]$

liegt. Nach dieser allgemeinen Einführung beschreiben wir nun die konkrete technische Umsetzung. Diese besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten: (a) der Bestimmung der Randverteilungen sowie (b) der konkreten Berechnung des Index unter den benötigten Abhängigkeitsannahmen.

### Berechnung der Randverteilungen

In diesem Abschnitt gehen wir nun auf die zu ermittelnden Randverteilungen ein. Der DAX besteht aus  $d = 30$  Einzelwerten, von Adidas (ADS) bis Volkswagen (VOW3). Auf jeden dieser Einzelwerte gibt es einen liquiden Markt an Derivaten. Die beliebtesten hierunter sind europäische und amerikanische Call- und Put-Optionen. Diese Optionen haben eine gewisse Laufzeit  $T$  und einen Ausübungspreis (engl. strike)  $K$ . Bezeichnet  $S_t$  den Kurs einer Aktie  $S$  zum Zeitpunkt  $t$ , dann ist die Auszahlung einer Call-Option bei Ausübung  $S_t - K$ , und die einer Put-Option  $K - S_t$ . Wie es ihr Name schon andeutet, stellen Optionen keine Verpflichtung zur Ausübung dar, sondern nur deren Möglichkeit. Der Besitzer der Option wird sie also nicht ausüben, wenn der Auszahlungsbetrag negativ ist. Der Unterschied zwischen europäischen und amerikanischen Optionen besteht nun darin, dass die Ersteren nur *am* Ende der Laufzeit, während die Letzteren zu einem beliebigen Zeitpunkt *bis zum* Ende der Laufzeit ausgeübt werden können. In manchen Fällen werden auch sogenannte digitale, oder binäre Call- und Put-Optionen gehandelt. Diese sind immer europäischer Natur und haben das Auszahlungsprofil 1 (EUR), falls  $S_T > K$  und 0, falls  $S_T < K$  (Call) sowie 1 (EUR), falls  $S_T < K$  und 0, falls  $S_T > K$  (Put). Die Höhe der Auszahlung hängt also nicht davon ab, wie weit der Aktienkurs über oder unter dem Ausübungspreis liegt, sondern lediglich davon, ob er darüber oder darunter liegt. Es muss aber erwähnt werden, dass digitale Optionen weit weniger aktiv gehandelt werden als die zuerst beschriebenen Plain-Vanilla-Optionen und Marktpreise deshalb oft nicht zur Verfügung stehen. Wie auf Einzelaktien werden auch Optionen auf den DAX selbst gehandelt. Diese sogenannten Index-Optionen sind normalerweise sehr liquide und können zur Absicherung oder zur Spekulation eingesetzt werden.

Ein wichtiges Merkmal der Aktien im DAX ist die meist jährliche Auszahlung von Dividenden. Ein bekanntes Ergebnis

der Finanzmathematik besagt, dass in Abwesenheit von Dividenden und einem nicht-negativem Zins, identische europäische und amerikanische Call-Option denselben Preis haben müssen, da eine vorzeitige Ausübung nie optimal ist (es ist immer vorteilhafter, die Option zu verkaufen und den Zeitwert auch noch mitzunehmen). Werden allerdings Dividenden ausgezahlt, so kann es vorkommen, dass amerikanische Call-Optionen zu höheren Preisen gehandelt werden als europäische. Amerikanische Put-Optionen dagegen können immer, unabhängig von der Dividende, höhere Preise haben als europäische.

Die Entwicklung des Black-Scholes-Merton-(BSM)-Modells zu Beginn der 70er Jahre hat wesentlich zur Entstehung von liquiden Optionsmärkten beigetragen, da Marktteilnehmer mit der gleichnamigen Formel nicht nur einen verlässlichen Bewertungsmaßstab für europäische Optionen hatten, sondern auch ein Rezept dafür, wie im Fall eines Verkaufs solche Optionen zu hedgen waren. Einige Jahre später wurde es mit der Einführung des Cox-Ross-Rubinstein-(CRR)-Modells auch möglich, amerikanische Optionen innerhalb desselben Rahmens zu bewerten. Die zugrunde liegende Verteilung des Aktienkurses ist die Lognormalverteilung, die wie die Normalverteilung von zwei Parametern, dem Mittelwert und der Varianz, bestimmt wird. Die Varianz lässt sich direkt aus dem Zeithorizont  $T$  und der sogenannten Volatilität  $\sigma$  berechnen. Den Wert des Parameters  $\sigma$ , den man in die BSM-Formel einsetzen muss, um einen am Markt beobachteten Optionspreis zu treffen, nennt man die implizite Volatilität.

Im Laufe der 80er Jahre stellte sich heraus, dass sich die zu einer Aktie am Markt gehandelten Optionen nicht mit ein und derselben Volatilität korrekt bewerten lassen, sondern man diesen Parameter in Abhängigkeit der Laufzeit  $T$  und des Ausübungspreises  $K$  auswählen muss. Für Optionen mit derselben Laufzeit führte dies zum sogenannten „volatility smile“, da die impliziten Volatilitäten, als Funktion des Ausübungspreises  $K$ , üblicherweise einen leicht U-förmigen Graphen darstellen.

