

Auszug Publikationen 2006



- Copulas im Risikomanagement



Copulas im Risikomanagement

Dr. Andreas Beck / Dr. Michael Lesko / Dr. Frank Schlottmann / Prof. Dr. Konrad Wimmer

Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen 14/2006

Modellierung von Abhängigkeiten in der Bankpraxis: Bei verschiedenen finanzwirtschaftlichen Fragestellungen ist die Modellierung von Abhängigkeiten zwischen den Risikofaktoren eines Portfolios eine zentrale Herausforderung.¹ Als aktuell sehr bedeutende Anforderung ist die Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils nach AT 4.1 MaRisk hervorzuheben. Hier sind die verschiedenen Risikoarten (insbesondere Marktpreisrisiken, Adressrisiken, Liquiditätsrisiken und operationelle Risiken) zum Gesamtrisiko des Kreditinstituts zu aggregieren, beziehungsweise es ist als differenziertere Information die Verteilung der möglichen Werte der Gesamtbank bezogen auf einen Risikohorizont zu ermitteln.

Zusammenführung der einzelnen Risikowerte

Mit der Quantifizierung des Gesamtrisiko Profils ist somit die zentrale Frage der geeigneten Zusammenführung der einzelnen Risikowerte verbunden, zum Beispiel des CVaR des Kreditbuches (Haltedauer üblicherweise ein Jahr, Konfidenzniveau zum Beispiel 99,5 Prozent) mit dem VaR des Zinsbuchs (Haltedauer zum Beispiel drei Monate, Konfidenzniveau zum Beispiel 95 Prozent). Alternativ können direkt die Chancen-Risiko-Verteilungen je Risikoart zusammengeführt werden.² Neben der einheitlichen Skalierung der Haltedauer sowie des Konfidenzniveaus ist zu klären, wie Korrelationen beziehungsweise allgemeine Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Risikoarten Berücksichtigung finden können: Bei einer bloßen Addition von VaR-Werten (wie aktuell in der Bankpraxis bisweilen als "Lösungsansatz" beobachtbar) blieben die Diversifikationspotenziale zwischen den Risikokategorien unberücksichtigt. Neben der Ableitung des Gesamtbankrisikoprofils kann man als weitere wichtige Beispiele nennen:

- **Ermittlung des Gesamtbankrisikos im Rahmen der strategischen Asset-Allokation:**

Bei der strategischen Asset-Allokation wird ein Optimierungsproblem gelöst, bei dem die Zielfunktion in der Regel eine Ertrags-Risiko-Relation ist. Die Ermittlung des Gesamtbankrisikos im Rahmen des Optimierungsproblems ist methodisch analog zur Fragestellung der Ermittlung des Gesamtbankprofils.

- **Ermittlung der Adressrisikoverteilung und des Credit-Value-at-Risk (CVaR):**

Jedes CVaR-Modell hat als Hauptbestandteil ein Korrelationsmodell, bei dem simultan Risikofaktoren simuliert werden, um das systematische Risiko im Adressrisikoportfolio zu modellieren.

- **Ermittlung der Modellpreise von CDO-Tranchen:**

Während die obigen Fragen die Risikomessung betreffen, ist eine Preisermittlung für Kreditderivate eine Bewertungsfrage. Jedoch liegen diesen Instrumenten Portfolios zugrunde, so dass die Adressrisikoverteilung des zugrunde liegenden Portfolios (Underlying) und deren Entwicklung im Zeitverlauf in die Bewertung integriert werden muss.³

Aggregation von Verteilungen mittels Faltung und Limitationen

Im nächsten Abschnitt wird zunächst auf die Thematik der Aggregation von einzelnen Verteilungen zu einer Gesamtverteilung eingegangen. Im anschließenden Abschnitt wird dann explizit auf die Copula-Funktionen eingegangen, die die "Spielregeln" für die Modellierung der Abhängigkeit zwischen den Verteilungen sind.

Das Basisverfahren zur Aggregation von Verteilungen zu einer Gesamtverteilung wird in der Mathematik als Faltung bezeichnet. Die Bedeutung der einzelnen Verteilung ist zum Verständnis des Verfahrens irrelevant. Die einzelnen Verteilungen können zum Beispiel die Randverteilungen der Risikoarten (Adressrisiko, Marktpreisrisiko,...) oder aber einzelner Kreditnehmer oder Emittenten im Rahmen eines CVaR-Modells sein.

Die Grundidee der Faltung zeigt das folgende Beispiel. Gegeben seien die Häufigkeitsverteilungen für die Risikoarten X (zum Beispiel Zinsänderungsrisiko) und Y (zum Beispiel Aktienkursrisiko)⁴. Die Wahrscheinlichkeiten für den Eintritt der entsprechenden Wertänderungen seien P_X , P_Y (Abbildung 1).

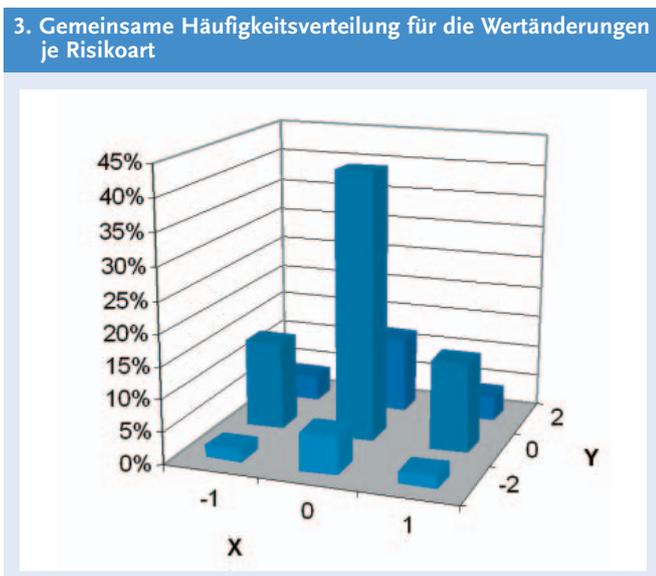
1. Häufigkeitsverteilungen für Risikoarten X und Y

X	P_X	Y	P_Y
-1	20%	-2	10%
0	60%	0	70%
1	20%	2	20%
Summe	100%	Summe	100%

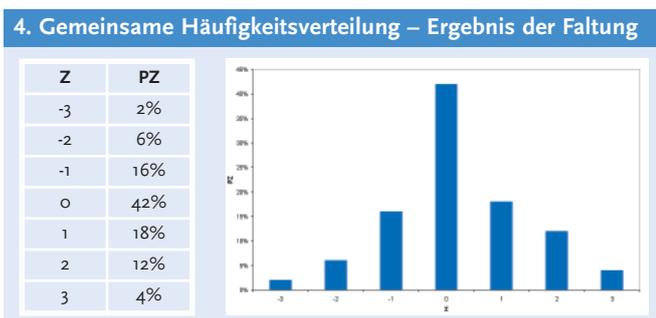
Bildet man nun alle gemeinsam möglichen Kombinationen, (zum Beispiel den Eintritt von $X = 0$ und $Y = -2$) so erhält man Abbildung 2.

2. Gemeinsame Eintrittshäufigkeiten für Wertänderungen je Risikoart			
X / Y	-1	0	1
-2	2%	6%	2%
0	14%	42%	14%
2	4%	12%	14%

Graphisch resultiert ein Gebirge (Abbildung 3).



Zur Ermittlung der eigentlich gewünschten Verteilung der Wertkonsequenzen müssen alle Wertkombinationen zur Zielgröße Z ($Z = X + Y$) addiert werden. Bei der Faltung werden die Koordinaten der Paare addiert und im Fall, dass verschiedene Kombinationen zum selben Summenwert führen (zum Beispiel $2 = 0 + 2$ und $2 = 2 + 0$), aufsummiert (Abbildung 4).



Betrachtet man das obige Beispiel, wäre mit der Faltung eine einfache Methode gefunden, die es ermöglicht einzelne Randverteilungen zu einer Gesamtverteilung zusammenzuführen. Eine Grenze des Verfahrens ist, dass es nur im Fall der Unabhängigkeit angewendet werden kann. Des Weiteren stößt das kombinatorische Auswerten im Falle von Verteilungen mit vielen Stützstellen (dies ist im Fall der Verteilungen für Adressrisiken oder Marktpreisrisiken gegeben) und bei gleichzeitigem Vorliegen von mehreren Risikoarten (zum Beispiel zehn Assetklassen in der strategischen Asset-Allokation) schnell an kombinatorische Grenzen.

Ausweg: Simulationsbasierte Copula-Modelle

In der Praxis wird das Aggregationsproblem in folgenden vier Schritten gelöst.

Schritt 1 – Simulation gleichverteilter Zufallszahlen (Eigentliches Copula-Modell):

Es werden mittels einer Monte-Carlo-Simulation je Szenario (zum Beispiel 20000) abhängige, gleichverteilte Zufallszahlen für alle Risikoarten (zum Beispiel Zins- und Adressrisiko) generiert.