Im Zuge der 90er Jahre wurde nach Verallgemeinerungen des BSM-Modells gesucht, die innerhalb eines Rahmens die am Markt gehandelten Optionen korrekt bewerten konnten. Zwei für die Praxis relevante Modelle sind das Stochastic-Volatili-

► Gleichung 03

$$\text{Marktpreis Option}(T, K) = DF \cdot E[\Psi(S_T, K)] = DF \cdot \int_0^\infty \Psi(S_T, K) \cdot f(S_T) dS_T$$

ty-Modell von Heston (1993) und das Local Volatility-Modell von Dupire, Derman-Kani und Rubinstein (1994). Es ist wichtig hervorzuheben, dass diese Modelle, wie schon die BSM- und CRR-Modelle, den gesamten stochastischen Verlauf (Pfad) des Aktienkurses beschreiben.

Es gibt in der Praxis allerdings auch oft Situationen, so wie in dem in diesem Artikel betrachteten Fall, in denen es nur darauf ankommt, die Verteilung des Aktienkurses zu einem gegebenen Zeitpunkt zu beschreiben. Die Verteilungsfunktion  $F$  soll nun die Eigenschaft haben, dass man Preise von europäischen Optionen mit entsprechender Laufzeit  $T$  exakt trifft, wenn man sie zur Berechnung der abgezinsten erwarteten Auszahlung der Option heranzieht. ► Gleichung 03 fasst dies zusammen, wobei  $DF$  der Diskont-Faktor,  $\Psi$  die Auszahlungsfunktion der Option und  $f$  die Dichtefunktion von  $F$  ist. Da wir uns im Folgenden auf einen festen Zeithorizont konzentrieren, fixieren wir von nun an die Laufzeit  $T$ . Hat man beispielsweise europäische Call-Optionspreise für alle  $K \in [0, \infty]$ , dann kann man durch zweifaches Ableiten die Dichte  $f$  eindeutig bestimmen. Natürlich hat man in der Praxis nicht die Preise für unendlich viele Call-Optionen, sondern nur die Preise  $\text{Call}(K_1), \dots, \text{Call}(K_n)$  für bestimmte Ausübungspreise  $K_1, \dots, K_n$ . Ein Ansatz ist es nun, durch Interpolation eine Funktion  $K \mapsto \text{Call}(K)$  zu definieren und diese zweimal abzuleiten, um  $f$  zu bestimmen. Ein ähnlicher Ansatz ist es, die impliziten Volatilitäten  $\sigma(K_i)$  zu berechnen, eine interpolierende Funktion  $K \mapsto \sigma(K)$  zu definieren, um dann alle  $\text{Call}(K)$  zu berechnen und wie oben fortzufahren. Bei beiden Ansätzen muss man allerdings darauf achten, arbitrage-freie Preise zu erhalten. Ein weiterer Ansatz ist es, eine Art von Dichtefunktion vorzugeben – beispielsweise in Anlehnung an das BSM-Modell stückweise lognormal – und dann die Parameter dieser Dichte so zu bestimmen, dass alle Preise  $\text{Call}(K_i)$  exakt getroffen werden. Hierbei sollte allerdings genau begründet werden, warum man sich für eine bestimmte parametrische Form entschieden hat, was nicht immer leicht ist. Eine überall nicht-negative Dichte hat

► Gleichung 04

$$H(f) = - \int f \log(f).$$

allerdings den Vorteil, dass sie die Arbitragefreiheit der durch sie gegebenen Optionspreise garantiert.

Unser Ansatz ist es, die funktionale Form der Dichte nicht ad hoc vorzugeben, sondern ein Kriterium zu verwenden, welches uns dann zu dieser Form führt. Ein klassisches, aus der Thermodynamik (Clausius, Boltzmann) und Informationstheorie (Shannon) bekanntes, Kriterium ist dasjenige der maximalen Entropie. Eine so gefundene Dichte ist die am wenigsten voreingenommene bezüglich der gegebenen Information [vgl. Jaynes 1957]. Beispielsweise ist unter den Dichten auf dem

Einheitsintervall  $[0,1]$  die Dichte der Gleichverteilung diejenige, welche die Entropie maximiert. Auf dem Intervall der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  gibt es keine Dichte mit maximaler Entropie; gibt man aber das Mittel und die Varianz vor, dann ist die Dichte der Normalverteilung diejenige mit der maximalen Entropie.