Schritt 2 – Quantil-Mapping (Randverteilungen):

Es erfolgt ein Abgleich der jeweiligen gleichverteilten Zufallszahl mit dem zu dieser Wahrscheinlichkeit gehörigen Quantil (= Wertänderung) der jeweiligen Randverteilung.

Schritt 3 – Addition der Ergebnisse (Gesamtbankrisiko):

Je Simulationsszenario werden die Simulationsergebnisse je Risikoart addiert.

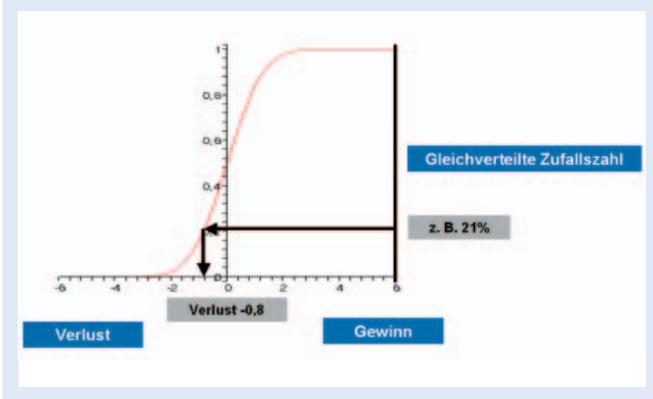
Schritt 4 – Auswertung der Gesamtverteilung:

Es wird die Häufigkeitsverteilung für die Gesamtbank auf Basis aller Szenarien ermittelt.

Auf Schritt 1 und die Copula-Funktionen als Grundlage der Abhängigkeitsmodellierung wird erst im nächsten Abschnitt eingegangen. An dieser Stelle wird der Vorgang einfach als das Werfen von abhängigen Konfidenzniveaus für die Risikoarten aufgefasst. Die Abbildung 5 illustriert das Quantil-Mapping aus Schritt 2.

Beim Quantil-Mapping wird die in Schritt 1 geworfene abhängige Zufallszahl (Konfidenzniveau) mit dem Konfidenzniveau der zugehörigen Randverteilungen verglichen. Im Beispiel wird als 21 Prozent-Konfidenzniveau ein Verlust von 0,8 Euro ermittelt. In Schritt 3 werden je Szenario zufällige Wertänderungen erzeugt und addiert, um die gesamte Wertänderung des Portfolios zu ermitteln. In Schritt 4 wird die Häufigkeitsverteilung anhand der simulierten Szenarien ausgewertet. Die Schritte 2 bis 4 haben nichts mit der im folgenden Kapitel erläuterten Copula-Funktion selbst zu tun.

5. Quantil-Mapping

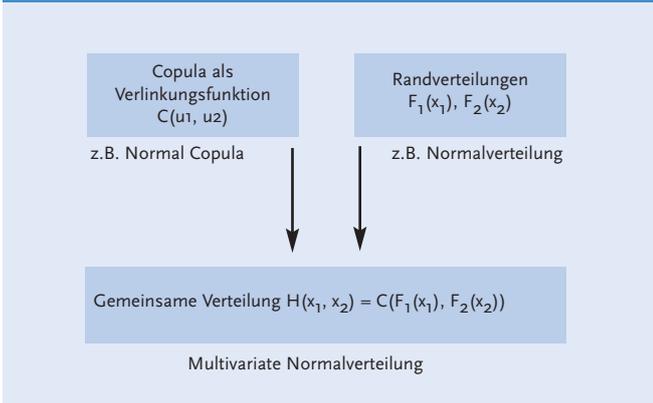


Copula-Funktionen – Definition und Logik

Eine Copula-Funktion beschreibt die funktionale Abhängigkeit zwischen verschiedenen Zufallsvariablen, die durch (Rand-)Verteilungen repräsentiert werden. Der Ansatz der Copula-Funktion wurde 1959 von Sklar, A. in der Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt.

Formal sind Copula-Funktionen multivariate Verteilungsfunktionen, deren Randverteilungen gleichverteilt sind.⁶ Mittels Copula-Funktionen können beliebig verteilte Zufallsvariablen mit beliebigen Abhängigkeitsstrukturen zu neuen gemeinsamen Verteilungsfunktionen verknüpft werden (Abbildung 6).