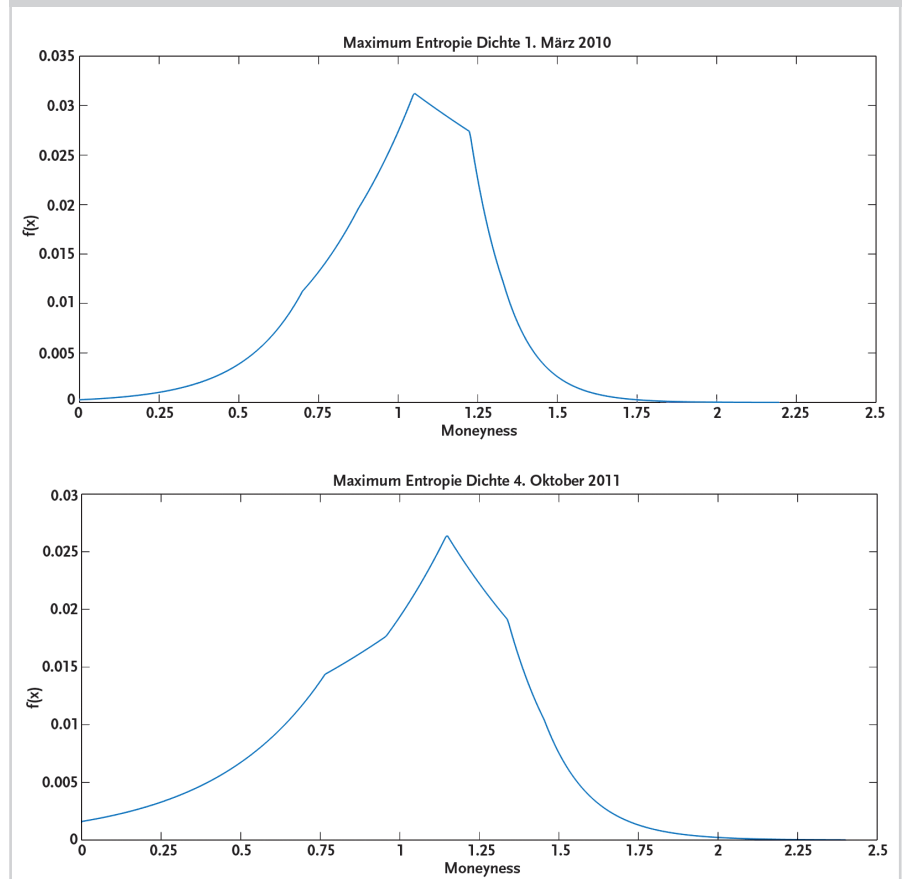
Shannon definiert die Entropie einer diskreten Verteilung  $\{p_1, \dots, p_n\}$  mit  $p_i \in [0,1]$  und  $\sum_{i=1}^n p_i = 1$  als  $-\sum_{i=1}^n p_i \log(p_i)$ . Anschaulich lässt sich diese Definition folgendermassen motivieren. Geschieht ein Ereignis von Wahrscheinlichkeit  $p=0$ , so ist man unendlich überrascht. Steigt die Wahrscheinlichkeit bis auf  $p=1$ , so nimmt die Überraschung bis auf 0 ab. Shannon definiert die Überraschung eines Ereignisses mit Wahrscheinlichkeit  $p$  als  $-\log(p)$ . Die Entropie ist demnach die erwartete Überraschung. Analog zum diskreten Fall definiert man die Entropie  $H$  einer stetigen Verteilung mit Dichte  $f$  als

► Gleichung 04.

Für unser oben beschriebenes Problem lautet der Lösungsansatz unter dem Kriterium der maximalen Entropie nun: Unter

Maximum Entropie Dichte für den DAX an verschiedenen Tagen, die Laufzeit ist jeweils  $T = 1$ .

► Abb. 01



## ► Gleichung 05

$$F_i^{-1}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R}: F_i(x) \geq y\}, \quad i = 1, \dots, d.$$

## ► Gleichung 06

$$\begin{aligned} \text{Call}(T, K)^M &= DF \cdot \mathbb{E}_Q \left[ (\text{Index}_T^M - K)^+ \right] = DF \cdot \mathbb{E}_Q \left[ (h(S_{1T}^M, \dots, S_{dT}^M) - K)^+ \right] \\ &= DF \cdot \int_0^1 (h(F_1^{-1}(u), \dots, F_d^{-1}(u)) - K)^+ du \end{aligned}$$

## ► Gleichung 07

$$\text{DAX}_t = h(S_{1t}, \dots, S_{dt}) := \frac{\sum_{i=1}^d w_{it} S_{it}}{A} \cdot 1000.$$

allen Dichten  $f$ , die die Nebenbedingungen gemäß ► Gleichung 03 für  $K=K_i, i=1, \dots, n$  erfüllen, wähle diejenige, die die Entropie  $H$  in ► Gleichung 04 maximiert.

Buchen und Kelly [vgl. Buchen und Kelly 1996] waren die ersten, die diesen Ansatz für das beschriebene Problem mit Call-Optionspreisen gelöst haben. Die Dichte  $f$  ist in diesem Fall stetig und stückweise exponentiell. Um die Parameter der Dichte zu finden, muss ein  $n$ -dimensionales Optimierungsproblem gelöst werden. Neri und Schneider [vgl. Neri und Schneider 2012] zeigen, wie sich der Algorithmus von Buchen und Kelly auf  $n$  eindimensionale Optimierungsprobleme vereinfachen lässt, wenn zu den Call-Optionspreisen  $\text{Call}(K_1), \dots, \text{Call}(K_n)$  noch die Preise digitaler Call-Optionen  $\text{Digital}(K_1), \dots, \text{Digital}(K_n)$  an denselben Ausübungspreisen vorliegen. Fügt man noch die Preise  $\text{Call}(0)$  und  $\text{Digital}(0)$  dieser Optionen mit Ausübungspreis  $K_0=0$  hinzu, so ist sichergestellt, dass der Forward-Preis  $\text{forward}(T) = \mathbb{E}[S_T]$  getroffen wird, und dass  $\int f = 1$  gilt. Die Autoren [vgl. Neri und Schneider 2013] zeigen ferner, dass dieser neue Algorithmus zu einer Vereinfachung und Stabilisierung des ursprünglichen Algorithmus von Buchen und Kelly führt, auch in dem Fall, in dem keine Preise digitaler Optionen vorliegen. In unserer Studie haben wir alle Dichten der Randverteilungen mit diesem letzteren Algorithmus berechnet. Exemplarisch werden die so gewonnenen Dichten in ► Abb. 01 für den DAX visualisiert.