6. Zusammenfügen von Randverteilungen und Copula



Nutzen und Arten von Copula-Funktionen

Nutzen im Hinblick auf Aggregation von Risiken sind:⁷

- Risikoarten / Risikofaktoren müssen im Hinblick auf die Aggregation nicht als normalverteilt angenommen werden. Es sind beliebige Verteilungen zulässig.
- Die Abhängigkeit zwischen den Risikoarten / Risikofaktoren muss nicht mittels linearer Abhängigkeit abgebildet werden. Anzumerken ist, dass die Technik der Copula-Funktionen zwar bereits seit geraumer Zeit in den Kreditrisikomodellen angewendet wird und dort etabliert ist, dies aber wohl nur den Fachspezialisten bewusst war. So liegt sowohl in Credit-Metrics⁸ als auch in CPV Direkt eine so genannte Gauß- oder Normal-Copula zur Modellierung der Korrelationen zugrunde.

Es gibt zwei Hauptklassen von Copula-Funktionen. Zum einen die elliptischen Copula-Funktionen. Zu diesen zählen die zurzeit in der Praxis am meisten genannten Copula-Funktionen, die Normal- oder Gauß-Copula und die t- oder Student-Copula. Beides sind so genannte implizite Copula-Funktionen, da es keine einfache geschlossene Form für diese Copulas gibt.

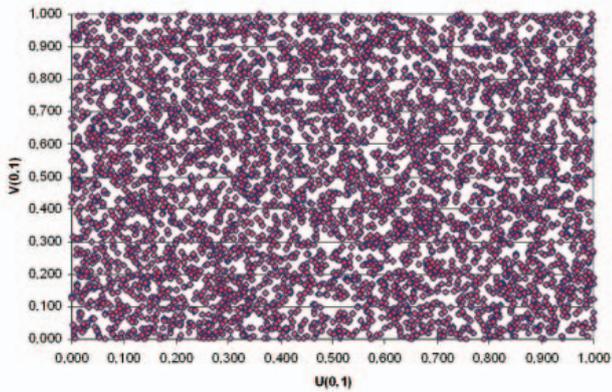
Die andere Klasse von Copulas, die so genannten archimedischen Copulas, werden in der bankpraktischen Literatur gegenwärtig noch kaum betrachtet. Im Gegensatz zu den elliptischen Copulas können mit ihnen auch asymmetrische Abhängigkeiten in den Rändern der Verteilungen abgebildet werden.

Normal-Copula: Die Simulation der abhängigen gleichverteilten Zufallszahlen für Schritt 1 mit der Normal-Copula erfolgt unter Anwendung einer Umwandlung in korrelierte standardnormalverteilte Zufallszahlen mittels der Cholesky-Faktorisierung und anschließender Rücktransformation. Die Abbildung 7 illustriert die Transformationsschritte der Normal-Copula.

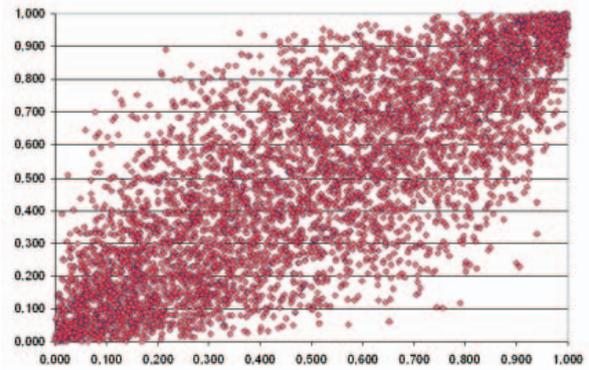
t-Copula: Mittels der t- oder Student-Copula-Funktion gelingt es, stärkere Abhängigkeiten zwischen extremen Ereignissen abzubilden. Somit können gemeinsame starke Marktbewegungen in Realität besser als durch die Normal-Copula erfasst werden. Wie die Normal-Copula weist auch die t-Copula ein symmetrisches Abhängigkeitsverhalten auf.⁹ Die t-Copula hat zusätzlich zur Korrelation einen weiteren Parameter, den so genannten Freiheitsgrad. Die Abbildung 8 illustriert den Effekt der Teilabhängigkeit bei mittels Normal- und t-Copula simulierten Zufallszahlen. Die Simulation der abhängigen gleichverteilten Zufallszahlen für Schritt 1 mit der Student-Copula kann nicht analog erfolgen, es muss eine zusätzliche Transformation unter Verwendung von Chi-Quadrat verteilten Zufallszahlen erfolgen.

Clayton-Copula: Die Abbildung 9 illustriert die Simulation abhängiger gleichverteilter Zufallszahlen, die mit der archimedischen Clayton-Copula simuliert wurden. Die erste Grafik zeigt die Clayton-Copula.

7. Normal-Copula

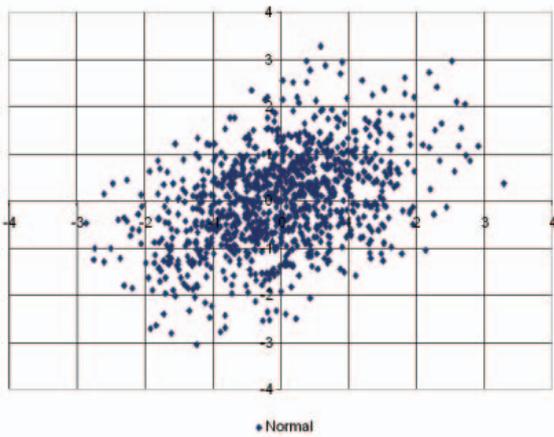


Unabhängige gleichverteilte Zufallszahlen

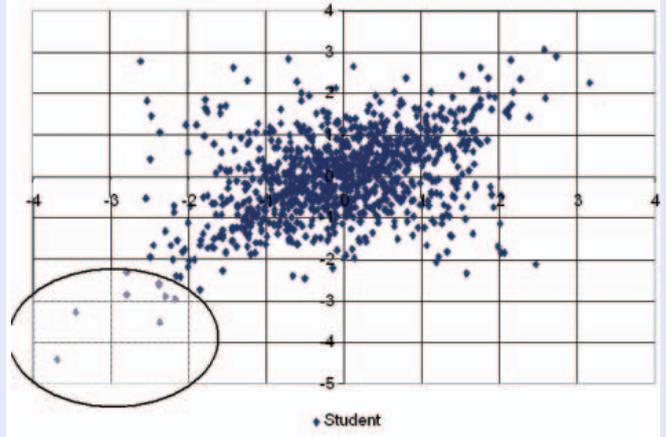


Korrelierte gleichverteilte Zufallszahlen mittels Normal-Copula

8. Normal- versus t-Copula

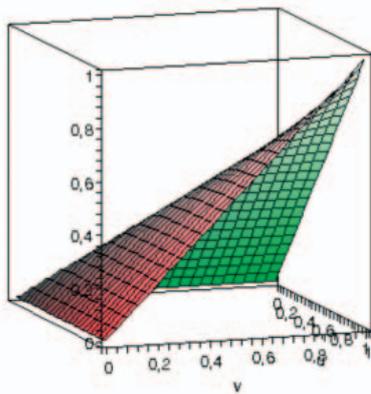


Normal-Copula

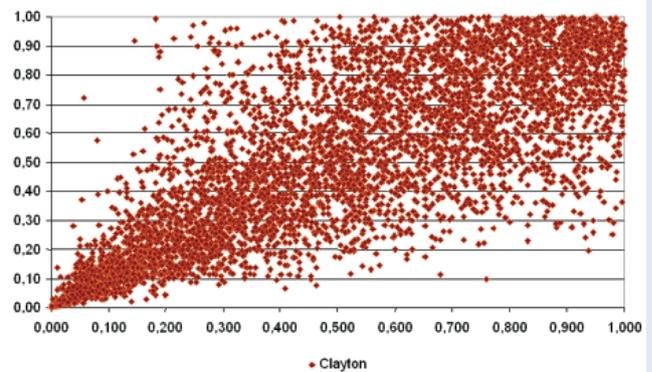


t-Copula

9. Clayton-Copula

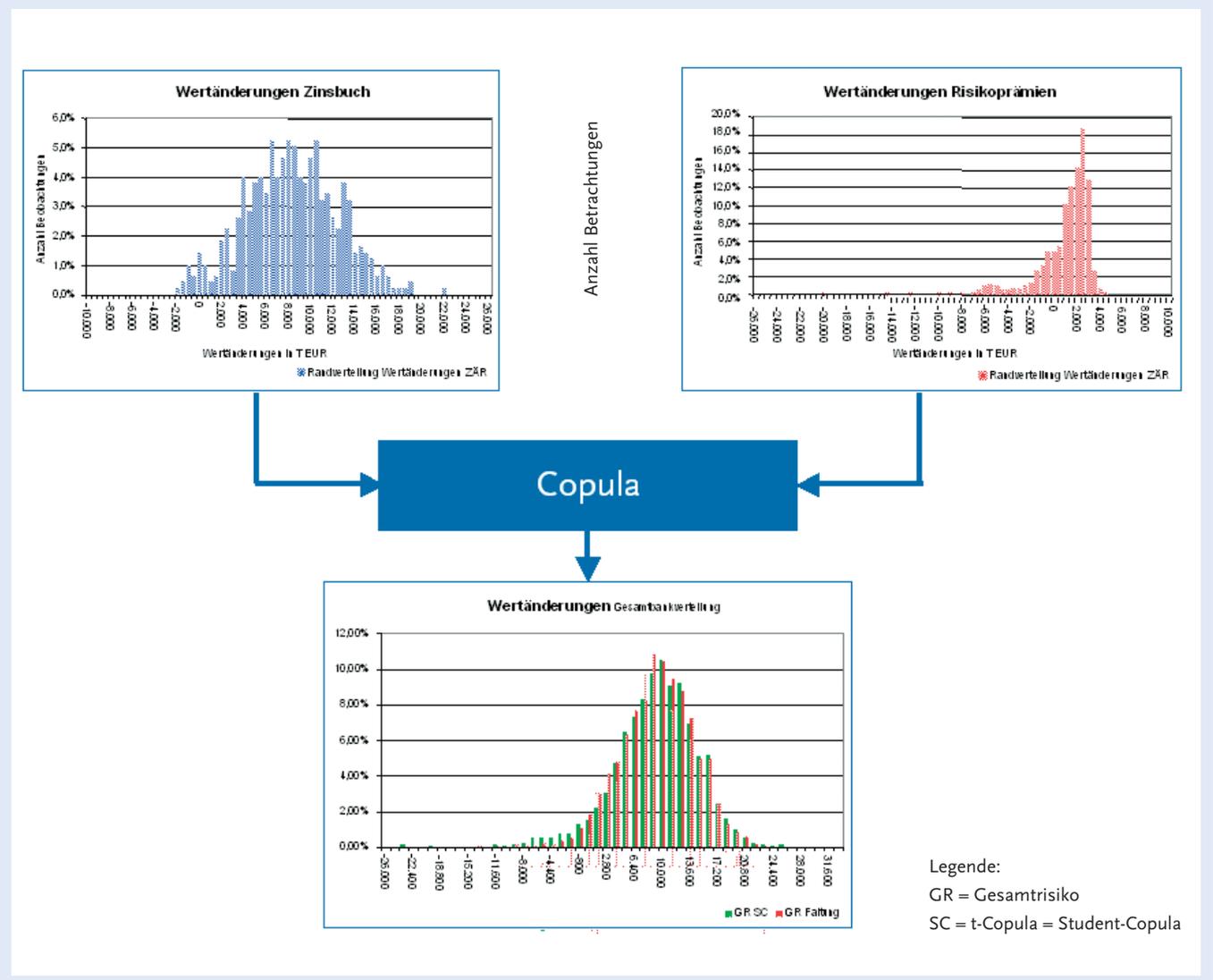


Clayton-Copula



Simulationsergebnis gleichverteilter Zufallszahlen bei Clayton-Copula

10. Aggregation von Marktpreis- und Adressrisikoverteilung zum Gesambankprofil



Im Gegensatz zur Normal- und t-Copula können auch asymmetrische Abhängigkeiten zwischen den Rändern abgebildet werden. Dies ist dann relevant, wenn Chancen und Risiken in der Realität nicht symmetrisch eintreten. Ausführungen zur Simulation von archimedischen Copulas finden sich in Cherubini et al., 2004.

Auswahl der Copula und Schätzung der Parameter: Aufgrund der Datenverfügbarkeit gilt es, sich gegenwärtig sowohl mit Fragen der Auswahl der geeigneten Copula wie auch mit der Schätzung der Parameter (zum Beispiel Maximum Likelihood Methoden) für