Im nächsten Abschnitt werden wir die Quantilsfunktionen  $F_i^{-1}, i=1, \dots, d$  der Verteilungsfunktionen  $F_i$  der Randverteilungen benötigen. Ein Vorteil der von uns verwendeten Entropie-Dichten liegt darin,

dass ihre Umkehrfunktionen sehr einfach analytisch berechnet werden können und nicht, wie im Fall lognormaler Dichten, auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden muss.

### Berechnung der Call-Preise unter Unabhängigkeit bzw. Komonotonie

Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung von  $\text{Call}(T, K)^M$  sowie  $\text{Call}(T, K)^I$  mittels einer Monte-Carlo-Simulation. Von nun an betrachten wir die kalibrierten Randverteilungen  $F_1, \dots, F_d$  als gegeben. Aus diesen können wir die Quantilsfunktionen herleiten, vgl. ► Gleichung 05.

Um eine Stichprobe einer Einzelaktie mit Verteilungsfunktion  $F_i$  zu generieren, muss eine auf  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $U_i$  erzeugt werden, welche dann in  $F_i^{-1}(U_i) =: S_{iT}$  eingesetzt wird. Die so definierte Zufallsvariable  $S_{iT}$  hat die gewünschte Verteilung und wird interpretiert als Aktienkurs der  $i$ -ten Aktie zum Zeitpunkt  $T$ . Für unabhängige Aktienkurse  $S_{1T}, \dots, S_{dT}$  müssen nun lediglich unabhängige  $U_1, \dots, U_d$  simuliert werden und diese in die entsprechenden Quantilsfunktionen eingesetzt werden. Für komonotone Aktienkurse wird exakt eine auf  $[0, 1]$  gleichverteilte Zufallsvariable  $U$  gezogen und in alle  $d$  Quantilsfunktionen eingesetzt. Mittels der so erhaltenen unabhängigen (bzw. komonotonen) simulierten Aktienkurse  $S_{1T}, \dots, S_{dT}$  kann schließlich ein simulierter Indexwert berechnet werden. Für den DAX ist dies ausführlich nachstehend beschrieben. Für solch ein Szenario kann dann die (diskontierte) Auszahlung einer gewünschten Option berechnet werden. Dieses Verfahren wird nun für genügend viele Sze-

narien wiederholt und der gesuchte Optionspreis durch den Mittelwert der diskontierten Optionspreise aller Szenarien geschätzt.

Für komonotone Preise ist auch eine analytische Lösung denkbar, da im stochastischen Modell nur eine Zufallsvariable  $U$  beteiligt ist, gegen welche ausintegriert werden kann. Man erhält ► Gleichung 06, wobei die Funktion  $h$  den Zusammenhang von Einzelaktien zu Index beschreibt, welcher für den DAX im Folgenden erläutert wird.

### Berechnung des DAX-Performance-Index

Der DAX-Performance-Index gehört zu den kapitalisierungsgewichteten Marktindizes, das heißt, die Gewichtung der Basiselemente hängt maßgeblich von der aktuellen Marktkapitalisierung aller Einzelaktien ab. Da es sich um einen Performance-Index handelt, werden alle Dividenden und Bonuszahlungen sofort reinvestiert. Typischerweise wird für die Berechnung des Indexwerts an einem bestimmten Zeitpunkt die sogenannte Laspeyres-Index-Formel verwendet. Diese lässt sich jedoch durch eine Verwendung von relativen Gewichten und einem konstanten (bis zur nächsten Änderung der Zusammensetzung des Index) Anpassungsfaktor zu ► Gleichung 07 vereinfachen [vgl. Deutsche Börse 2013].

Im Zähler werden die aktuellen Marktpreise  $S_{1t}, \dots, S_{dt}$  der Basiselemente gemäß ihrer relativen Gewichte  $w_{it}$  zu einem Gesamtwert aufsummiert. Die relativen Gewichte enthalten Informationen über die Anzahl der Aktien jedes Basiswerts die notwendig sind, um den Index exakt nachzubilden. Der Anpassungsfaktor  $A$  berücksichtigt, wie viele Aktien bereits bei Aufnahme des jeweiligen Basiswerts im Markt vorhanden waren sowie den zu diesem Zeitpunkt geltenden Aktienkurs. Der Anpassungsfaktor  $A$  sowie die relativen Gewichte werden von der Deutschen Börse online zur Verfügung gestellt.

### Bereinigung um Dividendenzahlungen

Da, im Gegensatz zu den einzelnen Aktien, beim DAX keine Dividenden ausgeschüttet werden, ist die Vergleichbarkeit der entsprechenden risikoneutralen Dichten von DAX und deren Basiswerten nicht direkt gegeben. So ist etwa der diskontier-

te, zukünftige Erwartungswert (unter dem risikoneutralen Maß) jeder Dividendenausschüttenden Aktie unterhalb ihres aktuellen Werts, während für den DAX als Performance-Index der diskontierte, zukünftige Erwartungswert (wieder unter dem risikoneutralen Maß) mit dem heutigen Wert des DAX übereinstimmen muss. Zur Vergleichbarkeit muss demnach eine Anpassung bzw. Bereinigung der DAX-Call-Preise um eine (hypothetische) Dividendenzahlung vorgenommen werden. Diese Umrechnung machen wir für DAX-Call-Optionen mittels der klassischen BSM-Formel mit geschätzten Dividendenrenditen und den tatsächlichen impliziten Volatilitäten der Marktpreise. Um die fiktiven Dividendenrenditen für den DAX zu ermitteln, werden über den Zeitraum des vergangenen Jahres alle ausgezahlten Dividenden der Basiswerte aufsummiert und diese Summe durch den Endwert des DAX dividiert. Die auf diese Weise ermittelte historische Dividendenrendite wird als Schätzung für die fiktive, zukünftige Dividendenrendite im DAX herangezogen. Die in ► **Abb. 02** verwendete (blau gezeichnete) Kurve an DAX-Call-Preisen ist daher nicht die am Markt beobachtete, sondern eine um fiktive Dividendenzahlungen bereinigte Kurve, welche etwas unter den tatsächlichen Marktpreisen liegt. Alternativ wäre es auch möglich gewesen, die risikoneutralen Dichten aller Einzelaktien zu bereinigen, sie quasi um die erwarteten Dividenden „nach oben“ zu verschieben.

### Empirische Analyse

Die vorgestellten Methoden sollen nun exemplarisch auf den deutschen Aktienmarkt angewandt werden, um Auskunft über die Marktmeinung der Investoren über zukünftige Abhängigkeiten zu erhalten. Hierfür greifen wir auf Call-Preise des DAX sowie dessen Basiselemente zu, die gewählte Laufzeit ist  $T=1$ . Während für den Index europäische Optionen gehandelt werden, sind für die Basiselemente oft ausschließlich Optionen mit amerikanischer Ausübungsweise verfügbar. Diese Inkonsistenz sollte jedoch kaum Auswirkung auf das Endergebnis haben.

Wir wählen exemplarisch die Tage 1. März 2010 sowie 4. Oktober 2011, welche zwei verschiedene Marktphasen repräsentieren sollen. Eine Marktphase charakterisieren wir anhand der Höhe der

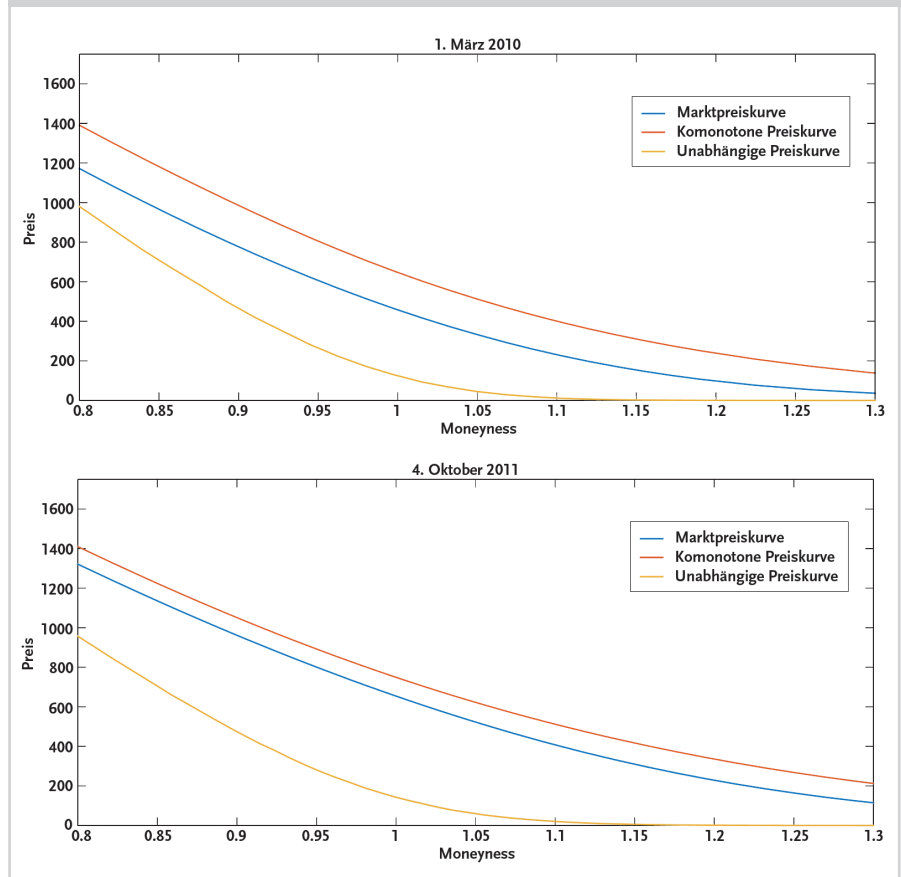
impliziten Volatilität. Der DAX-Volatilitätsindex (VDAX) nimmt am 1. März 2010 einen „normalen“ Wert an und entspricht daher einem üblichen Handelstag. Am 4. Oktober 2011 dagegen herrscht eine besonders hohe implizite Volatilität, dies soll für einen „unruhigen“ Handelstag stehen. Auch am Marktumfeld lässt sich dieser Unterschied feststellen. Am 1. März 2010 notierte der DAX bei 5714,95 Punkten und befand sich auf einem leichten Aufwärtstrend im Vergleich zur Vorwoche. Am Finanzmarkt wurden Rettungsaktionen Griechenlands debattiert, was Hoffnung unter den Marktteilnehmern mit Investitionen in griechischen Anleihen verbreitete. Im Oktober 2011 hatte sich die Lage jedoch zugespitzt. Griechenland konnte sein Versprechen zur Senkung des Haushaltsdefizits nicht einhalten, sodass sich Befürchtungen eines Zahlungsausfalls Griechenlands verdichteten. Weitere Hilfen für Griechenland wurden zwar diskutiert, ließen jedoch auf sich warten. Auch im DAX machten sich diese Unruhen bemerkbar. Dieser fiel im Vergleich zur Vorwoche am