die jeweilige Copula auseinander zu setzen. So ist für die Normal-Copula die Korrelationsmatrix und für die t-Copula zusätzlich der Freiheitsgrad zu schätzen. Im Hinblick auf die Auswahl

der Copula existieren unterschiedliche statistische Verfahren. Für Details zu den Fragestellungen sei auf das Buch von Cherubini et al verwiesen.

Heuristisch kann man sich im zweidimensionalen Fall bezüglich der Auswahl der Copula zum Beispiel am empirischen Plot orientieren, um Rückschlüsse auf Teilabhängigkeiten oder Asymmetrie zu ziehen.

Beispiel Gesamtbankrisiko

Eine zentrale Anwendungsmöglichkeit der Copula-Funktionen ist die Ermittlung des Gesamtbankrisikos, das zum Beispiel im Rahmen der Risikotragfähigkeitsanalysen der MaRisk wie auch bei der strategischen Asset-Allokation benötigt wird. Gegenwärtig wird hierfür häufig das Verfahren der korrelierten Addition angewandt, das auf Normalverteilungsannahmen beruht. Beispielhaft wurde für eine fiktive Bank die Marktpreisrisiko- und die Addressrisiko-Chancen-Risiko-Verteilung mittels verschiedener Verfahren im Hinblick auf das Gesamtrisiko zum Konfidenzniveau 99,5 Prozent analysiert.