4. Oktober 2011 um gut 400 Punkte auf einen Stand von 5216,71 Punkten.

### Call-Optionspreiskurven unter den Annahmen von Unabhängigkeit und Komonotonie

► **Abb. 02** zeigt den Vergleich der drei Call-Optionspreiskurven für den 1. März 2010 sowie den 4. Oktober 2011. Um sicherzustellen, dass eine ausreichende Liquidität vorhanden ist, beschränken wir die Analyse auf Optionen mit einer Moneyness von 0,8-1,3. Die tatsächlich am Markt beobachtbaren Preise von DAX-Optionen werden – wie erwartet – nach oben durch die komonotone Call-Preiskurve begrenzt und nach unten durch die unter Unabhängigkeit berechneten Preise. Das höhere Marktrisiko, welches durch Komonotonie als Abhängigkeit impliziert wird, spiegelt sich in einem höheren Wert der Call-Optionspreise wider. Unterhalb der tatsächlichen Preiskurve verläuft die Call-Preiskurve, welche synthetisch unter der Annahme von Unabhängigkeit zwischen den DAX-Basiswerten ermittelt wurde. Weiter kann

► **Abb. 02**  
DAX-Call-Preise (blau) sowie virtuelle Preise berechnet unter einer Komonotonie-Annahme (rot) sowie Unabhängigkeit (gelb).



mittels der Konvexität der Call-Auszahlungsfunktion sowie Jensens Ungleichung eine untere Schranke hergeleitet werden, die für beliebige Abhängigkeitsstrukturen gilt:

$$\text{Call}(T, K) = DF \cdot \mathbb{E}_Q[(h(S_{1T}, \dots, S_{dT}) - K)^+] \\ \geq DF \cdot \left( \frac{\sum_{i=1}^d w_{iT} \mathbb{E}_Q[S_{iT}]}{A} \cdot 1000 - K \right)^+,$$

wobei  $\mathbb{E}_Q[S_{iT}]$  dem bis zur Laufzeit  $T$  aufdiskontierten, aber um erwartete Dividenden bereinigten Ausgangskurs  $S_{i0}$  entspricht, da wir unter dem risikoneutralen Maß arbeiten. Diese untere Schranke wird aber in den üblichen Modellen für die Randverteilungen nicht angenommen, da eine solche untere Schranke eine besondere Form von sogenannter Joint-Mixability benötigen würde, was bei Aktienkursen mit Dichte auf  $[0, \infty)$  nicht möglich ist [vgl. Wang, Wang 2015].

Bei einer Moneyness von 0,8 liegt der beobachtbare Call-Preis an beiden Tagen mittig zwischen dem unabhängigen und dem komotonen Preis mit einem Abstand von +/- 200 Punkten. Während die Kurve der unabhängigen Call-Preise eine starke Krümmung aufweist, verlaufen die komotonen und tatsächliche Preiskurve nahezu parallel und deutlich flacher. Die Krümmung von Call-Preisen lässt sich allgemein über den Zusammenhang der Griechen „Delta“ und „Vega“ herleiten. Es gilt: je geringer die Volatilität, umso größer die Veränderung des Call-Preises für im Geld gehandelte Optionen und umso kleiner für aus dem Geld gehandelte Optionen bei einer Veränderung des Spotkurses. Während Komonotonie zwischen den Einzelaktien die Varianz der Summe maximiert, mit entsprechender maximaler Varianz für den so synthetisierten DAX, fängt bei Unabhängigkeit schon das starke Gesetz der großen Zahlen an zu wirken, sodass die Varianz einer Summe im vorliegenden Fall sehr gering ist. Dies erklärt den starken Abfall der Kurve, welche die unter Unabhängigkeit berechneten Preise abbildet. Die komotonen Preiskurve sowie die tatsächliche Preiskurve verlaufen entsprechend flacher. Für eine Moneyness größer als 1,3 werden die Preisunterschiede der Optionen wieder geringer und konvergieren für Optionen mit einer sehr unwahrscheinlichen Ausübung, das heißt einem Strikepreis der weit aus dem Geld liegt, gegen die erwartete Auszahlung von null.