Verglichen wurden die Ergebnisse für eine Korrelation von 30 Prozent von

- Faltung (keine Korrelation),
- Korrelierte Addition,
- Normal-Copula,
- Student-Copula.

Die Ergebnisse für den VaR (negative Abweichung von der Erwartung) sind in der folgenden Abbildung 11 dargestellt.

11. Ergebnisvergleich der unterschiedlichen Methoden				
Kennzahl	Faltung	Korrelierte Addition	Normal-Copula	Student-Copula Freiheitsgrad 3)
VaR 99,5 Prozent in Tausend Euro	14.313	15.582	16.239	17.612

Da die Faltung keine Abhängigkeit berücksichtigt, wird das Gesamtrisiko unterschätzt. Die korrelierte Addition ist nicht in der Lage die Schiefe der Verteilungen adäquat abzubilden. Dies wird durch Anwendung der Normal-Copula erreicht. Das Ergebnis der Student-Copula ist höher, da durch sie eine stärkere Teilabhängigkeit modelliert wird.

Copula-Funktionen sind gegenwärtig dabei, sich zum Standardverfahren zur Aggregation von Risiken zu entwickeln. Der einfachste Weg hierbei ist sicher, zunächst die Normal-Copula anzuwenden. Diese bietet gegenüber dem Noch-Standard-Verfahren der korrelierten Addition bei der Gesamtbankrisikoaggregation den Vorteil, bei gleicher und bereits verfügbarer Inputanforderung (Randverteilung und Korrelation zwischen den Risiko-

arten) bessere Ergebnisse zu liefern. Der Einsatz der Copula-Funktionen ist trotz sicherlich noch bestehenden Forschungsbedarfs (etwa im Hinblick auf die Wahl der "richtigen" Copula und der Parameterschätzung) gerechtfertigt. Bei der Kreditrisikomodellierung sind diese Techniken bereits State-of-the-Art.

Autoren:

Dipl. Math. oec. Dr. Andreas Beck

Seit Juli 2006 Geschäftsführer der ICnova GmbH in Karlsruhe. Studium der Wirtschaftsmathematik an der Universität Ulm und Syracuse, New York. 1996 Promotion am Lehrstuhl für angewandte Analysis an der Universität Ulm. Ab 1996 bei GILLARDON in der Geschäftsführung für den Aufbau des Bereichs Gesamtbanksteuerung und Consulting verantwortlich. Autor zahlreicher Publikationen zu den Themen Produktkalkulation, Risikomanagement und Aufsichtsrecht.

Dipl. Math. oec. Dr. Michael Lesko

Leiter Research Gesamtbanksteuerung bei GILLARDON. Studium der Wirtschaftsmathematik und Promotion an der Universität Ulm. Begleitend zur Promotion Mitarbeiter am Institut für Finanz- und Aktuarwissenschaften (IFA), Ulm. Seit 1998 bei GILLARDON tätig mit dem Schwerpunkt Kreditrisikomodellierung und -systeme. Diverse Veröffentlichungen sowie Seminar- und Referententätigkeiten zu dieser Thematik.

Dipl. Wi.-Ing. Dr. Frank Schlottmann

Studium und Promotion an der Universität Karlsruhe (TH). Parallel dazu unternehmerische Tätigkeit im Bereich Informationstechnologie-Consulting und -Training. Seit 1994 bei GILLARDON tätig in den Bereichen Entwicklung, Beratung und Projekte mit aktuellem Schwerpunkt Kreditrisiko und Research. Zahlreiche internationale Publikationen und Vorträge im Bereich des finanziellen Risikomanagements.

Prof. Dr. Konrad Wimmer

Leiter Business Center Finance der msg systems. Ausbildung zum Bankkaufmann, Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Universität Regensburg mit anschließender Promotion. Lehrtätigkeit unter anderem an Fachhochschulen, Genossenschafts- und Sparkassenakademien und -verbänden. Langjährige Tätigkeit beim Sparkassenverband Bayern, IZB soft und msg systems. Lehrtätigkeit an der Fachhochschule Neu-Ulm.