Die relative Lage der tatsächlichen Call-Preise bietet bereits einen Hinweis auf die Marktmeinung der Investoren. Verläuft die

Call-Preiskurve im oberen Bereich (nahe der oberen Grenze; in rot gezeichnet), so wird von den Marktteilnehmern offensichtlich eine starke, positive Abhängigkeit zwischen den Einzelwerten vermutet. Liegt die Kurve der Marktpreise jedoch nahe der Preiskurve der unabhängigen Call-Preise, so wird keine oder nur eine geringe Abhängigkeit zukünftiger Aktienkurse angenommen. Im direkten Vergleich sehen wir, dass am 4. Oktober 2011 eine höhere Abhängigkeit erwartet wird als noch am 4. März 2010.

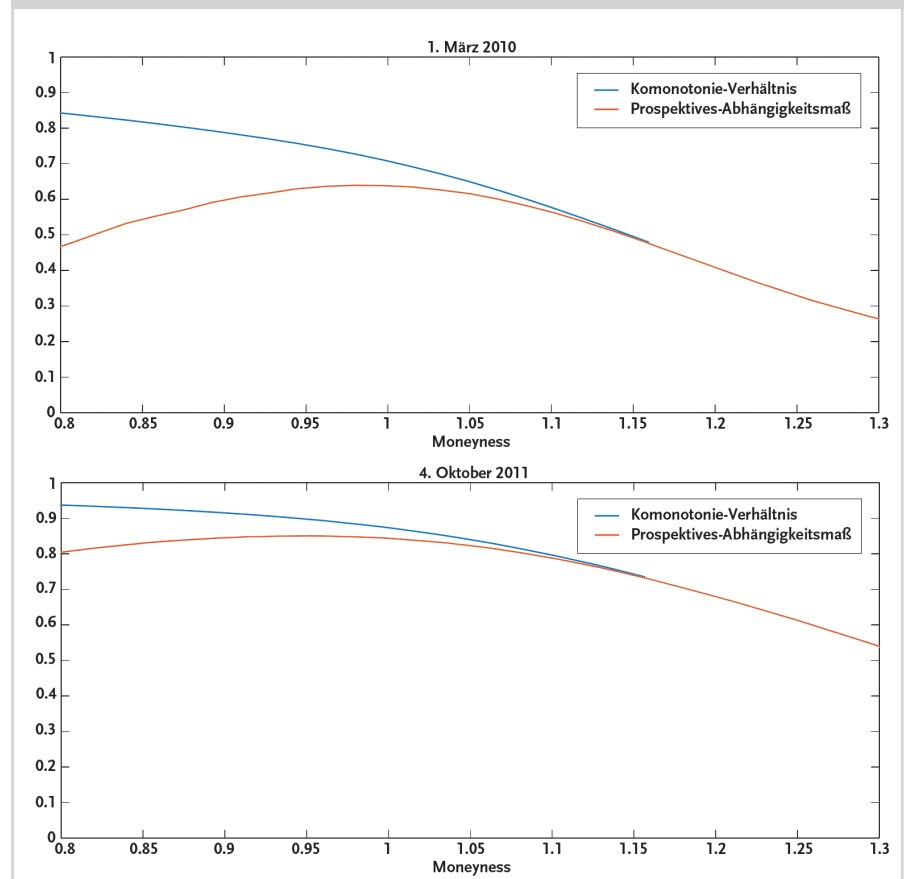
Wir wenden nun die zwei vorgestellten Maße an, welche Auskunft über das Level an Abhängigkeit zwischen den Basiswerten geben und werden damit Rückschlüsse auf die Meinung der Marktteilnehmer ziehen. Die Ergebnisse sind in **Abb. 03** dargestellt. Das Komonotonie-Verhältnis fällt monoton mit leichter Krümmung. Wie bereits angesprochen, ist die Aussagekraft des Komonotonie-Verhältnisses für Optionen, die weit im Geld gehandelt werden, eingeschränkt, sodass eine direkte Schlussfolgerung auf die Furcht der Investoren im Kapitalmarkt unserer Einschätzung nach nicht ableitbar ist.

Das Komonotonie-Verhältnis approximiert die Kurve des neu eingeführten Prospektiven-Abhängigkeitsmaßes am rechten Intervallrand. Im Gegensatz zum Komonotonie-Verhältnis verläuft das Prospektive-Abhängigkeitsmaß nicht monoton. Für Optionen, die deutlich im Geld liegen, liefert die Auswertung des prospektiven Maßes erheblich geringere Werte um 0,5. Die Kurve erreicht in unserem Beispiel ihr Maximum für am Geld gehandelte Optionen und fällt anschließend analog zum Komonotonie-Verhältnis mit steigender Moneyness ab, der Verlauf ähnelt dem Vega einer Call-Option.