- 1 Vgl. Beck, A. / Lesko, M.: Copula-Funktionen zur Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, 05/2006, Seiten 289 bis 293.
- 2 Bezüglich Schwächen des Risikomaßes VaR, zum Beispiel der fehlenden Subadditivität sei verwiesen auf Beck, A. / Lesko, M., Moderne Ansätze zur Messung von Ertrag und Risiko der Gesamtbank in: Pfeifer / Ulrich / Wimmer (Hrsg.): MaRisk Umsetzungsleitfaden, Heidelberg 2006, Seite 511.
- 3 Kiesel, R. / Lesko, M. / Prestele, C.: Modellierung von Abhängigkeiten bei der Bewertung von Verbriefungen, in: Gruber, W. et al. Handbuch Kreditderivate und Verbriefungen, Poeschel, 2005, Seiten 313 bis 329.
- 4 Formal handelt es sich bei den Randverteilungen im Beispiel um die Wahrscheinlichkeitsfunktionen diskreter Zufallsvariablen. Inhaltlich beschreiben diese die Eintrittshäufigkeiten bestimmter Wertänderungen.
- 5 Durch diesen Schritt können beliebige Randverteilungen zusammengefasst werden.
- 6 Nelsen, R.B.: An introduction to copulas, volume 139 of Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999.
- 7 Böcker, K. / Spielberg, H.: Risikoaggregation mit Copulas, in: Die Bank 08/2005, Seiten 56 bis 59.
- 8 Lesko, M. / Vorgrimler, S.: Monte-Carlo-Techniken bei modernen Kreditrisikomodellen – ein Beispiel, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 21/1999 und Li, D.x.: On Default Correlation: A Copula Function Approach, in: Journal of Fixed Income, pp 43 - 54, 2000.
- 9 Es gibt auch unterschiedliche Copulas, die asymmetrisches Verhalten aufweisen, diese Copulas sind vor allem dann relevant, wenn Chancen und Risiken in der Realität nicht symmetrisch eintreten.

Literatur:

- Beck, A. / Lesko, M.: Moderne Ansätze zur Messung von Ertrag und Risiko der Gesamtbank in: Pfeifer / Ullrich / Wimmer (Hrsg.): MaRisk Umsetzungsleitfaden, Heidelberg 2006.
- Beck, A. / Lesko, M.: Copula-Funktionen zur Ermittlung des Gesamtbankrisikoprofils, in: Betriebswirtschaftliche Blätter, 05/2006, Seiten 289 bis 293.
- Böcker, K. / Spielberg, H.: Risikoaggregation mit Copulas, in: Die Bank 08/2005, Seiten 56 bis 59.
- Cherubini, U. / Luciano, E. / Vecchiato, W.: Copula Methods in Finance, Wiley, 2004.
- Kiesel, R./Lesko, M./Prestele, C.: Modellierung von Abhängigkeiten bei der Bewertung von Verbriefungen, Handbuch Verbriefungen und Kreditderivate, Poeschel, 2005, Seiten 313 bis 329.
- Lesko, M. / Vorgrimler, S.: Monte-Carlo-Techniken bei modernen Kreditrisikomodellen – ein Beispiel, Zeitschrift für das gesamte Kreditwesen, 21/1999.
- Li, D.x.: On Default Correlation: A Copula Function Approach, in: Journal of Fixed Income, 9, pp 43 - 54, 2000.
- Nelsen, R.B.: An introduction to copulas, volume 139 of Lecture Notes in Statistics, Springer-Verlag, New York, 1999.
- O. V., Rundschreiben 18/2005, Mindestanforderungen an das Risikomanagement.

GILLARDON – innovative Lösungen für die Finanzwirtschaft

Die Lösungen

Unsere Kernkompetenzen umfassen die Bereiche Kundenberatung, Produktkalkulation und Gesamtbanksteuerung.

Kundenberatung

evenit™ ist das themenorientierte Beratungssystem für alle Vertriebskanäle für die Themen Altersvorsorge, Baufinanzierung, Vermögensanalyse und Financial Planning.

Produktkalkulation

MARZIPAN™ ist die Lösung zur Produktberatung und -kalkulation von Aktiv- und Passivgeschäften auf Basis der Marktzins- und Barwertmethode.

FinanceFactory™ ist das regelbasierte Kalkulationssystem für die Absatzfinanzierung, das alle Darlehensvarianten der Absatzfinanzierung inklusive Restkreditversicherung und Subventionsrechnung abdeckt.

Gesamtbanksteuerung

THINC™ ist die integrierte Softwarelösung zur wertorientierten Gesamtbanksteuerung und deckt die Themen Markt- und Vertriebssteuerung, Bilanzstrukturmanagement, Risikocontrolling, Treasury, Adressrisikosteuerung, Basel II und IAS / IFRS ab. THINC unterstützt Sie bei der Erfüllung der Anforderungen aus den MaRisk.



GILLARDON ist Branchenspezialist für Softwarelösungen, Consulting und Seminare in den Themenbereichen Kundenberatung, Produktkalkulation und Gesamtbanksteuerung.