Dem Prospektiven-Abhängigkeitsmaß zufolge ist dies genau das Ausübungspreislevel, bei welchem die Furcht der Investoren eines komotonen Verhaltens der Indezelemente am größten ist, bzw. für welches die stärkste positive Abhängigkeit unterstellt wird. Generell variiert die unterstellte Abhängigkeit für verschiedene Ausübungspreise nicht so stark wie bei der Messung anhand des Komonotonie-Verhältnisses. Die Tatsache, dass sowohl das Komonotonie-Verhältnis als auch das Pro-

**Das Komonotonie-Verhältnis sowie das Prospektive-Abhängigkeitsmaß.**

► **Abb. 03**



spektive-Abhängigkeitsmaß am linken Intervallrand höhere Werte annehmen, kann ebenfalls mit der Angst der Investoren vor einem Marktzusammenbruch begründet werden.

### Zusammenfassung

Wir haben anhand des DAX illustriert, wie aus Preisen von Index-Optionen ein Maß für die implizit gehandelte, zukünftige Abhängigkeit zwischen den Basiswerten erstellt werden kann. Diese Größe kann Aufschluss darüber geben, ob die Marktteilnehmer aktuell von „viel“ oder „wenig“ Abhängigkeit ausgehen. Um die Frage im Titel aufzugreifen: Es kann zwar ein Maß für das Level an Abhängigkeit abgeleitet werden, nur schwerlich aber für die genaue Gestalt der Abhängigkeit, da hierfür die Menge an verfügbaren Informationen / Index-Optionen nicht ausreichend ist.

### Quellenverzeichnis sowie weiterführende Literaturhinweise:

**Bignozzi, V./ Puccetti, G./ Wang R. (2014):** Concepts of countermonotonicity for pairs of random vectors. Working Paper.

**Buchen P. W./ Kelly, M. (1996):** The maximum entropy distribution of an asset inferred from option prices. *Journal of Finance and Quantitative Analysis*, 31(1):143.

**Deutsche Börse. (2013):** Guide to the equity indices of Deutsche Börse.

**Dhaene, J./ Linders, D./ Schoutens, W./ Vyncke, D. (2012):** The herd behaviour index: A new measure for the implied degree of co-movement in financial markets. *Insurance: Mathematics & Economics*, 50(3), pp. 357-370.

**Heston, S. L. (1993):** A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies* 6 (2), pp. 327-343.

**Laurence, P. (2008):** A new tool for correlation risk management: the market implied comonotonicity gap, *Global Derivatives, Paris, Invited Talk*.

**Mai, J.-F./ Scherer, M (2012):** Simulating Copulas: Stochastic Models, Sampling Algorithms, and Applications, Imperial College Press.

**Neri C./ Schneider L. (2012):** Maximum entropy distributions inferred from option portfolios on an asset. *Finance Stoch.*, 16(2), pp. 293-318.

**Neri C./ Schneider L. (2013):** A family of maximum entropy densities matching call option prices. *Applied Mathematical Finance*, 20(6), pp. 548-577.

**Sklar, A. (1959):** Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* 8, pp. 229-231.

**Wang, B./ Wang, R. (2015):** Joint mixability, Working Paper.

### Autoren

**Eva Marie Ebach** ist Studentin des Elitestu- diengangs Finance & Information Manage- ment an der TU München und Universität Augsburg. Unterstützt von der Emlyon Business School, befasst sie sich im Rah- men ihrer Masterarbeit am Finanzmathe- matik-Lehrstuhl der TU München mit der Konstruktion und Anwendung von Entro- pie-Dichten.

**Matthias Scherer** ist Professor für Finanz- mathematik an der Technischen Universität München. Zu seinen Forschungsschwer- punkten gehört die Modellierung von Ab- hängigkeiten.

**Lorenz Schneider** ist Professor für Finanz- mathematik an der Emlyon Business School in Lyon, Frankreich. In der Forschung be- schäftigt er sich mit der Bestimmung von impliziten Wahrscheinlichkeitsdichten so- wie mit Modellen mit stochastischer Volatilität und Korrelation für Rohstoff- märkte.

**Danksagung:** Wir bedanken uns bei Stephan Höcht und Patrick Spitaler (Assenagon Asset Management) für wertvolle Diskussionen über kapitalmarktspezifische Fragen.

Anzeige

## Fachbücher für Risikomanagement-Profis:



Niehoff | Hirschmann (Hrsg.)

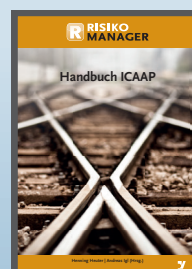
### Brennpunkt Risikomanagement und Regulierung

ISBN 978-3-86556-438-2

Art.-Nr. 22.511-1500

360 Seiten, gebunden

69,00 Euro



Heuter | Igl (Hrsg.)

### Handbuch ICAAP

ISBN 978-3-86556-428-3

Art.-Nr. 22.511-1500

256 Seiten, gebunden

59,00 Euro

Weitere Fachbücher in unserem Shop:  
www.bank-verlag-shop.de

